Unidad 8

- Temas avanzados en la teoría de la producción

“Las restricciones se determina mediante las desigualdades que señalan las cantidades máximas y especificas que se pueden utilizar de algunos insumos, o algunos requisitos mínimos que deben satisfacerse”.

Capítulo 8

(Opcional)

Temas avanzados de la teoría de la producción

8.1 LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN COBB-DOUGLAS

La función de producción *Cobb-Douglas* es la que en forma más amplia se utiliza en los trabajos empíricos. La función se expresa por

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

donde Q es la producción y L y K son los insumos de mano de obra y capital, respectivamente, A, α (alfa) y β (beta) son parámetros positivos determinados en cada caso por los datos. Mientras mayor sea el valor de A, más avanzada es la tecnología. El parámetro α mide el aumento porcentual de Q como resultado del aumento de 1% en L mientras se mantiene constante K. De igual forma, β mide el aumento porcentual de Q como resultado del aumento de 1% en K mientras se mantiene constante L. Por lo tanto, α y β son la elasticidad de la producción de L y K, respectivamente. Si $\alpha + \beta = 1$, hay rendimientos constantes a escala; si $\alpha + \beta > 1$, hay rendimientos decrecientes a escala. Para la función Cobb-Douglas, $e_{LK} = 1$.

EJEMPLO 1. Si $A = 10$ y $\alpha = \beta = 1/2$, se tiene

$$Q = 10L^{1/2}K^{1/2}$$

Puesto que $\alpha + \beta = 1$, esta función Cobb-Douglas muestra rendimientos constantes a escala, por lo que sus isocuantas son equidistantes y paralelas a lo largo de una ruta de expansión que es una línea recta desde el origen. Al mantener constante K y variar L, se obtiene el producto total del trabajo o mano de obra (PT_L) y con base en él, el PP_L y el PM_L. Estas curvas sólo muestran la etapa II de la producción (al igual que la fig. 6-14). Más aún, el PP_L y el PM_L son funciones o dependen de K/L. (Véanse los problemas 8.1 al 8.4.) Lo mismo ocurre para K.

8.2 INEFICIENCIA X

En la sección 6.1 se definió la función de la producción como la relación tecnológica que muestra la cantidad máxima de una mercancía que puede producirse por unidad de tiempo para cada combinación de insumos. Sin embargo, en muchas situaciones del mundo real, ni la mano de obra ni la administración trabajan con tanta intensidad o con tanta eficiencia como podrían hacerlo, por lo que la producción no es la máxima. Leibenstein, quien introdujo por primera vez este concepto, lo denominó la *ineficiencia X*.

La ineficiencia X con frecuencia ocurre debido a la falta de motivación por la ausencia de incentivos o presiones competitivas. Por ejemplo, los contratos laborales a menudo no aclaran por completo las especificaciones de un empleo, y dejan abiertas a la interpretación la cantidad y la calidad del esfuerzo requeridas. En estos casos, es frecuente que la mano de obra y la administración decidan no presionarse tanto como podrían hacerlo, lo que conduce a la ineficiencia X.

EJEMPLO 2. Se han encontrado considerables evidencias empíricas que comprueban la existencia de la ineficiencia X. Por ejemplo, Leibenstein señaló el caso de una refinería petrolera egipcia cuya productividad era la mitad de la de otra instalación similar. Cuando llegó una nueva administración, la brecha de la productividad se cerró rápidamente con la misma fuerza laboral. Durante muchos años los negocios se han dado cuenta que puede aumentarse la productividad si se inculca a los empleados un sentido de pertênencia y de logro, pero sólo hasta hace poco los negocios han llegado a apreciar por completo la enorme ganancia potencial que puede conseguirse al reducir la ineficiencia X (es decir, al aumentar la eficiencia X).

8.3 PROGRESO TECNOLÓGICO

El progreso tecnológico se refiere al aumento de la productividad de los insumos y puede representarse mediante un desplazamiento hacia el origen de la isocuanta que se refiera a cualquier nivel de producción. Esto significa que puede obtenerse cualquier nivel de producción con menos insumos, o que puede obtenerse más producción con los mismos insumos. Hicks clasificó el progreso tecnológico en *neutral, intensivo en capital,* o *intensivo en trabajo*, según que PM_K aumente en la misma proporción, en mayor proporción o en menor proporción que PM_L.

EJEMPLO 3. La figura 8-1 muestra el progreso tecnológico neutral en la sección A, con utilización de K en la sección B y con utilización de L en la sección C. Puesto que el progreso tecnológico neutral aumenta PM_K y PM_L en la misma proporción, $TMST_{LK} = PM_L/PM_K =$ la pendiente de la isocuanta permanece constante en el punto E_1 y en el punto E_2 a lo largo de la línea delgada original $K/L = 1$ (véase la sección A). Todo lo que ocurre es que $Q = 100$ ahora puede producirse con $2L$ y $2K$ en lugar de $4L$ y $4K$. Por otra parte, puesto que el progreso tecnológico que utiliza K aumenta AA_K en forma más proporcional que PM_L, la pendiente absoluta de la isocuanta desciende a medida que se desplaza hacia el origen a lo largo de la línea delgada $K/L = 1$ (véase sección B). Por último, el progreso tecnológico que utiliza L es lo opuesto al progreso tecnológico que utiliza K (véase la sección C). El progreso tecnológico que utiliza K se conoce en ocasiones como intensivo en K o ahorrador de L, debido a que conduce a que en la producción se utilice más K y menos L. En igual forma, la utilización de L se conoce como el progreso tecnológico intensivo en L o ahorrador de

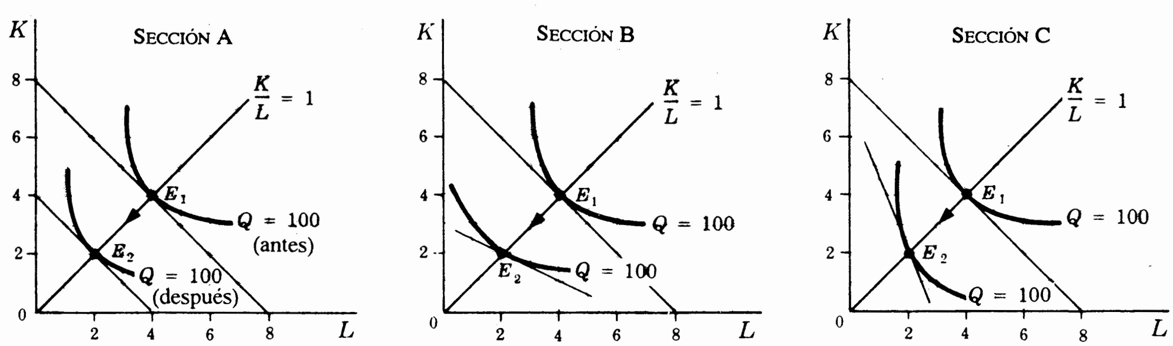

Figura 8-1

K. El tipo de progreso tecnológico que se lleva a cabo es un determinante importante de la participación de L y K en el producto nacional neto (PNN) (véase problema 8.7).

8.4 PROGRAMACIÓN LINEAL-LOS CONCEPTOS BÁSICOS

La *programación lineal* representa uno de los avances más importantes en la teoría de la producción en los últimos 30 o 35 años. Es una técnica matemática para resolver problemas de maximización o minimización cuando existe más de una restricción. Su ventaja principal es de cálculo y se basa en la utilización de computadoras.

La programación lineal tiene su fundamento en los siguientes supuestos:

1) Hay más de una restricción (de lo contrario el programa se podría resolver con facilidad mediante los métodos tradicionales).

2) La producción y los precios de los factores son constantes (de modo que las líneas del presupuesto y del isocosto, así como cualquier otra restricción, puedan representarse mediante líneas rectas).

3) Hay rendimientos constantes a escala y proporciones tecnológicamente fijas de insumos o factores (por lo que las rutas de expansión son líneas rectas que pasan por el origen).

Un producto por lo general puede producirse con más de una combinación de factores o *proceso de producción*. Cada proceso puede representarse mediante una línea que va del origen al espacio del insumo. Al unir los puntos que representan el mismo nivel de producción sobre diferentes líneas, se obtiene el equivalente de una isocuanta. Los puntos sobre estas isocuantas que no están sobre alguna línea pueden alcanzarse mediante la combinación apropiada de dos procesos adyacentes. Al añadir las *restricciones* lineales a la figura, puede encontrarse en forma gráfica la solución maximizadora o minimizadora.

EJEMPLO 4. La sección A de la figura 8-2 muestra que puede producirse una mercancía en particular mediante tres procesos: el proceso 1 con $K/L = 2.5$, el proceso 2 con $K/L = 1$, o el proceso 3 con $K/L = 0.4$. Puede obtenerse una producción de 50 unidades con el proceso 1 en el punto A, con el proceso 2 en el punto B, o con el proceso 3 en el punto C. Al unir estos puntos se obtienen las isocuantas para $Q = 50$, con quiebres o puntos A, B y C. Al utilizar el doble de los insumos con cada proceso se obtienen las isocuantas para $Q = 100$. Observe que los segmentos correspondientes de las dos isocuantas son paralelos.

En la sección B, la restricción usual de los costos de la empresa se representa mediante la línea de isocostos GH. El triángulo sombreado OJN es el área de *soluciones factibles* o alcanzables. La *solución óptima* la determina el punto E, donde el área de las soluciones factibles toca la isocuanta para $Q = 100$ sobre la línea del proceso 2. Ésta es la isocuanta más alta a la que puede llegar la empresa con el isocosto GH.

La sección C muestra que si en lugar de ello la empresa se enfrenta a una limitación en la cantidad de los insumos de $\bar{L} = 5$ y $\bar{K} = 8$, la producción máxima de la empresa es $100Q$ en el punto R, produciéndose $50Q$ (determinado mediante OA) con el proceso 1 y $50Q$ (determinado mediante $AR = OB$) con el proceso 2. Observe que cuando la empresa se enfrenta a la restricción única del isocosto (sección B), la empresa alcanza la solución óptima con sólo un proceso (proceso 2). Cuando la empresa se enfrenta a dos restricciones (es decir, $\bar{L} = 5$ y $\bar{K} = 8$ en la sección C) se requiere de la combinación de dos procesos (procesos 1 y 2) para llegar a la solución óptima. En términos generales, el número de procesos requeridos para llegar a la solución óptima no es más que el número de las restricciones.

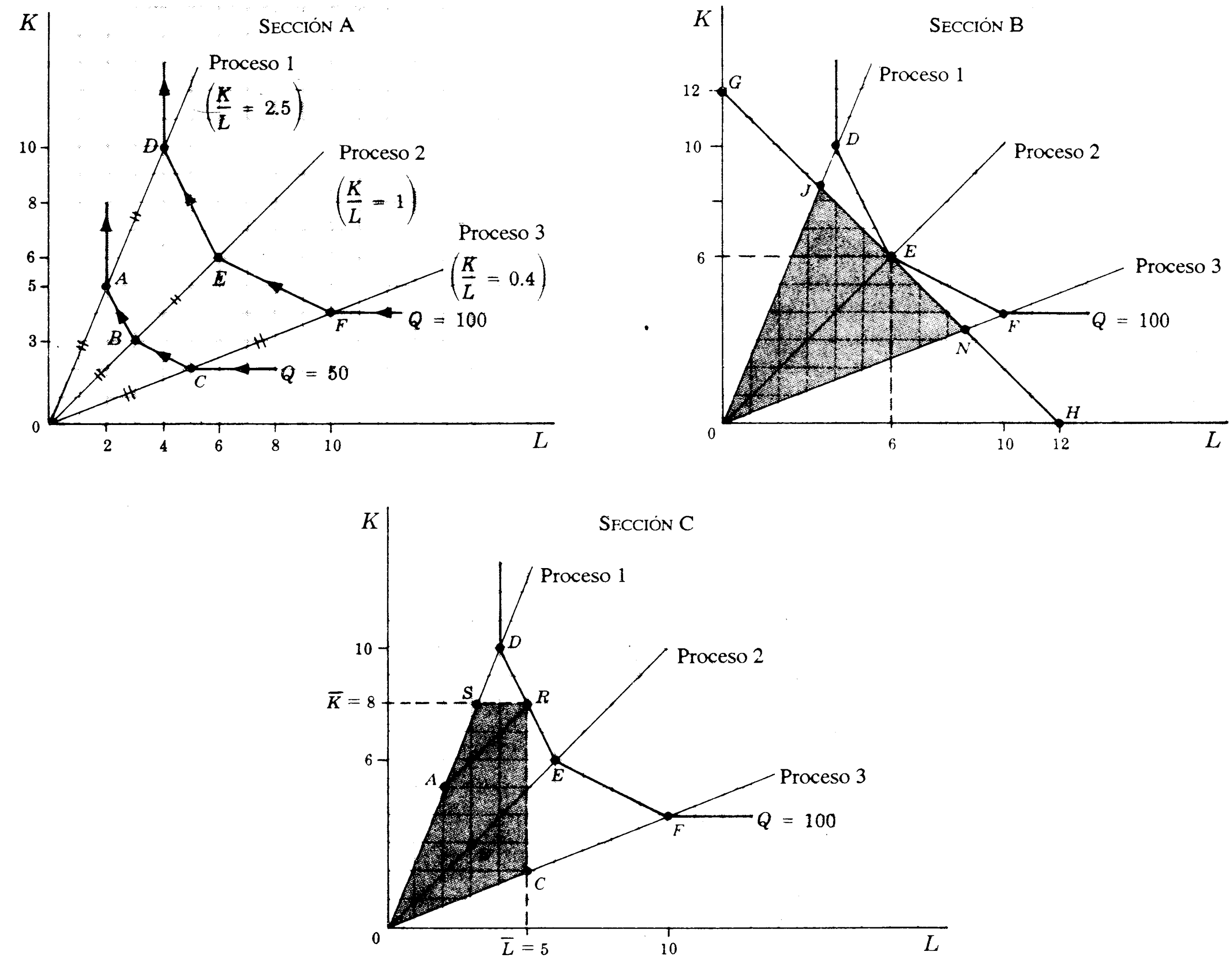

Figura 8-2

8.5 PROGRAMACIÓN LINEAL CON MÁS DE DOS RESTRICCIONES

En los problemas de programación lineal, la función que debe optimizarse se le conoce como la *función objetivo*. Esto incluye por lo general la maximización de la ganancia o la minimización del costo. Las restricciones se determinan mediante las desigualdades que señalan las cantidades máximas y específicas que se pueden utilizar de algunos insumos, o algunos requisitos mínimos que deben satisfacerse. También existen restricciones para impedir valores negativos en la solución.

Los pasos para solucionar en forma gráfica los problemas de programación lineal son los siguientes:

1) Expresar los datos del problema en forma de ecuaciones o desigualdades.

2) Tratar como ecuaciones las restricciones de desigualdad y presentarlas en forma gráfica para determinar la región de soluciones factibles.

3) Graficar la función objetivo como una serie de líneas paralelas que se refieren a los diferentes niveles del objetivo (por ejemplo, como una serie de líneas de isoganancia o isocosto).

4) Determinar la solución óptima, que se encontrará donde un punto extremo o un punto de esquina de la región de soluciones factibles toque la línea de isoganancia más alta o la línea de isocosto más baja.

EJEMPLO 5. Suponga que una empresa produce las mercancías X y Y. Para producir cada unidad de X se requiere $1L$, $3K$ y $1R$ (recursos naturales). Para cada unidad de Y se requieren $0.5L$, $3K$ y $3R$. La empresa no puede utilizar más de $8L$, $30K$ y $24R$. Su margen de utilidad (ingreso neto) es de \$4 por cada unidad de X y \$3 por cada unidad de Y.

1) Si se presentan los datos como ecuaciones o desigualdades se obtiene

$$\text{Función objetivo: } \pi = 4X + 3Y$$

donde π = ganancia total. La función objetiva está sujeta a las restricciones

$$\begin{array}{ll} \text{Restricción } L: & \left.\begin{array}{l} 1X + 0.5Y \leq 8 \\ 3X + 3Y \leq 30 \\ 1X + 3Y \leq 24 \end{array}\right\} \text{restricciones técnicas} \\ \text{Restricción } K: & \\ \text{Restricción } R: & \\ \text{Restricciones de no negatividad:} & X, Y \geq 0 \end{array}$$

La restricción L indica que $1L$ (necesario para producir cada unidad de X) multiplicado por las unidades de X más $0.5L$ (para producir cada unidad de Y) multiplicado por las unidades de Y tiene que ser igual o menor que los $8L$ disponibles.

2) Al tratar cada restricción técnica como una ecuación y despejando Y, se obtiene

$$\text{De la restricción } L, \quad Y = 16 - 2X$$

$$\text{De la restricción } K, \quad Y = 10 - 1X$$

$$\text{De la restricción } R, \quad Y = 8 - \tfrac{1}{3}X$$

En la sección A de la figura 8-3 se muestra cada restricción técnica en todos los puntos sobre la línea de restricción y a la izquierda de la misma. Las líneas de restricción de no negatividad coinciden con los ejes Y y X. La región de las soluciones factibles es el área sombreada *OABEC*.

3) Si se despeja la función objetivo para Y se obtiene

$$Y = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3}X$$

Esto da la serie de líneas discontinuas de isoganancia (una para cada valor de π) con pendiente de -4/3 (la razón de ganancia) dibujadas en la sección B de la figura 8-3.

4) La región factible toca la línea de isoganancia más alta en el punto E (6X, 4Y) donde π está al máximo en

$$\pi = (\$4)(6) + (\$3)(4) = \$36$$

Para un problema de minimización véase el problema 8.14. Los problemas con más de dos variables se encuentran fuera del alcance del enfoque gráfico. Las computadoras pueden resolver con rapidez estos problemas al comparar los valores de la función objetivo en las diversas esquinas de la región de las soluciones factibles y determinando el punto

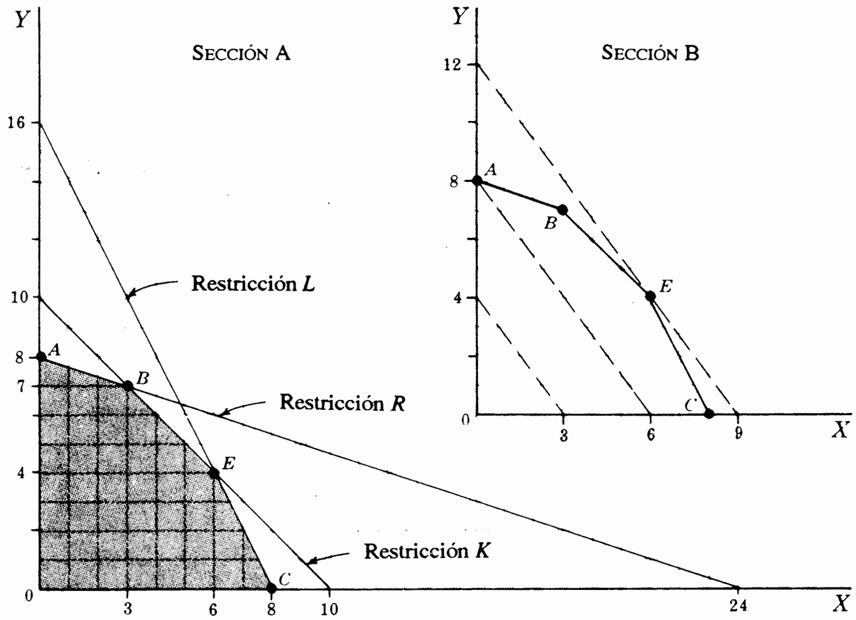

Figura 8-3

extremo o la solución de esquina que optimice la función objetivo. Este método de solución es el método símplex y utiliza el teorema del punto extremo.

8.6 EL PROBLEMA DUAL Y LOS PRECIOS SOMBRA

Todo problema de programación lineal conocido como el *problema principal* tiene su problema correspondiente denominado el *problema dual.* Por ejemplo, si el problema principal es la maximización de las ganancias, su problema dual es la minimización del costo y viceversa. Las soluciones para el problema dual son los *precios sombra.* Éstos dan el cambio en el valor de la función objetivo por un cambio unitario en cada restricción. Por ejemplo, el precio sombra en un problema de maximización de ganancias indica cuánto aumentarían las ganancias por aumento unitario en la utilización de cada insumo. Por lo tanto, los precios sombra proporcionan el valor marginal imputado o el valor de cada insumo para la empresa. Si un insumo en particular no se emplea por completo, su precio sombra es cero porque el aumentar este insumo no produciría cambios en las ganancias. Una empresa debe tratar de ampliar la utilización de un insumo mientras el valor marginal o su precio sombra exceda el costo adicional de contratar el insumo.

EJEMPLO 6. Para determinar el precio sombra de L en el ejemplo 5, se comienza desde el punto de maximización de las ganancias E, que da $\pi = \$36$, en la sección B de la figura 8-3. Después se aumenta L en una unidad de modo que la restricción L se convierta en $1X + 0.5Y \leq 9$. Esto se presenta en la sección A de la figura 8-4 mediante la línea paralela a la línea de restricción L anterior que cruza la línea de la restricción K en el punto E'. Ahora la región de las

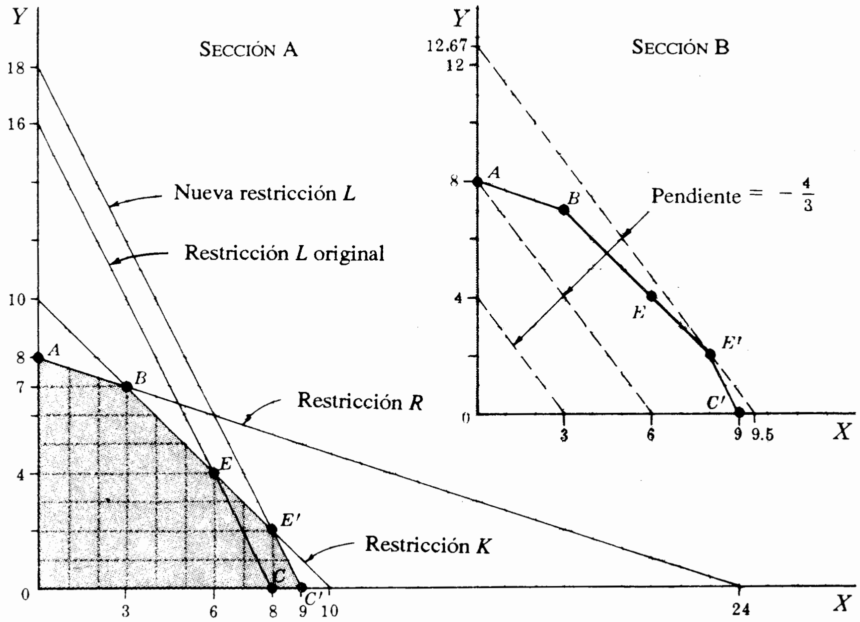

Figura 8-4

soluciones factibles es el área sombreada *OABE'C'*. La sección B muestra que las ganancias ahora están maximizadas en el punto *E'* (8X, 2Y) en (\$4)(8) + (\$3)(2) = \$38. Por consiguiente, el precio sombra de *L* es \$2. La empresa debe intentar contratar más *L* si su costo adicional es menor que su precio sombra, porque el hacerlo aumentaría la ganancia neta de la empresa. El precio sombra de *K* puede determinarse en la misma forma y también es positivo debido a que *K* se emplea en su totalidad en el punto *E*. Por otra parte, puesto que *R* en la sección A no está empleado en su totalidad, (es decir, es una variable poco activa) su precio sombra es cero.

Glosario

Elasticidad de la producción Da el aumento porcentual en la producción como resultado del aumento porcentual de un insumo, mientras se mantienen constantes todos los demás insumos.

Función de producción Cobb-Douglas Esta función se determina mediante $Q = AL^{\alpha} K^{\beta}$, donde Q es la producción y L y K son insumos. A, α y β son los parámetros. α = la elasticidad de la producción de L, mientras que β = elasticidad de la producción de K. Se tienen rendimientos constantes, crecientes, o decrecientes a escala cuando $\alpha + \beta = 1$, > 1 o < 1, respectivamente.

Función objetivo La función que debe maximizarse o minimizarse sujeta a las restricciones.

Ineficiencia X El grado en que la producción de una mercancía no alcanza al máximo posible (indicado por la función de producción) debido a la carencia de una motivación adecuada de la mano de obra y la administración.

Precio sombra El cambio en el valor de la función objetivo por el cambio unitario en una de las restricciones.

Problema dual Lo contrario del problema principal; por lo tanto, para un problema principal de maximización de la ganancia, el problema dual es la minimización del costo y viceversa.

Problema principal El problema original de maximización (por ejemplo, la ganancia) o de minimización (por ejemplo, el costo).

Proceso de producción Las combinaciones de insumos para obtener producciones. En la programación lineal cada proceso o actividad incluye combinaciones de insumos determinados tecnológicamente.

Programación lineal Una técnica matemática para resolver problemas de maximización o minimización en que las restricciones y la función objetivo a optimizar se representan mediante líneas rectas.

Progreso tecnológico intensivo en capital Mayor aumento proporcional en el producto marginal del capital que en el producto marginal del trabajo, de modo que la pendiente de la isocuanta desciende a medida que se desplaza hacia el origen en la razón original capital-trabajo.

Progreso tecnológico intensivo en trabajo Mayor aumento proporcional en el producto marginal del trabajo que en el producto marginal del capital, de modo que la pendiente de la isocuanta aumenta a medida que se desplaza hacia el origen a la razón original capital-trabajo.

Progreso tecnológico neutral El aumento proporcional en el producto marginal del capital y el trabajo, en forma tal que la pendiente de la isocuanta permanece sin cambios mientras se desplaza hacia el origen.en la razón original capital-trabajo.

Restricciones Desigualdades que describen límites estructurales (capacidad).

Solución óptima La mejor de las soluciones factibles.

Soluciones factibles Todas las soluciones o combinaciones de mercancías que son posibles, de acuerdo a las restricciones.

Preguntas de repaso

1. Cuando $\alpha = 3/4$ y $\beta = 1/4$ para la función de producción Cobb-Douglas, los rendimientos a escala son *a*) constantes, *b*) crecientes, *c*) decrecientes, o *d*) primero crecientes y después decrecientes.

Respuesta *a*) Porque $\alpha + \beta = 1$. Véase la sección 8.1.

2. La elasticidad de la producción del trabajo mide *a*) $(\Delta Q)/(\Delta L)$, *b*) $(\%\Delta Q)/(\%\Delta L)$, *c*) $(\Delta L)/\Delta Q)$, o *d*) $(\%\Delta L)/(\%\Delta Q)$.

Respuesta *b*) Véase la sección 8.1.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es *falsa* respecto a la ineficiencia X? *a*) Mide el grado en el que la producción de una mercancía no alcanza el máximo señalado por la función de producción; *b*) es el resultado de la falta de motivación adecuada; *c*) se ha descubierto que existe, según varios estudios empíricos, o *d*) ninguna de las anteriores.

Respuesta *d*) Véase la sección 8.2.

4. El progreso tecnológico se refiere a *a*) un aumento en PM_L y PM_K, *b*) la reducción en L y K para obtener cualquier nivel de producción, *c*) un desplazamiento de las isocuantas hacia el origen, o *d*) todo lo anterior.

Respuesta *d*) Véase la sección 8.3.

5. El progreso tecnológico con utilización de capital *a*) aumenta PM_K en forma más proporcional que PM_L, *b*) aumenta la pendiente absoluta de la isocuanta, *c*) reduce K pero aumenta L para obtener un determinado nivel de producción, o *d*) todo lo anterior.

Respuesta *a*) Véase la sección 8.3.

6. El progreso tecnológico con utilización de trabajo *a*) significa la profundización de L, *b*) significa ahorro de K, *c*) reduce K/L, o *d*) todo lo anterior.

Respuesta *b*) Véase el ejemplo 3.

7. Todas las soluciones posibles de acuerdo con las restricciones existentes se conocen como *a*) soluciones óptimas, *b*) soluciones factibles, *c*) soluciones principales, o *d*) soluciones duales.

Respuesta *b*) Véase el ejemplo 4.

8. ¿Cuál de los siguientes no es un supuesto de programación lineal? *a*) precios constantes de producción, *b*) precios constantes de insumos, *c*) rendimientos crecientes a escala, o *d*) proporciones de factores determinados tecnológicamente.

Respuesta *c*) Véase la sección 8.4.

9. El número de procesos requeridos para llegar a una solución óptima siempre es *a*) igual al número de restricciones, *b*) menor que el número de restricciones, *c*) más que el número de restricciones, o *d*) no más que el número de restricciones.

Respuesta *d*) Véase el ejemplo 4.

10. En la programación lineal se optimiza *a*) una función objetivo sujeta a las restricciones de desigualdad, *b*) desigualdades de restricción sujetas a la función objetivo, *c*) restricciones objetivo sujetas a las funciones de desigualdad, o *d*) todo lo anterior.

Respuesta *a*) Véase la sección 8.5.

11. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es *falsa*? *a*) El dual de la maximización de la ganancia es la minimización del costo; *b*) el dual de la minimización del costo es la maximización de la ganancia; *c*) la minimización del costo es el dual de alcanzar la línea de isocosto más baja posible, o *d*) el alcanzar la línea de ganancia más alta posible es el dual de alcanzar la línea de isocosto más baja posible.

Respuesta *c*) Véase la sección 8.6.

12. El precio sombra se refiere a *a*) el cambio en el valor de la restricción por cambio unitario en la función objetivo, *b*) el cambio en el valor de la función objetivo por cambio unitario en cualesquiera de las restricciones, *c*) el cambio en el valor de la solución principal por cambio unitario en la solución dual, o *d*) cualesquiera de los anteriores.

Respuesta *b*) Véase la sección 8.6.

Problemas resueltos

LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN COBB-DOUGLAS

8.1 Si se supone que K es constante en $\bar{K} = 1$ para la función de producción Cobb-Douglas del ejemplo 1, *a*) derive el PT_L, PP_L, PM_L ,y *b*) grafique el PT_L, PP_L y PM_L.

a) $PT_L = 10L^{1/2}\,1^{1/2} = 10L^{1/2} = 10\sqrt{L}$

Tabla 8.1

L	PT_L	PP_L	PM_L
0	0	. . .	. . .
1	10.00	10.00	10.00
2	14.14	7.07	4.14
3	17.32	5.77	3.18
4	20.00	5.00	2.68

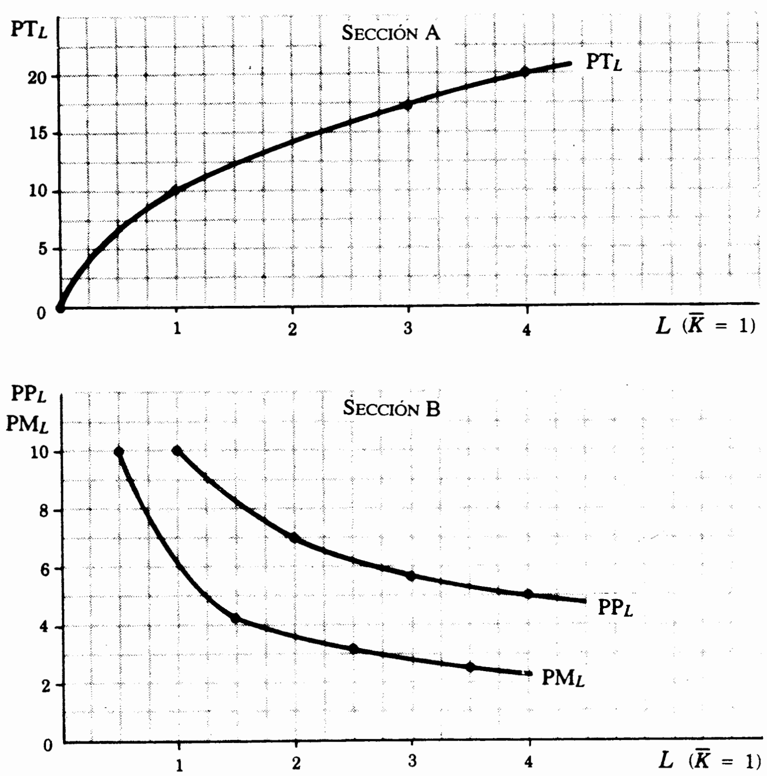

Figura 8-5

b) La sección A de la figura 8-5 muestra el PT_L y la sección B muestra el PP_L y el PM_L de la tabla 8.1. Observe que estas curvas sólo muestran la etapa II de la producción para L y que PM_L se graficó en los puntos medios de L.

8.2 Para la función Cobb-Douglas del ejemplo 1, *a*) derive la ruta de expansión, y *b*) trace la ruta de expansión suponiendo que $P_L = P_K = \$1$ y dibuje sobre la misma figura las isocuantas para $Q = 10$, $Q = 20$ y $Q = 40$.

a) La ruta de expansión es el lugar geométrico de los puntos de equilibrio del productor resultantes de aumentar los gastos mientras se mantienen constantes los precios de los factores. Se deriva en la tabla 8.2 de $Q = 10L^{1/2}K^{1/2} = 10\sqrt{L}\sqrt{K}$ al variar tanto L como K en forma proporcional.

Tabla 8.2

L	K	$10\sqrt{L}\sqrt{K}$	Q
0	0	$10\sqrt{0}\sqrt{0}$	0
1	1	$10\sqrt{1}\sqrt{1}$	10
2	2	$10\sqrt{2}\sqrt{2}$	20
3	3	$10\sqrt{3}\sqrt{3}$	30
4	4	$10\sqrt{4}\sqrt{4}$	40

b) La figura 8-6 muestra la ruta de expansión y las isocuantas hipotéticas para $Q = 10$, $Q = 20$ y $Q = 40$. Observe que la ruta de expansión es una línea recta que pasa por el origen y que las isocuantas son equidistantes y tienen pendientes iguales a lo largo de cualquier línea delgada o isoclina desde el origen.

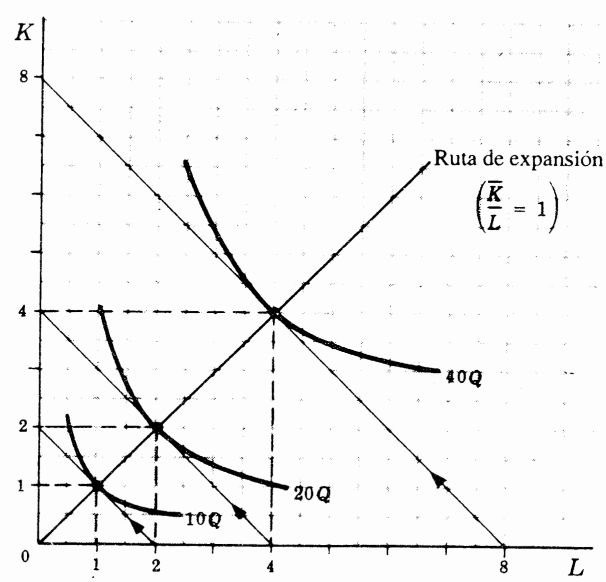

Figura 8-6

8.3 Para una función de producción Cobb-Douglas de la forma $Q = AT^{\alpha}K^{1-\alpha}$ pruebe que *a*) muestra rendimientos constantes de escala, y *b*) PP_L es una función sólo de K/L.

a) Puesto que $\alpha + 1 - \alpha = 1$, esta función de producción Cobb-Douglas muestra rendimientos constantes a escala y se dice que es homogénea de grado uno u homogénea en forma lineal. "Rendimientos constantes a escala", "homogénea de grado uno" y "homogénea en forma lineal" significan lo mismo y se usan en forma indistinta.

b)

$$PP_L = \frac{Q}{L} = \frac{AL^{\alpha}K^{1-\alpha}}{L} = AL^{\alpha-1}K^{1-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha}$$

Puesto que para cualquier función de producción Cobb-Douglas P y α asumen valores fijos, $PP_L = f(K/L)$ sólo. Es decir, el PP_L permanece igual con independencia de la cantidad de L y K utilizados en la producción, en tanto que K/L permanezca constante (o a lo largo de cualquier ruta de expansión o isoclina). Lo mismo es cierto para $PM_L = \alpha A(K/L)^{1-\alpha} = f(K/L)$.

8.4 *a*) Si α y β estimados reales son como los que aparecen en la tabla 8.3, ¿qué tipo de rendimientos a escala muestra cada industria? *b*) ¿En cuánto aumenta la producción en la industria alimenticia estadounidense si L aumenta 1%? ¿Si K aumenta 1%? *c*) Se ha descubierto que en los Estados Unidos y otras naciones desarrolladas sólo una tercera parte del aumento en el nivel de vida durante algunos años se debió al aumento de las unidades físicas de L y K utilizadas. ¿A qué se debió el resto?

Tabla 8.3

Industria	País	α	β
1. Teléfonos	Canadá	.70	.41
2. Gasolina	Francia	.83	.10
3. Productos químicos	India	.80	.37
4. Electricidad	India	.20	.67
5. Maquinaria y herramientas	Estados Unidos	.71	.26
6. Alimentos	Estados Unidos	.72	.35
7. Comunicaciones	URSS	.80	.38

a) En la tabla 8.4 se presentan las respuestas para cada una de las siete industrias, donde c = rendimientos crecientes a escala y d = rendimientos decrecientes a escala.

Tabla 8.4

Industria	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha + \beta$	1.11	0.93	1.17	0.87	0.96	1.07	1.18
Rendimientos a escala	c	d	c	d	d	c	c

b) Puesto que $\alpha = 0.72$ en la industria alimentaria estadounidense, un aumento del 1% en L sólo aumentaría Q en 0.72%. Puesto que $\beta = 0.35$, un aumento del 1% en K sólo aumentaría Q en 0.35%.

c) Casi dos terceras partes del aumento en el nivel de vida en los Estados Unidos y otros países desarrollados se debió a los aumentos en la productividad resultantes de los adelantos tecnológicos y a los aumentos en el nivel de adiestramiento y habilidades de los trabajadores.

INEFICIENCIA X

8.5 *a*) ¿Cuál es la relación entre PT_L, PP_L y PM_L de la tabla 8.1 y la eficiencia X? *b*) Si la mayor supervisión del trabajador y una mejor toma de decisiones aumentan la eficiencia X, ¿cuánta supervisión debe emplear la empresa y cuánto debe gastar en mejorar su proceso de toma de decisiones?

a) Los programas PT_L, PP_L y PM_L se basan en el supuesto de una eficiencia X completa. Es decir, representan la cantidad máxima de producción por unidad de tiempo que puede obtenerse de una combinación particular de insumos con la mejor tecnología disponible. Suponen que el trabajo y la administración realizan su mejor esfuerzo. En el mundo real es raro que suceda esto, por lo que para cada combinación de insumos, por lo general PT_L, PP_L y PM_L son menores de lo que se señala en la tabla 8.1 por la existencia de la eficiencia X.

b) Es cierto que con frecuencia una mayor supervisión del trabajador y una mejor toma de decisiones pueden aumentar la eficiencia X. Sin embargo también tienen un costo. Por consiguiente, la empresa debe ejercer mayor supervisión del trabajador y gastar dinero para mejorar la toma de decisiones, si el rendimiento adicional proveniente de esos esfuerzos excede sus costos adicionales y hasta que RM = CM. La reducción de la ineficiencia X mediante el aumento de la motivación puede representar una enorme fuente potencial de beneficios que en la actualidad está desaprovechada.

PROGRESO TECNOLÓGICO

8.6 Repita la figura 8-1 e indique en la misma el efecto de cada tipo de progreso tecnológico sobre K/L a precios de factores relativamente constantes (w/r).

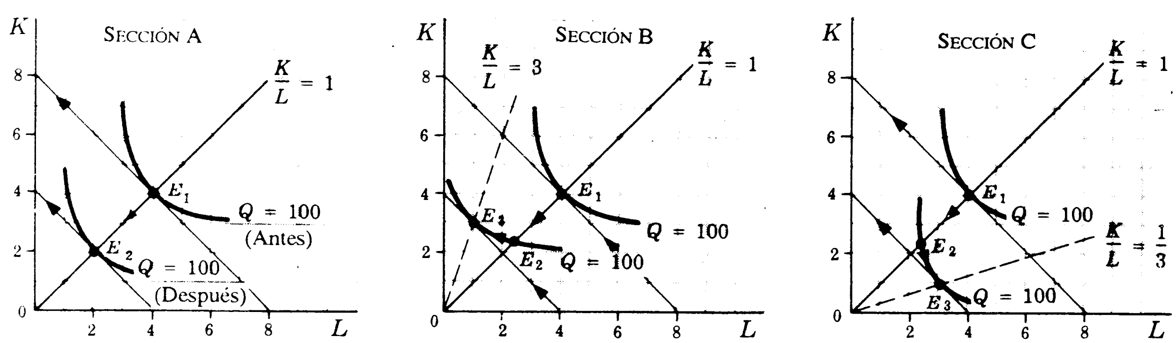

Figura 8-7

Puesto que con el progreso tecnológico neutral el PM_L y el PM_K aumentan en la misma proporción, no hay sustitución de L por K (o de K por L) en la producción cuando no cambia w/r, por lo que K/L permanece sin cambios en $K/L = 1$ (véase el punto E_2 en la sección A de la fig. 8-7). Puesto que con el progreso tecnológico que utiliza K, PM_K aumenta en forma proporcionalmente mayor que PM_L, K se sustituye por L en la producción con w/r constante por lo que K/L asciende hasta $K/L = 3$ (véase el punto E_3 en la sección B). Con progreso tecnológico que utilice L, K/L desciende hasta $K/L = 1/3$ con w/r constante (véase el punto E_3 en la sección C).

8.7 *a)* ¿Cuál es la participación relativa del PNN que corresponde a L y K y la proporción de las participaciones relativas que corresponden a L y K? *b)* ¿Cómo afectan los diferentes tipos de progreso tecnológico las participaciones relativas si w/r permanece constante?

a) Si w = tasa de salario promedio, r = rendimiento promedio sobre el capital o tipo de interés, L = cantidad total de L utilizada en la economía, K = cantidad total de capital, P = índice general de precios y Q = índice general de cantidad (por lo que PQ = PNN). Entonces, la participación relativa de PNN que corresponde a L es wL/PQ, la participación relativa que corresponde a $K = rK/PQ$ y la proporción de la participación relativa que corresponde a L y $K = (wL/PQ) \div (rK/PQ) = wL/rK$.

b) Puesto que el progreso tecnológico neutral deja sin cambio a K/L, la proporción de la participación relativa correspondiente a L y K permanece sin cambio si w/r permanecen sin cambio. Puesto que el progreso tecnológico con utilización de K aumenta K/L (lo que significa que desciende L/K), wL/rK desciende. Por último, puesto que el progreso tecnológico con utilización de L reduce K/L, aumenta wL/rK.

PROGRAMACIÓN LINEAL— LOS CONCEPTOS BÁSICOS

8.8 Si se comienza con la isocuanta para 100 Q en la sección A de la figura 8-2, *a)* dibuje una figura que indique la región de soluciones factibles y la solución óptima cuando el gasto de la empresa es \$10 y w = \$1 y r = \$0.67. *b)* ¿En qué difieren su resultado y el resultado que aparece en la sección B de la figura 8-2 de los resultados de la teoría tradicional de la producción?

a) La restricción o línea de isocosto la determina $G'H'$ en la figura 8-8. La región de las soluciones factibles es $OJ'N'$ y la solución óptima la determina el punto E sobre la línea del proceso 2, al igual que en la sección B de la figura 8-2.

b) La solución óptima en la figura 8-8 y la sección B de la figura 8-2 son iguales a pesar de que las líneas de isocostos difieren. En la teoría tradicional de la producción (donde las isocuantas son curvas suaves), cualquier cambio en la pendiente de la línea de isocosto (que mide los precios relativos de los insumos) conduciría a la sustitución de insumos y a un punto de equilibrio diferente. En la programación lineal esto sólo ocurriría si existiera un número infinito de procesos disponibles para producir una mercancía, por lo que las isocuantas se acercarían a las isocuantas suaves, convencionales.

8.9 Si se comienza de nuevo con la isocuanta para 100Q en la sección A de la figura 8-2, dibuje una figura que muestre la región de la solución factible y la solución óptima cuando el gasto de la empresa es *a)* \$9, w = \$1 y r = \$0.50; *b)* \$8, w = \$1 y r = \$0.40.

a) La restricción o línea de isocosto es $G''H''$ en la figura 8-9. La región de las soluciones factibles es ODN''. La solución óptima sigue siendo 100Q, pero puesto que la línea de isocosto $G''H''$ coincide con el segmento DE de la isocuanta para 100Q, la empresa podría utilizar el proceso 1 o el proceso 2 para cualquier combinación de los procesos 1 y 2 para producir 100Q.

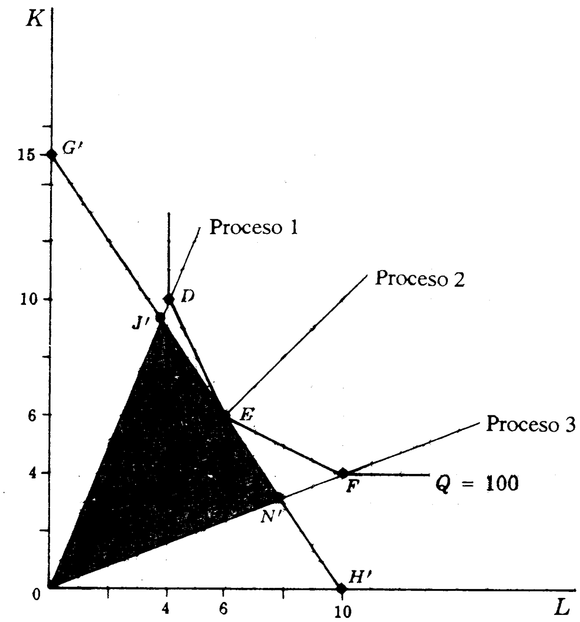

Figura 8-8

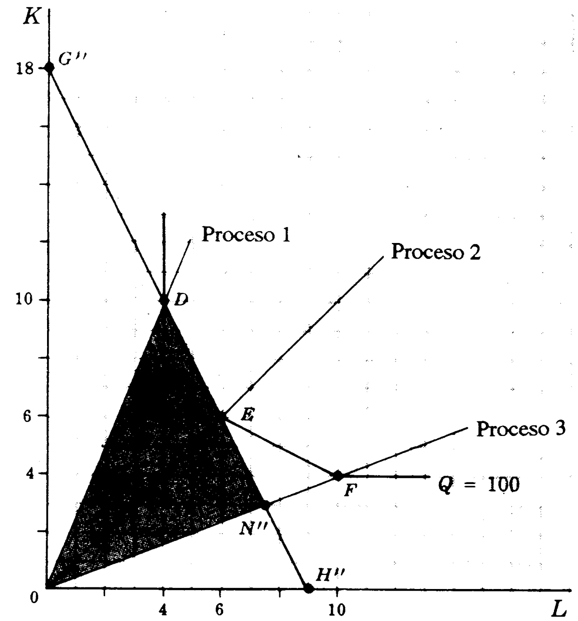

Figura 8-9

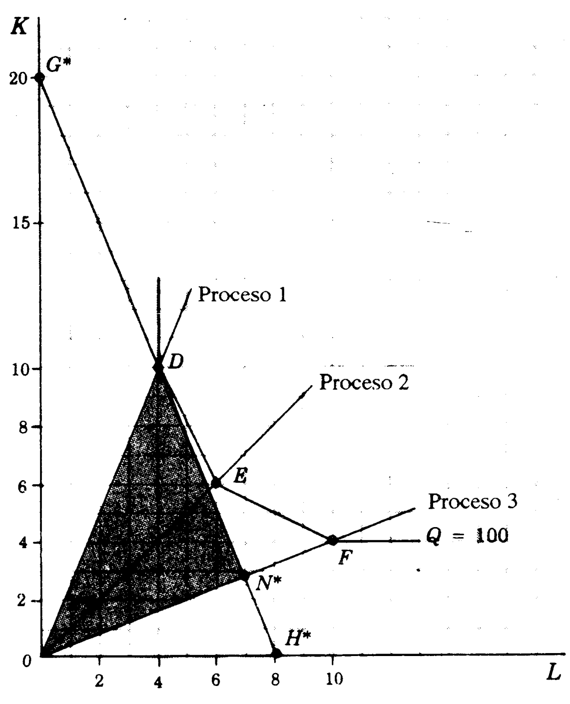

Figura 8-10

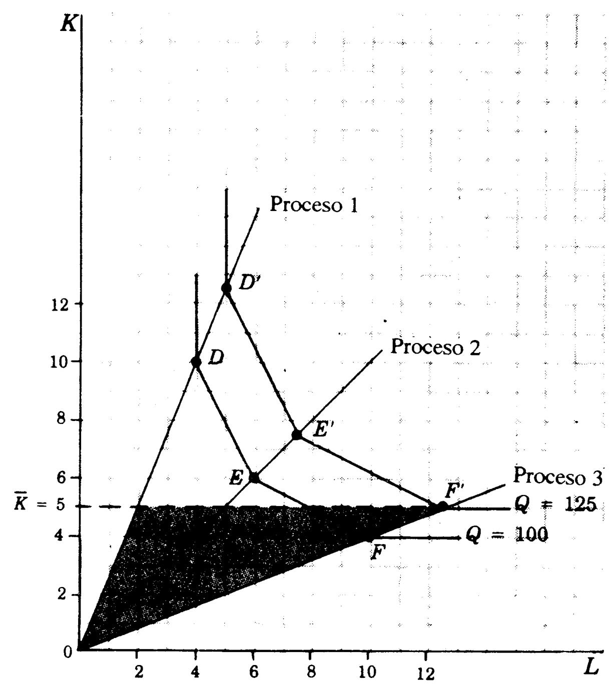

Figura 8-11

b) La restricción o línea de isocosto es G^*H^* en la figura 8-10. La región de soluciones factibles es ODN^*. La solución óptima está en el punto D sobre la línea delgada del proceso 1. En este caso, la reducción en el precio de r fue lo bastante grande para desplazar la producción exclusivamente al proceso 1 (el proceso con mayor utilización de K disponible).

8.10 Dibuje una figura que muestre la región de soluciones factibles y la producción máxima que puede obtener la empresa de la figura 8-2 si no tiene restricciones de costos pero se enfrenta a una limitación en la cantidad de insumos de *a)* $\bar{K} = 5$; *b)* $\bar{L} = 8$.

a) En la figura 8-11, la región de soluciones factibles la determina el área sombreada por debajo de la línea horizontal discontinua en $\bar{K} = 5$. $Q = 125$ (con el proceso 3) es la producción máxima que puede obtener la empresa con $\bar{K} = 5$.

b) En la figura 8-12 la región de soluciones factibles la determina el área sombreada a la izquierda de la línea vertical discontinua en $\bar{L} = 8$. $Q = 200$ (con el proceso 1) es la producción máxima que puede obtener la empresa con $\bar{L} = 8$.

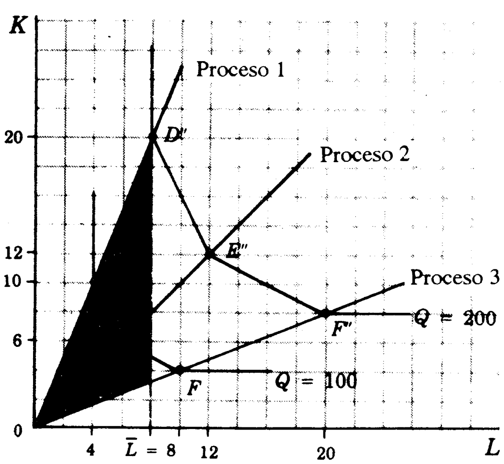

Figura 8-12

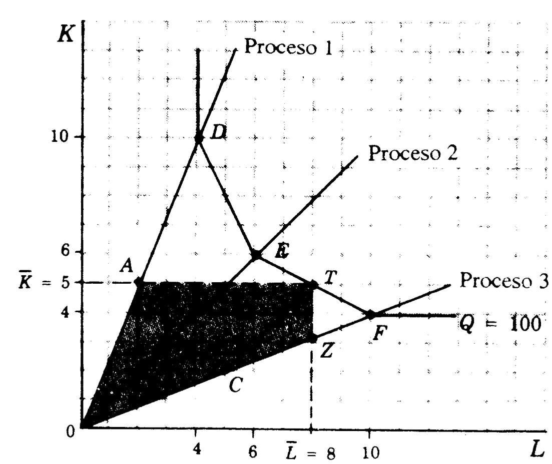

Figura 8-13

8.11 Si la empresa de la figura 8-2 no tiene restricciones de costos pero no puede utilizar más de $\bar{K} = 5$ y $\bar{L} = 8$, dibuje una figura que muestre la región de soluciones factibles, la producción máxima que puede obtener la empresa y cómo puede la empresa lograr esta producción.

En la figura 8-13, la región de soluciones factibles es el área sombreada $OATZ$. La solución óptima está en el punto L sobre la isocuanta para $Q = 100$. Se puede llegar al punto L produciendo $50Q$ (determinado por OC) con el proceso 3 y $50Q$ (determinado por $CT = OB$) con el proceso 2. Observe que cuando la empresa se enfrentó sólo a la restricción del costo o a la limitación de cantidad del uso de sólo un insumo, no requirió más de un proceso para llegar a la producción máxima. Cuando se enfrenta a la limitación de cantidad de ambos insumos no requiere más de dos procesos. (En la fig. 8-13 la empresa requeriría un proceso sólo si T hubiera coincidido con el punto E o F.) En el mundo real, las empresas con frecuencia tienen restricciones a corto plazo por el tamaño de la planta, la capacidad de la maquinaria, o el número de empleados calificados, por lo que los problemas que se estudian aquí son al mismo tiempo realistas e importantes.

PROGRAMACIÓN LINEAL CON MÁS DE DOS RESTRICCIONES

8.12 Se supone que una empresa produce las mercancías X y Y con los insumos *A, B, C* y *D*. Cada unidad de X requiere 1*A*, 1*B* y 1*D*. Cada unidad de Y requiere 2*A*, 1*B* y 1*C*. La empresa no puede utilizar más de 14*A*, 11*B* 5*C* y 10*D*. *a*) Exprese las restricciones del problema en forma de desigualdades. *b*) Trate cada restricción de desigualdad con una ecuación y despeje Y en términos de X (o X si Y = 0). *c*) Presente en forma gráfica todas las restricciones y defina la región de soluciones factibles.

a) Las restricciones del problema son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Restricción } A: & 1X + 2Y \leq 14 \\ \text{Restricción } B: & 1X + 1Y \leq 11 \\ \text{Restricción } C: & 1Y \leq 5 \\ \text{Restricción } D: & 1X \leq 10 \end{array}\right\} \text{restricciones técnicas}$$

$$\text{Restricciones de no negatividad:} \quad X, Y \geq 0$$

b) Al tratar cada restricción técnica como una ecuación y despejando, se obtiene

De la restricción *A*: $Y = 7 - \frac{1}{2}X$

De la restricción *B*: $Y = 11 - 1X$

De la restricción *C*: $Y = 5$

De la restricción *D*: $X = 10$

De la restricción de no negatividad: $X = 0$ (el eje Y); $Y = 0$ (el eje X).

c) La región de soluciones factibles es el área sombreada *OFGHJN* de la figura 8-14. Todos los puntos sobre o dentro de la región de soluciones factibles satisfacen en forma simultánea todas las restricciones o desigualdades.

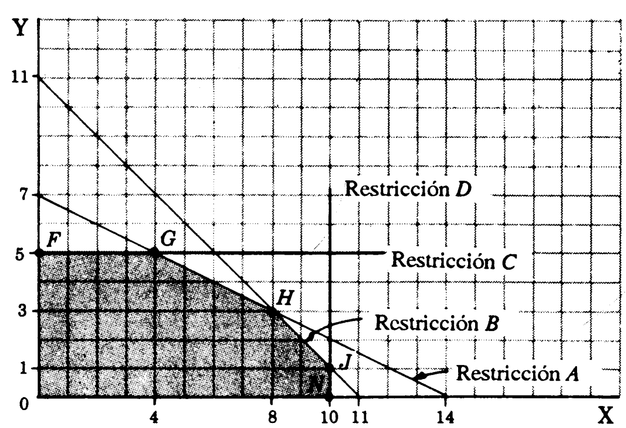

Figura 8-14

8.13 Si la empresa del problema 8.12 obtiene una ganancia (ingreso neto) de \$3 en cada unidad de X que vende y de \$4 en cada unidad de Y, *a*) defina la función objetivo de la empresa y despeje Y. *b*) Grafique las líneas de isoutilidad sobre la región de soluciones factibles y determine la solución óptima. *c*) Determine las ganancias totales de la empresa en el punto de maximización de las ganancias y en todas las demás esquinas de la región de soluciones factibles.

a)

$$\pi = 3X + 4Y$$

$$Y = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}X$$

b) La figura 8-15 muestra tres líneas de isoganancia (discontinuas) sobre la región de soluciones factibles. La empresa maximiza las ganancias en el punto *H* (8X, 3Y), donde la región de las soluciones factibles alcanza la línea de isoganancia más alta. Observe que en el punto *H* sólo son obligatorias las restricciones *A* y *B*.

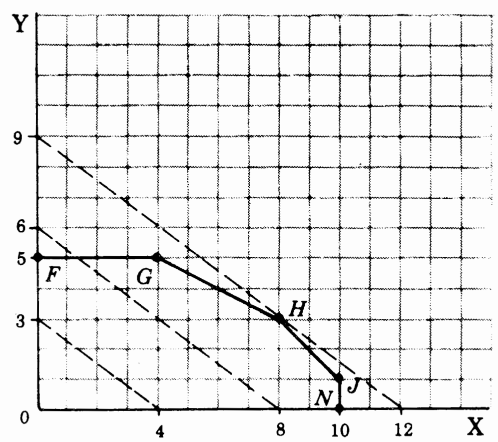

Figura 8-15

c) La ganancia (máxima) de la empresa en el punto *H* (8X, 3Y) es π = (\$3)(8) + (\$4)(3) = \$36.
En el punto *J* (10X, 1Y), π = (\$3)(10) + (\$4)(1) = \$34.
En el punto *N* (10Z, 0Y), π = (\$3)(10) + (\$4)(0) = \$30.
En el punto *O* (el origen), π = 0.
En el punto *F* (5Y, 0X), π = (\$4)(5) = \$20.
En el punto *G* (4X, 5Y), π = (\$4)(4) + (\$3)(5) = \$31.

8.14 Un criador de pollos quiere alimentar a los animales con los requerimientos mínimos diarios de los nutrientes básicos A, B y C. Los requerimientos diarios son 14*A*, 10*B* y 6*C*. El alimento X contiene 1*A*, 1*B* y 1*C*, mientras que el alimento Y contiene 2*A*, 1*B* y 0.5*C*. El precio de X = \$0.67 y el precio de Y = \$1.00. Determine la combinación del menor costo de X y Y que cumpla con todos los requerimientos mínimos.

1) La función objetivo que se debe minimizar es CT = 0.67X + 1Y y está sujeta a las restricciones

Restricción *A*:	$1X + 2Y \geqslant 14$
Restricción *B*:	$1X + 1Y \geqslant 10$
Restricción *C*:	$1X + 0.5Y \geqslant 6$
Restricción de no negatividad:	$X, Y \geqslant 0$

Observe que ahora las restricciones técnicas son $\geqslant$ puesto que tienen que cumplirse los requerimientos mínimos pero que pueden excederse.

2) Al tratar cada restricción técnica con una ecuación y despejando Y se obtiene

$$\text{De } A\text{: } Y = 7 - \frac{1}{2}X$$

$$\text{De } B\text{: } Y = 10 - 1X$$

$$\text{De } C\text{: } Y = 12 - 2X$$

En la sección A de la figura 8-16 se muestra cada restricción técnica mediante todos los puntos sobre o hacia la derecha de la línea de restricción. La región de soluciones factibles es el área sombreada a la derecha y por encima de *DFGH*. Esto satisface en forma simultánea todas las restricciones técnicas y de no negatividad.

3) Al despejar la función objetivo por Y se obtiene

$$Y = TC - \frac{2}{3}X$$

Esto da la serie de líneas de isocosto discontinuas (una para cada nivel de CT) con pendiente de -2/3 (la razón del costo) graficadas en la sección B de la figura 8-16.

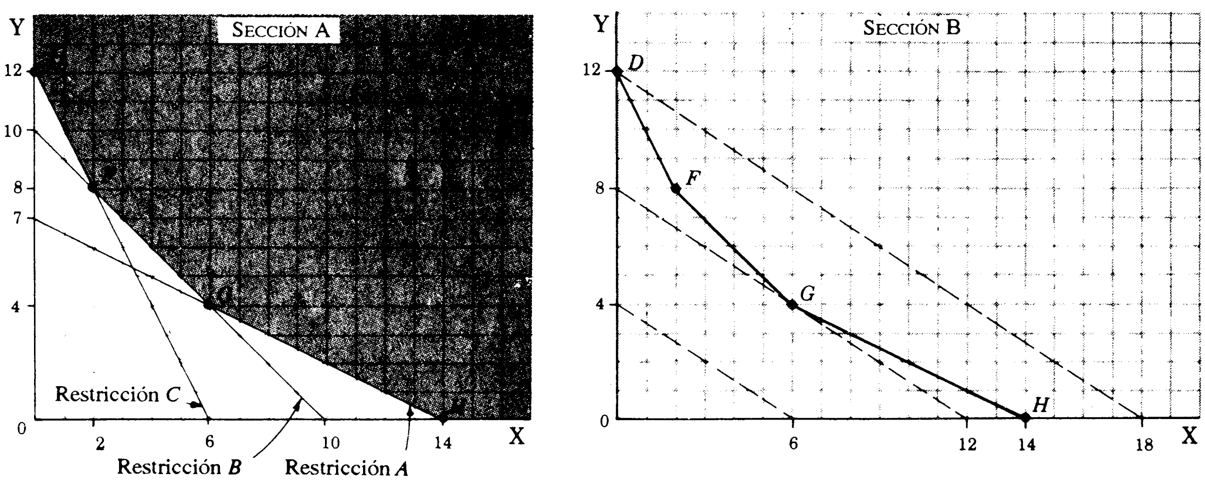

Figura 8-16

4) La línea de isocosto que toca el punto *G* (6X, 4Y) de la región de soluciones factibles es la línea de isocosto más baja que permite el cumplimiento simultáneo de todos los requerimientos mínimos. Por lo tanto, los costos totales se minimizan en CT = (\$0.67)(6) + (\$1)(4) = \$8.02. (El estudiante debe verificar que todas las otras esquinas de la región de soluciones factibles incluyen costos totales más altos.) Observe que si P_X asciende a P_X = \$1.00, el isocosto coincidiría con la región *GF* de la región de soluciones factibles, por lo que la combinación del menor costo se encontraría en cualquier punto sobre la sección *GF* y el CT = \$10. Un aumento adicional en P_X haría que el punto *F* fuera la solución del menor costo.

EL PROBLEMA DUAL Y LOS PRECIOS SOMBRA

8.15 Con base en los problemas 8.12 y 8.13 determine el precio sombra de *a*) el insumo *A*, *b*) el insumo *B*, *c*) los insumos *C* y *D*. *d*) ¿Debe la empresa tratar de ampliar la utilización de los insumos *A* y *B* si el costo adicional de contratar una unidad adicional de *A* y *B* fuera de \$0.90 y \$1.50, respectivamente?

a) A partir del punto *H* de maximización de la ganancia en la figura 8-14, donde $\pi = \$36$, se aumenta el insumo *A* en una unidad, por lo que la restricción *A* se convierte en $1X + 2Y \leq 15$. La nueva región de soluciones factibles es el área sombreada *OFG'H'JN* en la sección A de la figura 8-17. La sección B muestra que ahora las ganancias totales están maximizadas en el punto *H'* (7X, 4Y) donde $\pi = (\$3)(7) + (\$4)(4) = \$37$. Por lo tanto, el precio sombra del insumo *A* es $1.

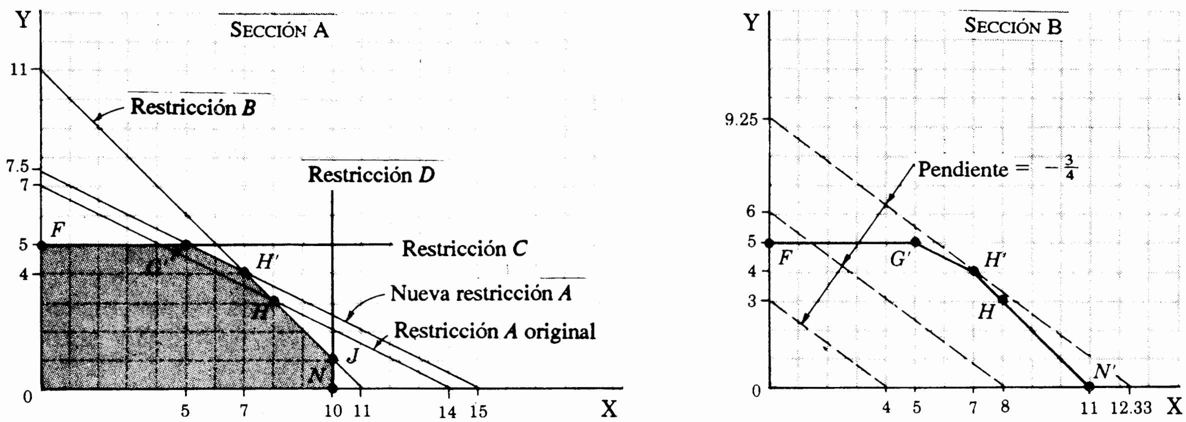

Figura 8-17

b) El aumento del insumo *B* en una unidad hace que la restricción *B* $1X + 1Y \leq 12$ y la región de soluciones factibles *OFGJ'N* en la sección A de la figura 8-18. Ahora las ganancias totales se maximizan en el punto *J'* (10X, 2Y) donde $\pi = \$38$, determinando un precio sombra para el insumo *B* de $2. Observe que en el punto *J'* los insumos *A* y *D* se vuelven obligatorios.

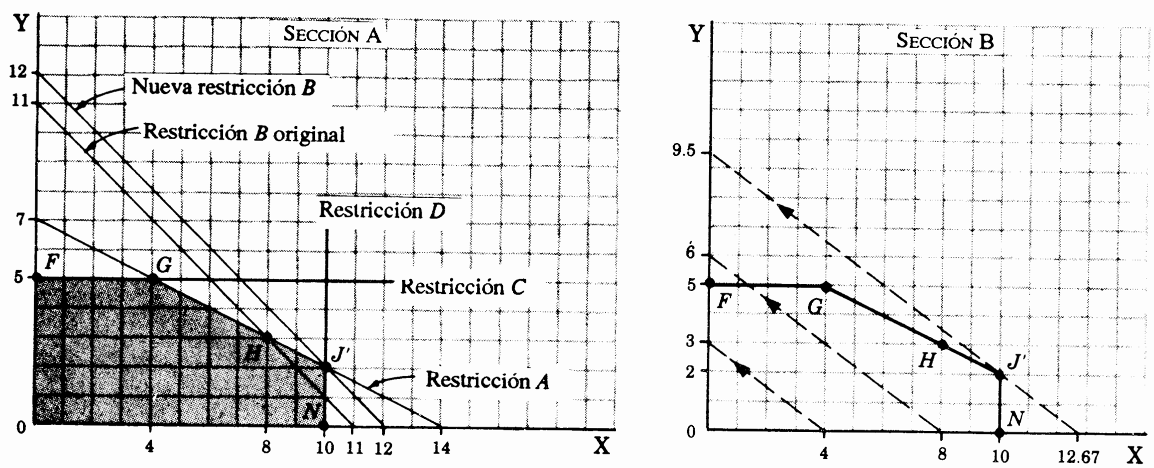

Figura 8-18

c) Puesto que en el punto *H* los insumos *C* y *D* no se emplean por completo, su aumento no produciría cambios en la ganancia total de la empresa, por lo que su precio sombra es de cero.

d) Puesto que los precios sombra de los insumos *A* y *B* excederían el costo adicional de contratarlos, la ganancia total de la empresa o el ingreso neto aumentarían al utilizar más de ambos insumos.

8.16 Con base en el problema 8.14 determine el precio sombra de *a*) el insumo *A*, *b*) el insumo *B* y *c*) el insumo *C*.

a) La *reducción* del insumo *A* en una unidad desplaza en forma descendente su línea de restricción, por lo que la nueva región de soluciones factibles la determina el área sombreada que aparece arriba de *DFG'H'* en la figura 8-19. La línea de isocosto más baja con pendiente -2/3 (que no aparece en la figura) toca la región de soluciones factibles en el punto *G'* (7X, 3Y) dando como resultado CT = (\$0.67) (7) + (\$1)(3) = \$7.69. Esto es menor que el original CT = \$8.02, por lo que se obtiene un precio sombra para el insumo *A* de \$0.25.

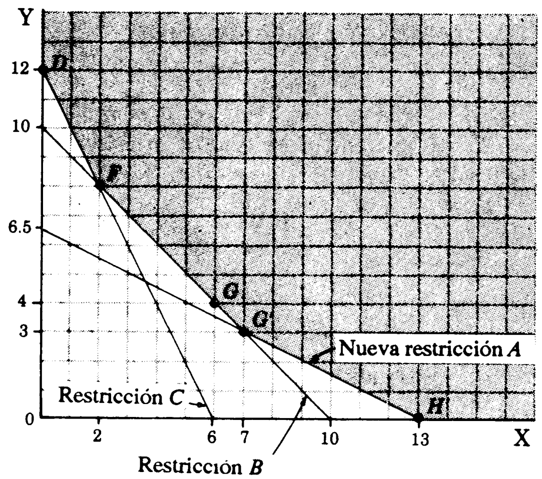

Figura 8-19

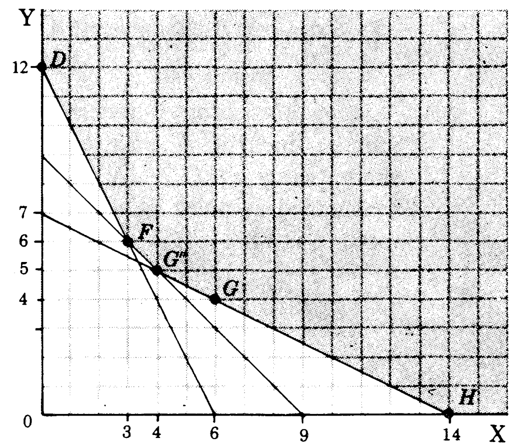

Figura 8-20

b) La reducción del insumo *B* en una unidad determina el área sombreada por encima de *DFG''H* como la nueva región de soluciones factibles en la figura 8-20 con el punto *G''* (4X, 5Y) con el nuevo CT = \$7.68 más bajo. El precio sombra del insumo *B* es por lo tanto \$0.34.

c) Puesto que el insumo *C* es una variable poco activa, la reducción de su uso en una unidad no ocasiona cambios en el CT, por lo que su precio sombra es cero.

***8.17** Si $Q = 100KT$, $w = \$30$ y $r = \$40$. *a*) Determine la cantidad de trabajo y capital que debe utilizar la empresa con el fin de maximizar la producción. *b*) ¿Cuál es este nivel de producción?

a)
$$Z = 100L^{0.5}K^{0.5} + \lambda(\$1000 - \$30L - \$40K)$$
$$\frac{\partial Z}{\partial L} = 50L^{-0.5}K^{0.5} - \lambda\$30 = 0$$
$$\frac{\partial Z}{\partial K} = 50^{0.5}K^{-0.5} - \lambda\$40 = 0$$

Al dividir la segunda derivada parcial entre la primera se obtiene

$$\frac{K}{L} = \frac{3}{4} \quad \text{puesto que} \quad K = \frac{3}{4}L$$

Al sustituir después este valor de *K* en la restricción del costo o del gasto de la empresa se obtiene

$$\$1000 = \$30L + \$40 \times \frac{3}{4}L$$
$$\$1000 = \$60L$$

por lo que $L = 16.67$ unidades.

Al sustituir este valor de L en $K = \frac{3}{4} L$, se tiene

$$K = \frac{3}{4} \times 16.67 = 12.50$$

b) Al ser $L = 16.67$ y $K = 12.50$, la producción de la empresa es

$$Q = 100\sqrt{16.67}\sqrt{12.50} = 1444$$

Es decir, la producción máxima que puede obtener la empresa es de 1444 unidades de la mercancía.

Examen parcial

1. Como resultado de la crisis de energéticos de 1979-1980, los encargados de la política gubernamental calcularon que los consumidores estadounidenses tendrían que reducir su consumo de gasolina en casi 30%. *a*) ¿Qué medidas se podrían tomar para reducir el consumo de gasolina? ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada medida? *b*) Si para 1982 la cantidad de gasolina consumida por cada vehículo disminuyó en un 8% debido al aumento en precios del 40%, ¿cuál es una medida aproximada del coeficiente de elasticidad precio de la demanda de gasolina? Para alcanzar la reducción necesaria del 30% en el consumo, ¿qué aumento en el precio de la gasolina requeriría su estimado de elasticidad precio de la demanda? *c*) ¿Cómo intentó solucionar este problema la administración en Washington?

2. A partir del análisis de la curva de indiferencia, derive una curva de la demanda elástica de la mercancía X para una reducción en P_X manteniendo constantes el precio de Y, los gustos de los consumidores y el ingreso monetario del consumidor.

3. *a*) Con el siguiente PT_L, determine el PP_L y PM_L.

L	1	2	3	4	5	6	7
PT	2	6	12	16	18	18	16

b) Sobre el mismo conjunto de ejes, grafique los programas de PT_L, PP_L y PM_L e indique en la figura las etapas de la producción para L y K; ¿dónde comienza a operar la ley de los rendimientos decrecientes para L? ¿Dónde producirá un productor racional? ¿Por qué?; *c*) Si tanto L como K son variables y OT = \$12, P_L = \$1 y P_K = \$2, grafique el isocosto. ¿Cuál es su pendiente? En la misma gráfica dibuje una isocuanta que muestre el punto de equilibrio donde el productor utilice $6L$ y $3K$. Exprese la condición para el equilibrio del productor en términos de $TMST_{LK}$, PM_L, PM_K, P_L y P_K.

4. *a*) Con el siguiente programa CVT y con CFT = \$12, *a*) determine CT, CFP, CVP, CP y CM para los diversos niveles de producción.

Q	1	2	3	4	5	6
CVT	\$6	8	9	10.5	14	21

b) Sobre la misma gráfica trace los programas CVP, CP y CM de la parte *a*). ¿Cuál es la relación entre CVP, CP y CM? *c*) Dibuje una figura que muestre con claridad la relación entre los típicos CPC, CMC, CPL, CML.

***5.** Vuelva a dibujar la figura del problema 2 y muestre en ella los efectos, sustitución e ingreso de Hicks y Slutsky y derive las curvas de la demanda de Hicks y de Slutsky. ¿Cuál es una mejor medida de los efectos de sustitución e ingreso? ¿Por qué?

***6.** Para una función de producción Cobb-Douglas, *a*) escriba su fórmula en términos de L y K, α y β, y señale el significado económico de cada componente de la fórmula. *b*) Dibuje las curvas típicas PT_L, PP_L y PM_L. ¿A qué etapa de la producción se refieren? *c)* Si $\alpha = 1.5$ y $\beta = 0.5$, grafique la ruta de expansión con las isocuantas $Q = 100$ y $Q = 400$. ¿Cuál es el valor de (*e* sust.)$_{LK}$?

*Opcional

Respuestas

1. *a*) Una forma de reducir el consumo de gasolina es mediante el racionamiento. Esta política reduciría el consumo de gasolina en el 30% que se requiere pero también propiciaría el mercado negro y una enorme burocracia para obligar a cumplir el racionamiento. Por lo anterior, no se implantó el racionamiento sino que se dejó en reserva como una política de último recurso. Otra forma de reducir el consumo de gasolina es aumentar su precio. La ventaja de esta política es que opera a través del mecanismo de los precios en lugar de reemplazarlo (como es el caso del racionamiento). La desventaja es que debido a que el coeficiente de elasticidad precio de la demanda es muy bajo, se necesitará de un enorme aumento de precios para alcanzar la rebaja necesaria del 30% en la cantidad consumida de gasolina.

b) Cuando la cantidad demandada de gasolina por vehículo disminuyó 8% ante el aumento en precios del 40%, el coeficiente de la elasticidad precio de la demanda de gasolina fue en forma aproximada

$$e = -\frac{\%\Delta Q}{\%\Delta P} = -\frac{(-8\%)}{(+40\%)} = 0.2$$

Ésta es una medida muy aproximada debido a que supone que todo lo demás permaneció constante, lo que desde luego no fue el caso. Para lograr la reducción del 30% en el consumo de la gasolina, el aumento en precios requerido habría tenido que ser aproximadamente

$$\%\Delta P = \frac{\%\Delta Q}{e} = \frac{30\%}{0.2} = 150\%$$

c) La administración en Washington, al mismo tiempo que pugnaba por la conservación, creía que la desregulación y el fuerte aumento resultante en los precios de la gasolina estimularía nuevas exploraciones que conducirían a un gran aumento en la extracción nacional de petróleo. Por lo tanto, la administración hizo énfasis en el lado de la oferta para intentar resolver este problema, mientras que los esfuerzos anteriores se apoyaron en su mayor parte en el lado de la demanda.

2. En la sección superior de la figura M-1, el punto A sobre la línea 1 del presupuesto y la curva de indiferencia I es el punto original de equilibrio del consumidor. Cuando desciende P_x, el equilibrio está en el punto B, donde la curva de indiferencia II es tangente a la línea de presupuesto 2. El desplazamiento del punto A al punto B (Q_1 Q_4) es la totalidad de los efectos sustitución e ingreso de la disminución de P_x y da d_x (la curva de la demanda

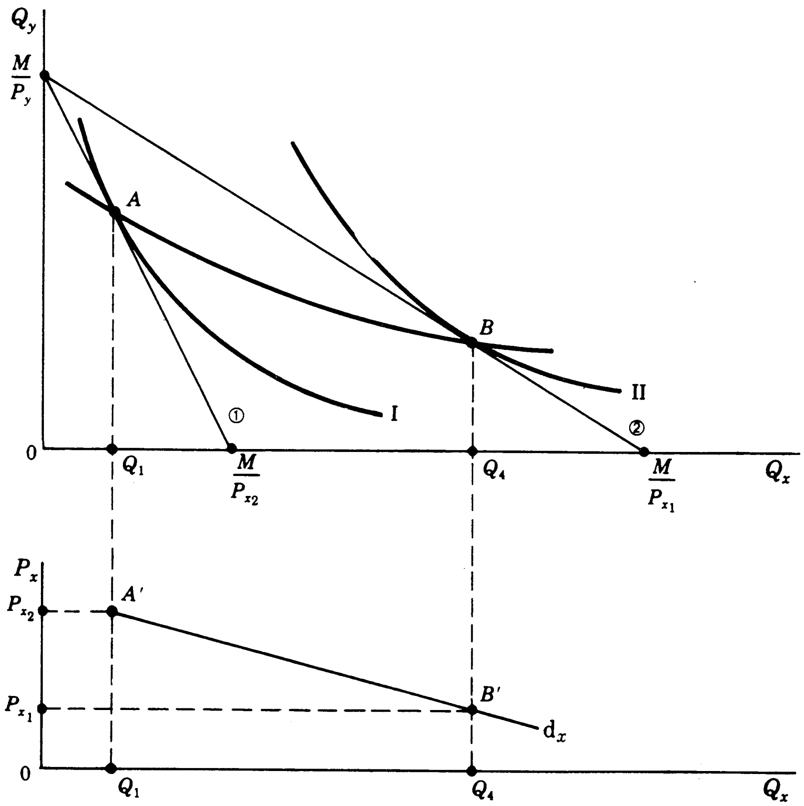

Figura M-1

normal) en la sección inferior. Debido a que la pendiente de la curva precio consumo es negativa entre los puntos A y B, d_x es elástica respecto al precio.

3. *a*)

L	PT_L	PP_L	PM_L
0	0	0	—
1	2	2	2
2	6	3	4
3	12	4	6
4	16	4	4
5	18	3.6	2
6	18	3	0
7	16	2.29	−2

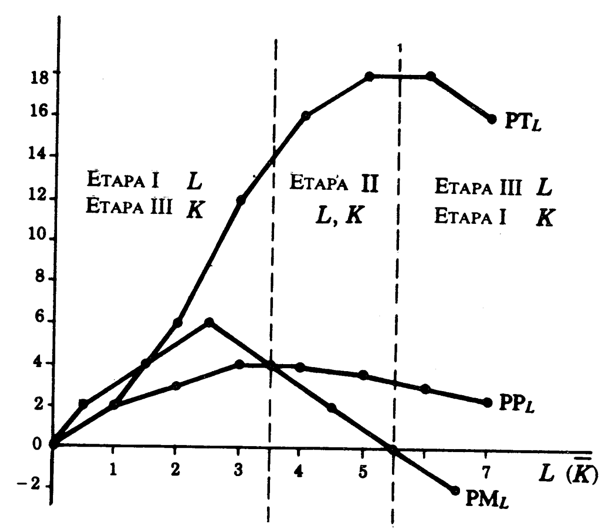

Figura M-2

b) La ley de los rendimientos decrecientes para L comienza a operar donde PM_L empieza a descender. Un productor racional producirá en la etapa II para L y K, donde el PP y PM de L y de K sean ambos positivos pero estén disminuyendo. El productor no producirá en la etapa I para L porque PM_K es negativo. En forma similar, el productor no producirá en la etapa III para L porque PM_L es negativo. Véase la figura M-2.

c) La pendiente de la isocuanta es

$$(-)\frac{TO/P_K}{TO/P_L} = (-)\frac{\cancel{TO}}{P_K}\cdot\frac{P_L}{\cancel{TO}} = (-)\frac{P_L}{P_K} = (-)\frac{1}{2}$$

La condición para el equilibrio del productor es .

$$(+)TMST_{LK} = (-)\frac{PM_L}{PM_K} = (-)\frac{P_L}{P_K}$$

Es decir, en equilibrio, la pendiente de la isocuanta es igual a la pendiente del isocosto.

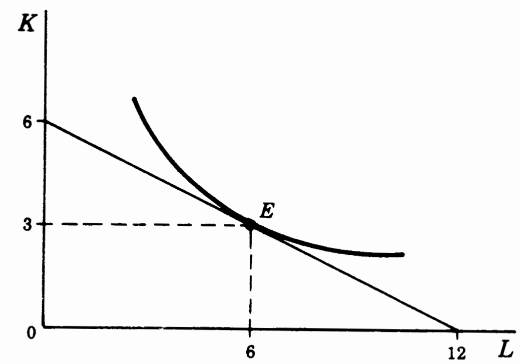

Figura M-3

4. *a*)

Q	CFT (\$)	CVT (\$)	CT (\$)	CFP (\$)	CVP (\$)	CP (\$)	CM (\$)
0	12	0	12	—	—	—	—
1	12	6	18	12	6	18	6
2	12	8	20	6	4	10	2
3	12	9	21	4	3	7	1
4	12	10	22	3	2.50	5.50	1
5	12	14	26	2.40	2.80	5.20	4
6	12	21	33	2	3.50	5.50	7

b) CP = CVP + CFP. Puesto que CFP declina en forma continua a medida que se amplía la producción, la curva CP llega a su punto más bajo a un nivel de producción más alto que la curva CVP. La curva CM cruza las curvas CVP y CP en su punto más bajo. La razón de esto es que para que desciendan CVP y CP, el CM tiene que ser más bajo y para que asciendan CVP y CP, el CM tiene que ser más alto. Por lo tanto, CM = CVP y CM = CP en los CVP y CP más bajos. Véase la figura M-4.

c) Véase la figura M-5.

***5.** De acuerdo con Hicks, en la sección superior de la figura M-6, se mantiene constante el ingreso real desplazando en forma descendente la línea del presupuesto 2 y paralela a sí misma (línea del presupuesto 3) hasta que sea tangente a la curva de indiferencia original I en el punto C. El movimiento de A a C (Q_1 Q_2) es el efecto sustitución de Hicks que se muestra en la curva de la demanda de Hicks en la sección inferior. Entonces Q_2 Q_4 es el efecto ingresos de Hicks. En la sección superior se mantiene constante el ingreso real de acuerdo con Slutsky rotando la línea del presupuesto 1 por el punto A hasta que sea paralela a la línea del presupuesto 2. Esto determina la línea de presupuesto 4 que es tangente a la curva de indiferencia III en el punto D. El movimiento de A a D (Q_1 Q_3) es el efecto sustitución de Slutsky que se muestra sobre la curva de la demanda de Slutsky en la sección

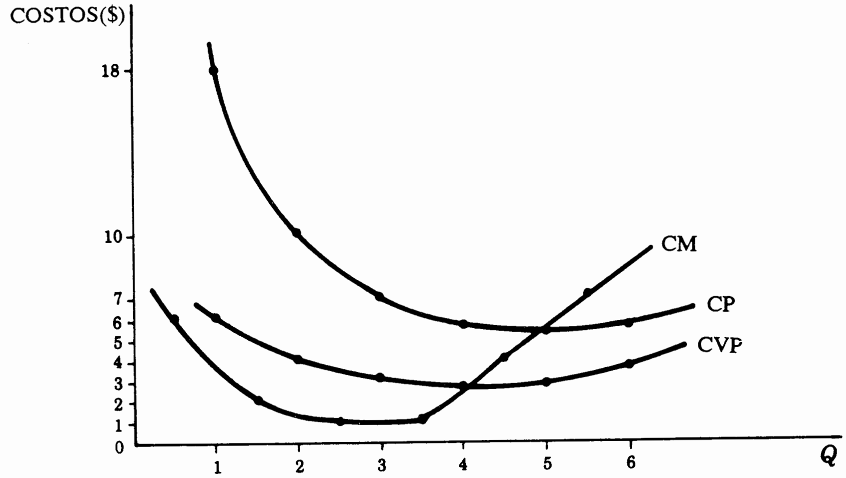

Figura M-4

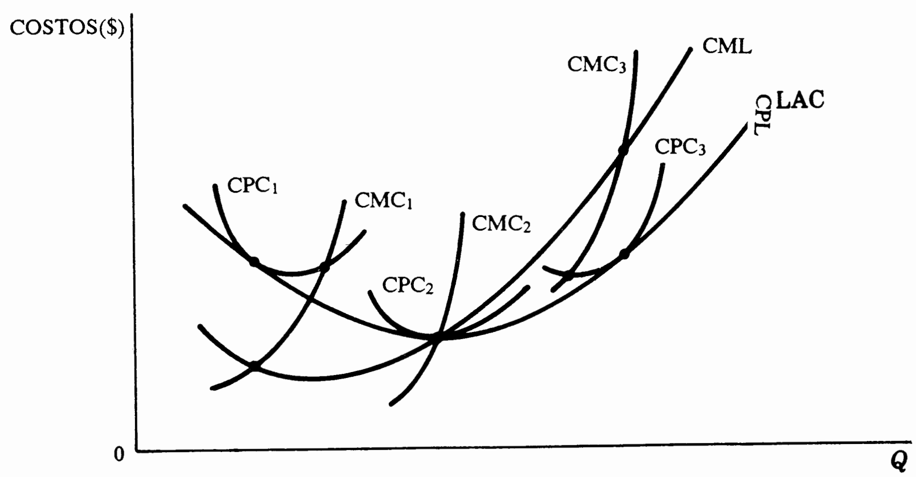

Figura M-5

inferior. Por lo tanto, $Q_3 Q_4$ es el efecto ingreso de Slutsky. El método de Slutsky es una medida mejor del efecto sustitución debido a que, al igual que con el efecto ingreso, coloca al consumidor sobre una curva de indiferencia más alta y porque se puede obtener de los precios y cantidades observados sin necesidad de conocer la forma exacta de la curva de indiferencia.

***6.** *a*) $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$, donde Q = producción y L y K = insumos. A, α y β son parámetros positivos determinados en cada caso por la información. Mientras mayor sea el valor de A más avanzada será la tecnología. α y β miden la elasticidad producción de L y K, respectivamente. Hay rendimientos a escala constantes, crecientes, o decrecientes en la medida en que $\alpha + \beta = 1$, $\alpha + \beta > 1$, o $\alpha + \beta < 1$, respectivamente.

b) Véase la figura M-7. Los PT_L, PP_L y PM_L se refieren sólo a la etapa II de producción (es decir, la función de producción Cobb-Douglas no está definida para las etapas I o III de L y K).

c) En la figura M-8, al duplicar los insumos de L y K se cuadruplica la producción. e sust.$_{LK} = 1$ para una función Cobb-Douglas.

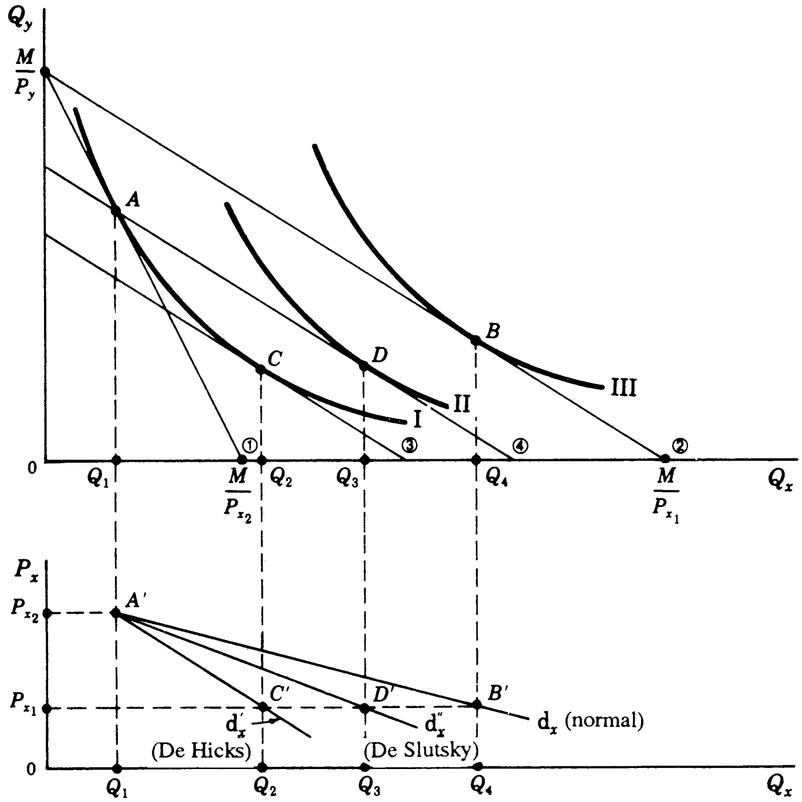

Figura M-6

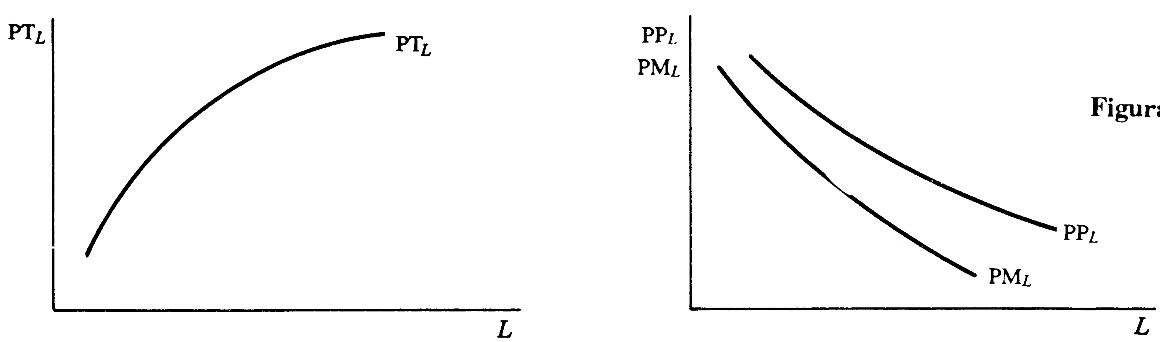

Figura M-7

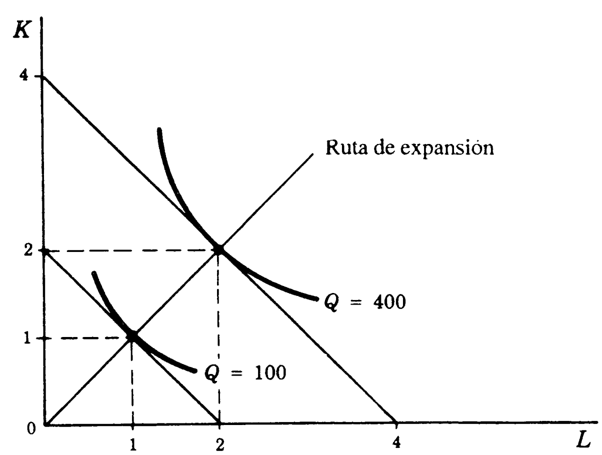

Figura M-8