Unidad 6

- Teoría de la producción

“Un productor está en equilibrio cuando maximiza la producción para el desembolso total determinado”.

Capítulo 6

Teoría de la producción

6.1 PRODUCCIÓN CON UN INSUMO VARIABLE: PRODUCTO TOTAL, PROMEDIO Y MARGINAL

La *función de producción* para cualquier artículo es una ecuación, tabla o gráfica, que indica la cantidad (máxima) de dicho artículo que puede producirse por unidad de tiempo para cada conjunto de insumos alternos, cuando se utilizan las mejores técnicas de producción disponibles.

Se obtiene una función sencilla de producción agrícola utilizando diversas cantidades alternas de trabajo por unidad de tiempo para cultivar una extensión fija de tierra y registrando las producciones alternas resultantes del bien por unidad de tiempo. [A las situaciones como ésta, donde por lo menos un factor de la producción o insumo es fijo, se les denomina de *corto plazo*]. El *producto promedio del trabajo* (PP_L) se define como el producto total (PT) dividido entre el número de unidades de trabajo que se utilizan. El *producto marginal del trabajo* (PM_L) lo determina el cambio en PT debido a un cambio de una unidad en la cantidad de mano de obra utilizada.

EJEMPLO 1. Las tres primeras columnas de la tabla 6.1 muestran una función hipotética de producción a corto plazo para trigo. La tierra se mide en hectáreas, la mano de obra en años-hombre y el producto total (PT) en toneladas por año. Se supone que todas las unidades de tierra, trabajo o trigo, son homogéneas o de la misma calidad. Las cifras del producto promedio del trabajo (PP_L) de la columna 4) se obtienen dividiendo cada cantidad de la columna 3) entre la cantidad correspondiente de la columna 2). Las cifras del producto marginal del trabajo (PM_L) de la columna 5) se obtienen determinando las diferencias entre las cantidades consecutivas de la columna 3).

Tabla 6.1

(1) Tierra	(2) Trabajo	(3) PT	(4) PP_L	(5) PM_L
1	0	0	0	. .
1	1	3	3	3
1	2	8	4	5
1	3	12	4	4
1	4	15	$3\frac{3}{4}$	3
1	5	17	$3\frac{2}{5}$	2
1	6	17	$2\frac{5}{6}$	0
1	7	16	$2\frac{2}{7}$	−1
1	8	13	$1\frac{5}{8}$	−3

Las columnas PT, PP_L y PM_L de la tabla 6.1 se grafican en la figura 6.1. Puesto que PM_L se ha definido como el *cambio* en PT debido a un cambio de una unidad en la cantidad de mano de obra utilizada, cada valor de PM_L se ha registrado en la sección B *en el punto intermedio* de las cantidades de trabajo utilizado.

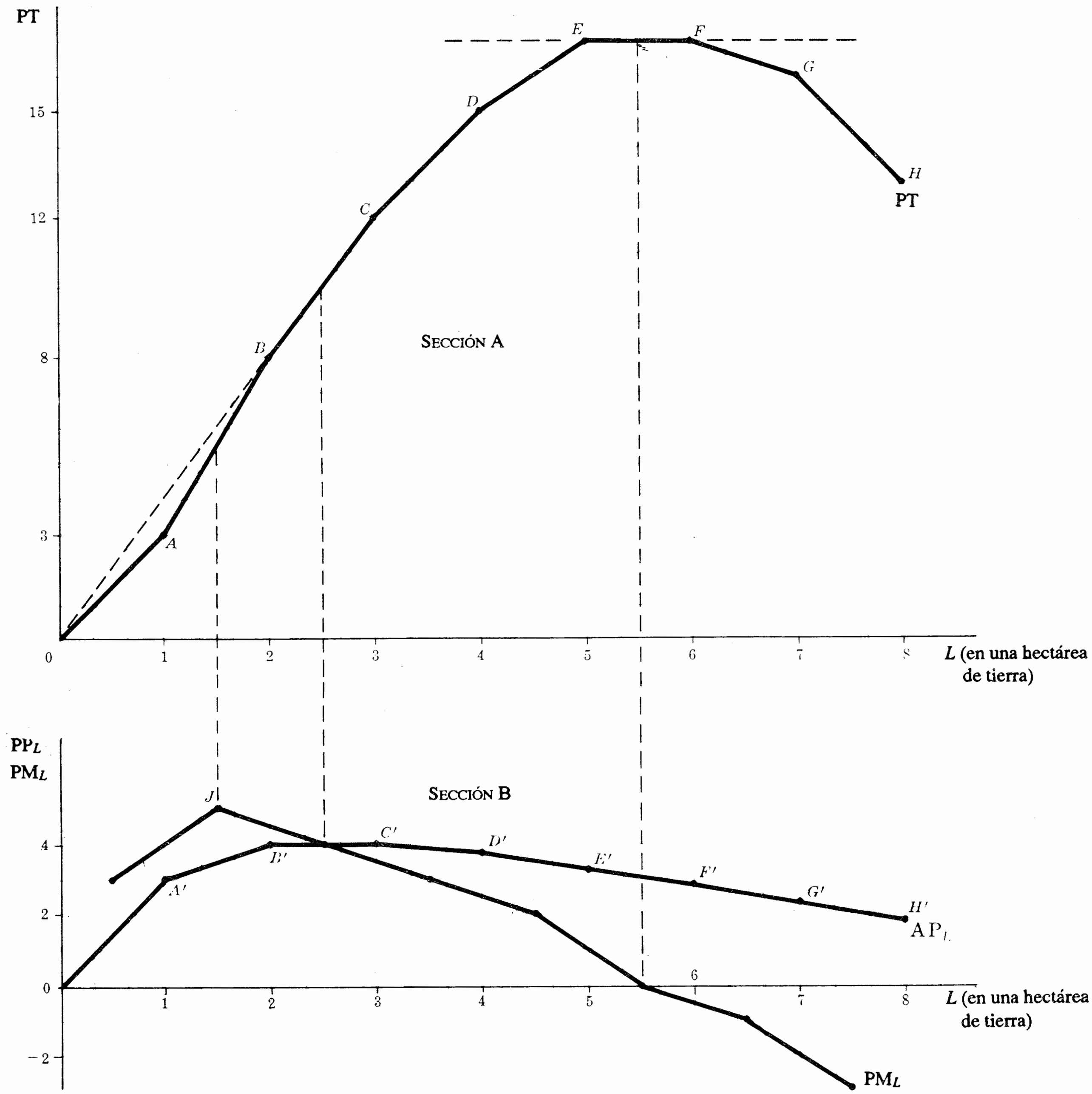

Fig. 6-1

6.2 LAS FORMAS DE LAS CURVAS DEL PRODUCTO PROMEDIO Y MARGINAL

Las formas de las curvas PP_L y PM_L se determinan por la forma de la curva PT correspondiente. Mediante PP_L en cualquier punto sobre la curva PT_L se determina la pendiente de la línea recta que va desde el origen hasta ese punto sobre la curva PT. Por lo general, la curva PP_L primero crece, llega a un punto máximo y después decrece, pero sigue siendo positiva mientras PT sea positivo.

PM_L entre dos puntos sobre la curva PT es igual a la pendiente de esta curva *entre* dichos puntos. La curva PM_L también asciende al principio, llega a un punto máximo (antes de que PP_L alcance su máximo) y después desciende. PM_L se convierte en cero cuando PT se encuentra en el punto máximo y es negativo cuando PT comienza a decrecer. La parte descendente de la curva PM_L demuestra *la ley de los rendimientos decrecientes.*

EJEMPLO 2. En la figura 6-1, PP_L en el punto A sobre la curva PT es igual a la pendiente de OA. Ésta es igual a 3 y se registra como el punto A′ en la sección B. En forma similar, PP_L en el punto B sobre la curva PT es igual a la pendiente de la línea punteada OB. Ésta es igual a 4 y se registra como el punto B′ en la sección B. En el punto C, PP_L es nuevamente 4. Éste es el PP_L más alto. Después del punto C, PP_L desciende pero sigue siendo positivo mientras PT sea positivo.

PM_L entre el origen y el punto A sobre la curva es igual a la pendiente de OA. Esta pendiente es igual a 3 y se registra en el punto intermedio de 0 y 1, o sea $\frac{1}{2}$, en la sección B. En forma similar, PM_L entre A y B es igual a la pendiente de AB. Ésta es igual a 5 y se registra en $1\frac{1}{2}$ en la sección B. PM_L entre B y C es igual a la pendiente de BC. Ésta es 4 y es igual al PP_L más alto (la pendiente de OB y OC). Entre E y F, PT permanece sin cambio; por consiguiente, PM_L es cero. Después del punto F, PT comienza a decrecer y PM_L se vuelve negativo.

EJEMPLO 3. La curva PM_L alcanza un máximo antes que la curva PP_L (véase la Fig. 6-1). También, mientras PP_L está ascendiendo, PM_L se encuentra por encima de él; cuando PP_L está descendiendo PM_L está por debajo de él; cuando PP_L se encuentra en el punto máximo PM_L es igual a PP_L. Esto es así porque para que PP_L aumente, la *adición* a PT (PM_L) tiene que ser mayor que el PP_L *anterior*; para que PP_L descienda, la adición a PT (PM_L) tiene que ser menor que el promedio anterior; para que PP_L permanezca igual, la adición a PT (PM_L) tiene que ser igual al promedio anterior. La ley de los rendimientos decrecientes comienza a operar en el punto J de la sección B de la figura 6-1, es decir, cuando PM_L comienza a descender. Esto ocurre debido a que se utiliza "demasiado" trabajo para cultivar una hectárea de tierra. Si se utiliza un número mayor de trabajadores en una hectárea, éstos comenzarán a estorbarse entre sí hasta que finalmente PM_L llega a cero y después se vuelve negativo.

6.3 ETAPAS DE LA PRODUCCIÓN

Se puede utilizar la relación entre las curvas PP_L y PM_L para definir tres etapas de la producción para el trabajo. La etapa I va del origen al punto donde PP_L está en su máximo. La etapa II va del punto donde PP_L está en el punto máximo hasta el punto donde PM_L es cero. La etapa III abarca el intervalo en el que PM_L es negativo. El productor no operará en la etapa III, incluso con mano de obra gratuita, debido a que podría *aumentar* la producción total utilizando *menos* trabajo por hectárea de tierra. En forma similar, no operará en la etapa I porque, como se demuestra en los problemas 6.5-6.9, la etapa I para la mano de obra corresponde a la etapa III para la tierra (PM_{tierra} es negativo). Esto deja a la etapa II como la única etapa de la producción para el productor racional.

EJEMPLO 4. La figura 6-2, con algunas modificaciones, es la misma que la figura 6-1 y muestra las tres etapas de la producción para la mano de obra. Observe que en la etapa II, tanto PP_L como PM_L son positivos pero en declinación. Por lo tanto, el productor racional opera en el intervalo de los rendimientos decrecientes dentro de la etapa II. (La *simetría* en la etapas de la producción de la mano de obra y la tierra se examinará en los problemas 6.5 a 6.9.)

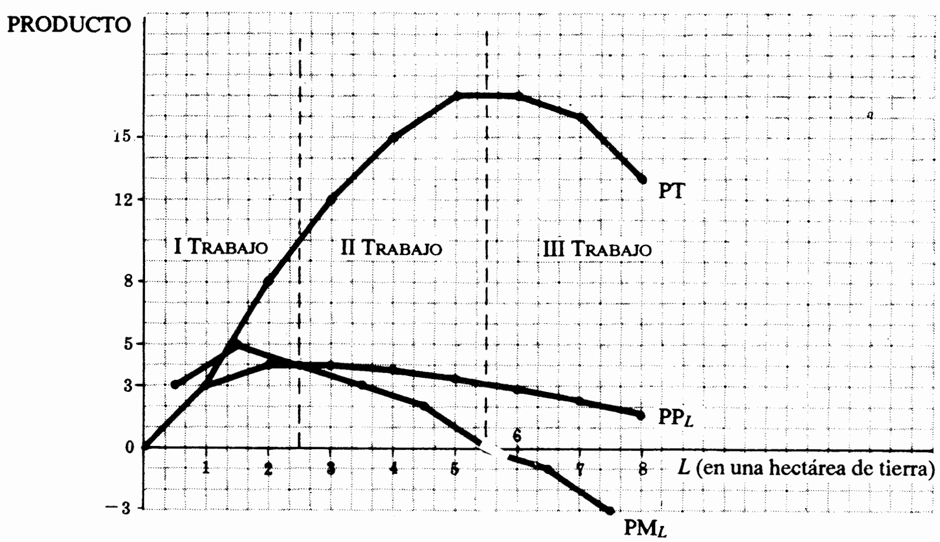

Fig. 6-2

6.4 LA PRODUCCIÓN CON DOS INSUMOS VARIABLES: ISOCUANTAS

Ahora se verá el caso en que la empresa sólo tiene dos factores de producción, trabajo y capital, ambos variables. Puesto que todos los factores son variables se está en una situación de *largo plazo.*

Una *isocuanta* muestra las diferentes combinaciones de trabajo (L) y capital (K) con las que una empresa puede obtener una cantidad específica de producción. Una isocuanta más alta indica una mayor cantidad de producción y una más baja una cantidad menor.

EJEMPLO 5. La tabla 6.2 proporciona puntos sobre tres isocuantas distintas.

Tabla 6.2

Isocuanta I		Isocuanta II		Isocuanta III	
L	K	L	K	L	K
2	11	4	13	6	15
1	8	3	10	5	12
2	5	4	7	6	9
3	3	5	5	7	7
4	2.3	6	4.2	8	6.2
5	1.8	7	3.5	9	5.5
6	1.6	8	3.2	10	5.3
7	1.8	9	3.5	11	5.5

Al graficar estos puntos sobre el mismo sistema de ejes y unirlos mediante curvas suaves se obtienen las tres isocuantas que se presentan en la figura 6-3. La empresa puede lograr la producción especificada por la isocuanta I al usar $8K$ y $1L$ (punto B) o utilizando $5K$ y $2L$ (punto C) o cualquier otra combinación de L y K sobre la isocuanta I. Las isocuantas (en contraste con la curvas de indiferencia) especifican medidas *cardinales* de producción. Por ejemplo, la isocuanta I podría referirse a 60 unidades de producción física; la isocuanta II a 100 unidades de producción, etc.

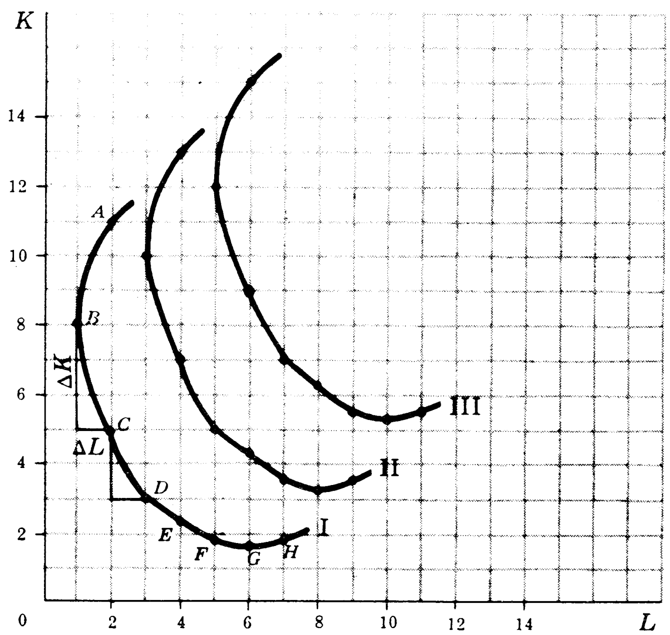

Fig. 6-3

6.5 LA TASA MARGINAL DE SUSTITUCIÓN TÉCNICA

La *tasa marginal de sustitución técnica* de L por K ($TMST_{LK}$) se refiere a la cantidad de K a la que puede renunciar una empresa al aumentar en una unidad la cantidad de L utilizada y permanecer aún sobre la misma isocuanta. $TMST_{LK}$ es también igual a MP_L/MP_K. A medida que la empresa desciende por una isocuanta, disminuye $TMST_{LK}$.

EJEMPLO 6. Al pasar del punto B al C sobre la isocuanta I en la figura 6-3, la empresa renuncia a 3 unidades de K a cambio de una unidad adicional de L. Por lo tanto, $TMST_{LK} = 3$. Igualmente, del punto C a D sobre la isocuanta I $TMST_{LK} = 2$. Así, $TMST_{LK}$ disminuye a medida que la empresa desciende por una isocuanta. Esto es así porque mientras menos K y más L utiliza la empresa (es decir, mientras más bajo sea el punto sobre la isocuanta), más difícil se hace para la empresa sustituir K por L en la producción.

EJEMPLO 7. La tabla 6.3 proporciona las $TMST_{LK}$ entre los diversos puntos de la parte con pendiente negativa de las isocuantas de la tabla 6.2.

Tabla 6.3

Isocuanta I			Isocuanta II			Isocuanta III		
L	*K*	$TMST_{LK}$	*L*	*K*	$TMST_{LK}$	*L*	*K*	$TMST_{LK}$
2	11		4	13		6	15	
1	8		3	10		5	12	
2	5	3.0	4	7	3.0	6	9	3.0
3	3	2.0	5	5	2.0	7	7	2.0
4	2.3	.7	6	4.2	.8	8	6.2	.8
5	1.8	.5	7	3.5	.7	9	5.5	.7
6	1.6	.2	8	3.2	.3	10	5.3	.2
7	1.8		9	3.5		11	5.5	

Observe que la $TMST_{LK}$ entre dos puntos de la misma isocuanta se obtiene mediante la pendiente absoluta (o su valor positivo) de la cuerda entre los dos puntos, mientras que la $TMST_{LK}$ en un punto de la isocuanta se obtiene mediante la pendiente absoluta de la isocuanta en ese punto. La $TMST_{LK}$ también es igual a PM_L/PM_K. Por ejemplo, si PM_K es $\frac{1}{2}$ en un punto determinado de una isocuanta mientras que PM_L es 2, esto significa que una unidad de *L* es 4 veces más productiva que una unidad adicional de *K* en este punto. De esta forma, la empresa puede renunciar a cuatro unidades de *K* al utilizar una unidad adicional de *L* y seguir obteniendo el mismo nivel de producción (permanecer sobre la misma isocuanta). Por consiguiente, $TMST_{LK} = MP_L/MP_K = 2/(1/2) = 4$ en el punto determinado.

6.6 CARACTERÍSTICAS DE LAS ISOCUANTAS

Las isocuantas tienen las mismas características que las curvas de indiferencia: 1) en la parte significativa las isocuantas tienen pendiente negativa, 2) las isocuantas son convexas respecto al origen y 3) las isocuantas nunca se cruzan.

EJEMPLO 8. La porción significativa de una isocuanta tiene pendiente negativa. Esto significa que si la empresa quiere utilizar menos *K* tiene que emplear más *L* para obtener el mismo nivel de producción (es decir, permanecer sobre la misma isocuanta). La empresa no operará en el rango de pendiente positiva de una isocuanta porque puede obtener el mismo nivel de producción utilizando menos de *L* y de *K*. Por ejemplo, el punto *A* de la isocuanta I en la figura 6-4 incluye más *L* y más *K* que el punto *B*, también en la misma isocuanta. Si se trazan líneas que separen las partes significativas (es decir, con pendiente negativa) de las irrelevantes (es decir, con pendiente positiva) de las isocuantas en la figura 6-3, se obtienen las "líneas de contorno" *OY* y *OX* de la figura 6-4. El rango de las isocuantas entre estas líneas corresponde a la etapa II de la producción para *L* y *K* (véanse los problemas 6.13 y 6.14).

En la parte significativa, las isocuantas no sólo tienen pendiente negativa sino también son convexas al origen debido a la disminución de $TMST_{LK}$. Además, las isocuantas no pueden cruzarse. Si dos isocuantas se cruzaran, el punto de intersección implicaría que la empresa podría obtener dos niveles diferentes de producción con la misma combinación de *L* y *K*. Esto es imposible si se supone, tal como sucede, que la empresa utiliza las técnicas de producción más eficientes en todo momento.

6.7 ISOCOSTOS

Un *isocosto* muestra todas las diferentes combinaciones de trabajo y capital que puede comprar una empresa, dados el desembolso total (DT) de la empresa y los precios de los factores. La pendiente de un isocosto se obtiene mediante P_L/P_K, donde P_L es el precio del trabajo y P_K el del capital.

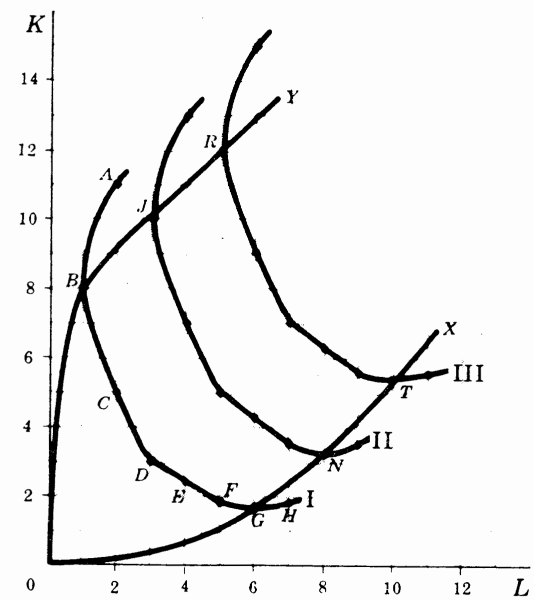

Fig. 6-4

EJEMPLO 9. Si la empresa gastara en capital la totalidad de su desembolso, podría comprar DT/P_K unidades de capital. Si la empresa gastara en trabajo la totalidad de sus desembolsos podría comprar D_T/P_L unidades de trabajo. Al unir estos dos puntos con una línea recta se obtiene el isocosto de la empresa. La empresa puede comprar cualquier combinación de trabajo y capital que aparezca en su isocosto. La pendiente del isocosto se obtiene mediante

$$-\frac{DT/P_K}{DT/P_L} = -\frac{\cancel{DT}}{P_K}\cdot\frac{P_L}{\cancel{DT}} = -\frac{P_L}{P_K}$$

Por ejemplo, si $P_L = P_K = \$1$ y DT = \$10 se obtiene el isocosto de la figura 6-5, con la pendiente = -1.

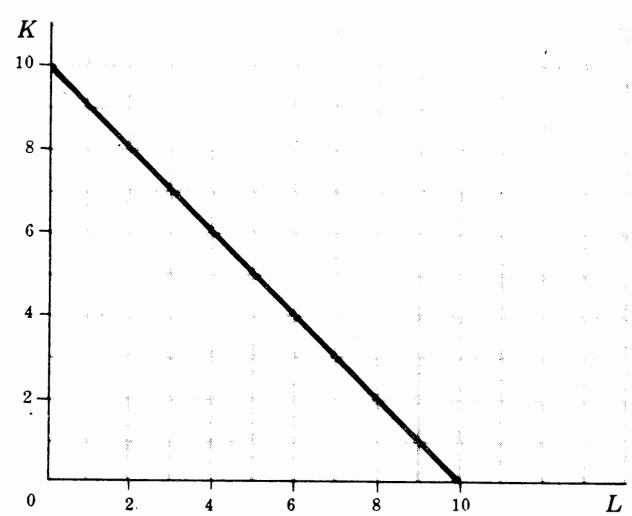

Fig. 6-5

6.8 EQUILIBRIO DEL PRODUCTOR

Un productor está en *equilibrio* cuando maximiza la producción para el desembolso total determinado. Otra manera de decir lo anterior es que un productor está en equilibrio cuando alcanza la isocuanta más alta, de acuerdo con su isocosto. Esto ocurre cuando una isocuanta es tangente al isocosto. En el punto de tangencia, la pendiente absoluta de la isocuanta es igual a la pendiente absoluta del isocosto. Es decir, en equilibrio, $\text{TMST}_{LK} = P_L/P_K$. (Esto es completamente análogo al concepto del equilibrio del consumidor que se estudió en el capítulo 4.) Puesto que $\text{TMST}_{LK} = \text{MP}_L/\text{MP}_K$, en equilibrio,

$$\frac{\text{PM}_L}{\text{PM}_K} = \frac{P_L}{P_K} \qquad \text{o} \qquad \frac{\text{PM}_L}{P_L} = \frac{\text{PM}_K}{P_K}$$

Esto significa que en equilibrio el PM del último *peso* gastado en trabajo es igual al PM del último *peso* gastado en capital. Lo mismo sería cierto para otros factores, si la empresa tuviera más de dos factores de producción. (De nuevo se afirma que esto es completamente análogo al concepto del equilibrio del consumidor.)

EJEMPLO 10. Al reunir en el mismo sistema de ejes las isocuantas de la empresa (Fig. 6-3) y su isocosto (Fig. 6-5) se puede determinar el punto de equilibrio del productor. Esto lo da el punto M de la figura 6-6. La empresa no puede alcanzar la isocuanta III con su isocosto. Si produjera a lo largo de la isocuanta I, no estaría maximizando la producción. La isocuanta II es la más alta que puede alcanzar la empresa con su isocosto. Así, con el fin de llegar al equilibrio la empresa debe gastar \$5 de su DT en comprar $5K$ y los \$5 restantes en comprar $5L$. En el punto de equilibrio (M),

$$\text{TMST}_{LK} = \frac{\text{PM}_L}{\text{PM}_K} = \frac{P_L}{P_K} = 1$$

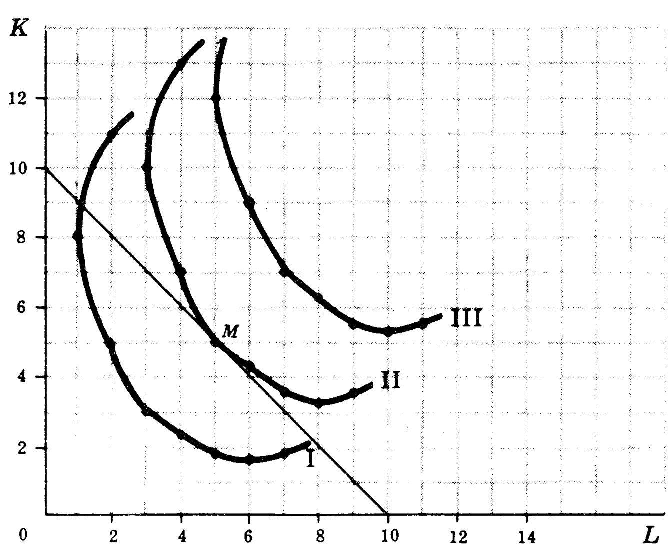

Fig. 6-6

6.9 RUTA DE EXPANSIÓN

Si la empresa cambia su desembolso total mientras permanecen constantes los precios del trabajo y el capital, su isocosto se desplaza paralelamente a sí mismo, hacia arriba si se aumenta DT y hacia abajo si se disminuye DT. Estos distintos isocostos serán tangentes a diferentes isocuantas, definiendo así puntos de equilibrio diferentes para el productor. Al unir estos puntos de equilibrio del productor, se obtiene la *ruta de expansión* de la empresa. Esto es semejante a la curva del ingreso-consumo que se estudió en el capítulo 4.

EJEMPLO 11. Si las isocuantas de la empresa son las de la figura 6-3, si $P_L = P_K = \$1$ y permanece sin cambios, y si DT de la empresa aumenta de \$6 a \$10 y después hasta \$14 por periodo, se puede derivar la ruta de expansión de la empresa (véase la Fig. 6-7). Los isocostos 1, 2 y 3, son paralelos entre sí porque P_L/P_K permanece sin cambios (con el valor de 1). Cuando DT = \$6, el productor alcanza el equilibrio en el punto *D* sobre la isocuanta I al comprar $3K$ y $3L$. Cuando DT = \$10, el productor logra el equilibrio en el punto *M* sobre la isocuanta II al comprar $5K$ y $5L$. Cuando DT = \$14, el productor alcanza el equilibrio en el punto *P* sobre la isocuanta III al comprar $7K$ y $7L$.

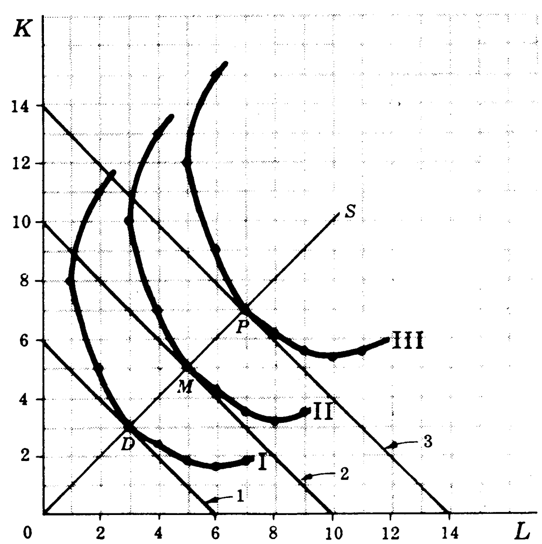

Fig. 6-7

La línea *OS* que une el origen con los puntos de equilibrio *D, M* y *P* es la ruta de expansión para esta empresa. Observe que en este caso la ruta de expansión es una línea recta que pasa por el origen. Esto significa que a medida que se amplía la producción, la razón K/L (la pendiente de la ruta de expansión) permanece igual. (Cuando la ruta de expansión es una línea recta que pasa por el origen, las líneas de contorno también serán líneas rectas que pasan por el origen, y no como aparecen trazadas en la figura 6-4.)

La línea que une puntos en diferentes isocuantas en los cuales es constante TMST (la pendiente) se conoce como una isoclina. Así, una ruta de expansión es la isoclina particular a lo largo de la cual se expande la producción permaneciendo constantes los precios de los factores.

6.10 SUSTITUCIÓN DE FACTORES

Si a partir de una posición de equilibrio del productor el precio de un factor disminuye, se alterará la posición de equilibrio. En el proceso de restablecer el equilibrio, el productor sustituirá en la producción este factor, ahora relativamente más barato, por el otro, hasta que se restablezca el equilibrio. El *grado* de posibilidad de sustitución del factor K por el factor L, como resultado *exclusivamente* del cambio en los precios *relativos* de los factores, se denomina la *elasticidad de la sustitución técnica* y se mide por

$$(e \quad \text{sust.})_{LK} = \frac{\Delta\left(\frac{K}{L}\right)\left(\frac{K}{L}\right)}{\Delta(\text{TMST}_{LK})/\text{TMST}_{LK}}$$

(Véanse los problemas 6.19-6.23.)

6.11 RENDIMIENTOS A ESCALA CONSTANTES, CRECIENTES Y DECRECIENTES

Se tienen *rendimientos a escala constantes, crecientes* o *decrecientes* si al aumentar todos los insumos en una determinada proporción, la producción del artículo aumenta en una *proporción igual, mayor* o *menor*, respectivamente (véanse los problemas 6.24 a 6.26).

Glosario

Corto plazo El periodo en que por lo menos un factor de la producción o un insumo es fijo.

Equilibrio del productor El punto donde un productor maximiza la producción para el desembolso total determinado.

Función de producción Una ecuación, tabla, o gráfica que muestra la cantidad (máxima) de un artículo que se puede producir por unidad de tiempo para cada uno de los conjuntos de insumos alternos, cuando se utilizan las mejores técnicas de producción disponibles.

Isoclina El lugar geométrico de los puntos sobre diferentes isocuantas en el cual la tasa marginal de sustitución técnica de los factores de la producción, o la pendiente, es constante.

Isocosto Muestra todas las diferentes combinaciones de dos insumos que puede comprar o alquilar una empresa, dado el desembolso total de la empresa y los precios de los insumos.

Isocuanta Muestra las diferentes combinaciones de dos insumos que puede utilizar una empresa para obtener una cantidad específica de producción.

Largo plazo El periodo en que todos los factores de la producción son variables.

Ley de los rendimientos decrecientes A medida que se utilizan más unidades de un insumo por unidad de tiempo, con cantidades fijas de otro insumo, el producto marginal del insumo variable disminuye después de un punto.

Producto marginal (PM) El cambio en el producto total debido al cambio de una unidad en la cantidad utilizada de un insumo.

Producto promedio (PP) El producto total dividido entre el número de unidades del insumo utilizado.

Rendimientos constantes a escala Cuando se aumentan todos los insumos en una proporción determinada y la producción obtenida aumenta exactamente en la misma proporción.

Rendimientos crecientes a escala El caso cuando la producción crece en forma proporcionalmente mayor que los insumos.

Rendimientos decrecientes a escala El caso cuando la producción crece en menor proporción que los insumos.

Ruta de expansión El lugar geométrico de los puntos de equilibrio del productor que resulta de los cambios en los desembolsos totales, mientras se mantienen constantes los precios de los factores.

Tasa marginal de sustitución técnica (TMST) La cantidad de un insumo a la que puede renunciar una empresa, al aumentar la cantidad del otro insumo en una unidad y seguir sobre la misma isocuanta.

Preguntas de repaso

1. Cuando disminuye PT, *a*) $PP_{trabajo}$ es cero, *b*) $PM_{trabajo}$ es cero, *c*) $PP_{trabajo}$ es negativo, o *d*) $PP_{trabajo}$ está disminuyendo.

   Respuesta *d*) Véase la figura 6-1.

2. Cuando $PP_{trabajo}$ es positivo pero en declinación, $PM_{trabajo}$ podría *a*) estar declinando, *b*) ser cero, *c*) ser negativo, o *d*) cualesquiera de los anteriores.

   Respuesta *d*) Véase la figura 6-1.

3. La etapa II de la producción comienza cuando $PP_{trabajo}$ comienza a disminuir. *a*) Siempre, *b*) nunca, *c*) en ocasiones o *d*) con frecuencia.

   Respuesta *a*) Véase el ejemplo 4.

4. Cuando PM_{tierra} es negativo, se está en *a*) la etapa I para la tierra, *b*) la etapa III para el trabajo, *c*) la etapa II para la tierra o *d*) ninguno de los anteriores.

   Respuesta *d*) Cuando PM_{tierra} es negativo se está en la etapa III para la tierra y la etapa I para el trabajo (véase la sección 6.3).

5. Si al aumentar en una unidad la cantidad de trabajo utilizada, la empresa puede renunciar a 2 unidades de capital y seguir obteniendo la misma producción, entonces $TMST_{LK}$ es *a*) $\frac{1}{2}$, *b*) 2, *c*) 1, o *d*) 4.

   Respuesta *b*) Véase la sección 6.5.

6. Si $TMST_{LK}$ es igual a 2, entonces PM_K/PM_L es *a*) 2, *b*) 1, *c*) $\frac{1}{2}$, o *d*) 4.

Respuesta *c*) Véase la sección 6.5.

7. Dentro del rango significativo las isocuantas *a*) tienen pendiente negativa, *b*) son convexas respecto al origen, *c*) no pueden cruzarse, o *d*) todo lo anterior.

   Respuesta *d*) Véase la sección 6.6.

8. Si se traza el capital sobre el eje vertical y el trabajo sobre el horizontal, la pendiente de un isocosto rectilíneo trazado en dicha gráfica es *a*) P_L/P_K, *b*) P_K/P_L, *c*) $-P_L/P_K$, o *d*) $-P_K/P_L$.

   Respuesta *c*) Véase la sección 6.7.

9. En el punto del equilibrio del productor, *a*) la isocuanta es tangente al isocosto, *b*) TMST_{LK} es igual a P_L/P_K, *c*) $\text{PM}_L/P_L = \text{PM}_K/P_K$, o *d*) todo lo anterior.

   Respuesta *d*) Véase la sección 6.8.

10. La ruta de expansión de la teoría de la producción es similar en la teoría del consumo en cuanto *a*) la línea precio-consumo, *b*) la curva de Engel, *c*) la línea ingreso-consumo, o *d*) la línea de restricción del presupuesto.

    Respuesta *c*) Compare la figura 6-7 en este capítulo con la figura 4-6 en el capítulo 4.

11. La elasticidad de sustitución técnica se mide por *a*) la pendiente de la isocuanta, *b*) el cambio en la pendiente de la isocuanta, *c*) la razón de los insumos de factores, o *d*) ninguno de los anteriores.

    Respuesta *d*) TMST_{LK}, el cambio en TMST_{LK}, la razón K/L y el cambio de la razón K/L son todos componentes del coeficiente de elasticidad de sustitución técnica, pero no pueden proporcionar, individualmente, dicho coeficiente. (En el problema 6.23 se estudian dos excepciones.)

12. Si se tienen rendimientos constantes a escala y se aumenta la cantidad de trabajo utilizado por unidad de tiempo en un 10%, pero se mantiene constante la cantidad de capital, la producción *a*) aumentará en un 10%, *b*) disminuirá en un 10%, *c*) aumentará en más del 10%, o *d*) aumentará en menos del 10%.

    Respuesta *d*) Con rendimientos constantes a escala si se aumenta tanto el trabajo como el capital en un 10%, la producción también aumentará en un 10%. Puesto que sólo se está aumentando el trabajo en un 10%, la producción aumentará menos del 10% (si se está operando *dentro de* la etapa II de la producción.)

Problemas resueltos

PRODUCCIÓN CON UN INSUMO VARIABLE

6.1 Con base en la tabla 6.4, *a*) determine el PP y el PM del trabajo y *b*) trace el PT, el PP y el PM de las curvas del trabajo.

Tabla 6.4

Tierra	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Trabajo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PT	0	2	5	9	12	14	15	15	14	12

a) **Tabla 6.5**

Tierra	Trabajo	PT	PP_L	PM_L
1	0	0	0	..
1	1	2	2	2
1	2	5	$2\frac{1}{2}$	3
1	3	9	3	4
1	4	12	3	3
1	5	14	$2\frac{4}{5}$	2
1	6	15	$2\frac{1}{2}$	1
1	7	15	$2\frac{1}{7}$	0
1	8	14	$1\frac{3}{4}$	−1
1	9	12	$1\frac{1}{3}$	−2

Observe que los números de esta tabla se refieren a *cantidades físicas* y no a valores monetarios.

b)

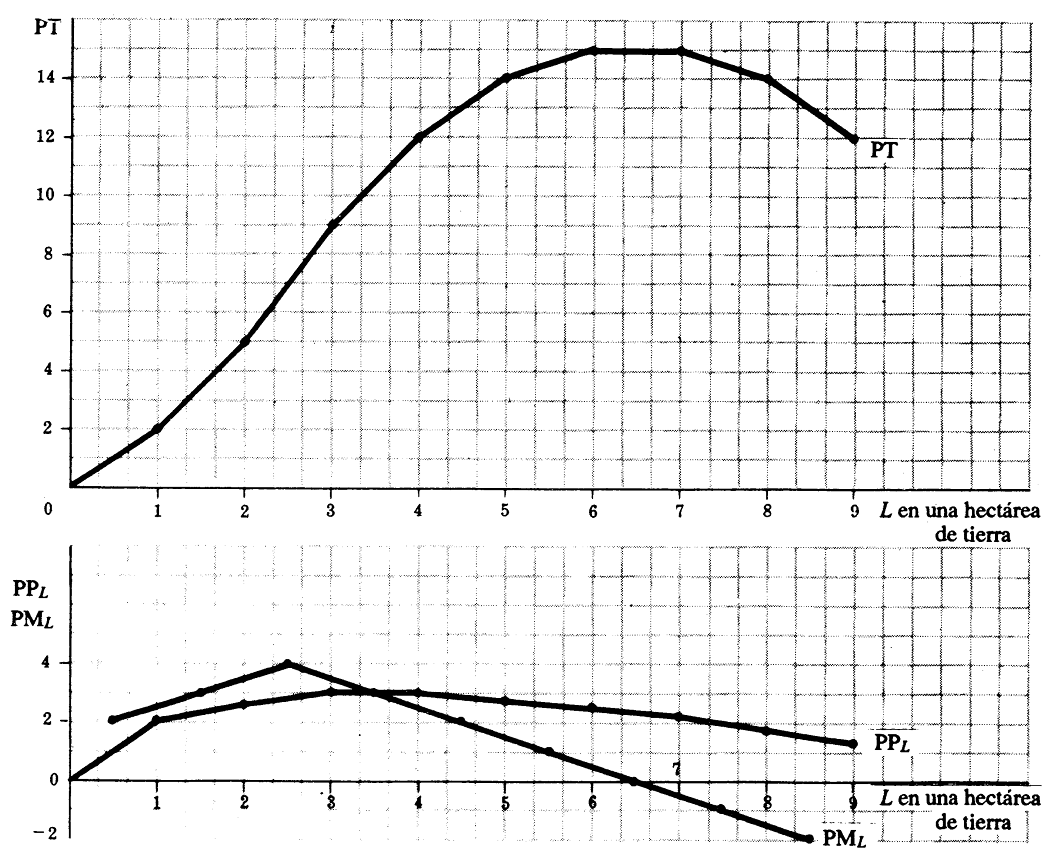

Fig. 6-8

6.2 *a*) En el mismo sistema de ejes trace las curvas PT, PP_L y PM_L del problema 6.1 como *curvas suaves.* *b*) Explique la forma de las curvas PP_L y PM_L en la sección *a*) en términos de la forma de la curva PT.

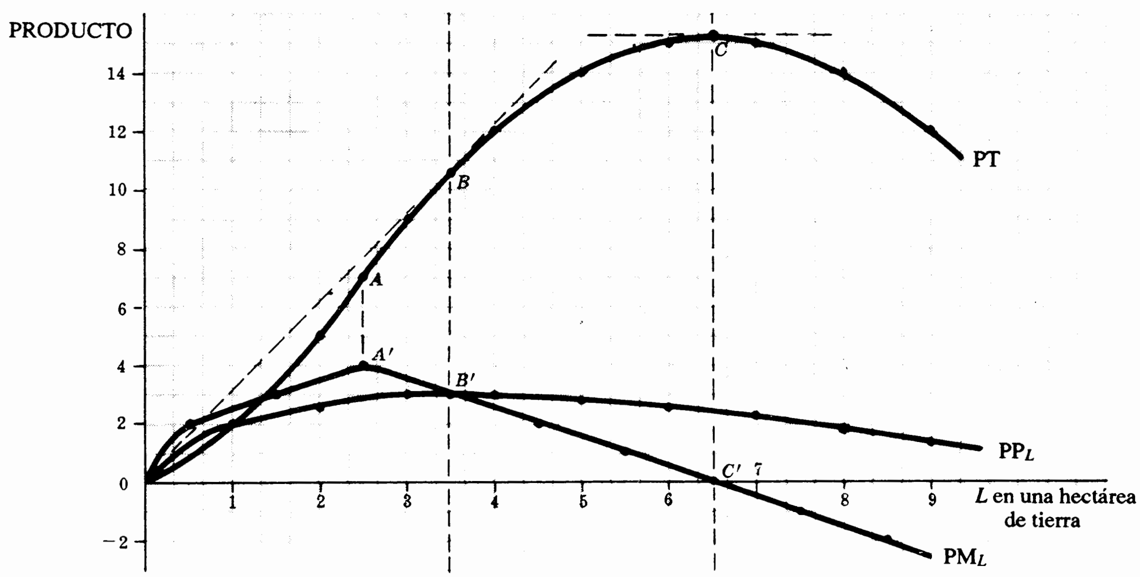

Fig. 6-9

a) Véase la figura 6-9. Estas curvas suaves son las curvas típicas PT, PP y PM de los libros de texto y se basan en el supuesto de que los insumos son perfectamente divisibles.

b) La pendiente de una línea que se trace desde el origen hasta un punto sobre la curva PT asciende hasta el punto *B* y disminuye después. De este modo, la curva PP_L asciende hasta el punto *B*′ y declina después. Comenzando desde el origen, la pendiente de la curva PT (PM_L) asciende hasta el punto *A* (el punto de inflexión), después declina pero sigue siendo positiva hasta el punto *C*. En el punto *C* (el punto máximo de la curva PT) la pendiente de esta curva (PM_L) es cero. Después del punto *C*, la pendiente de la curva PT (PM_L) es negativa. En el punto *B*, la pendiente de la curva PT (PM_L) es igual a la pendiente de una línea desde el origen hasta la curva PT (PP_L).

6.3 *a*) En términos de "trabajo" y "tierra", ¿qué afirma la ley de los rendimientos decrecientes? *b*) Determine en dónde comienza a operar la ley de los rendimientos decrecientes en la figura 6-9.

a) A medida que se utilizan más unidades de trabajo por unidad de tiempo para cultivar una extensión fija de tierra, después de un determinado punto, PM_L declinará *necesariamente*. Ésta es una de las leyes más importantes de la economía y se conoce como la *ley de los rendimientos decrecientes.* Advierta que para observar esta ley, tiene que mantenerse fijo un insumo (bien sea la tierra o el trabajo) mientras que el otro insumo cambia. También se supone que la tecnología permanece constante.

b) La ley de los rendimientos decrecientes comienza a operar en el punto *A*′ de la figura 6-9, donde PM_L comienza a declinar. A la izquierda del punto *A*′ se utiliza muy poca mano de obra en una hectárea de tierra, y por lo tanto, se obtienen rendimientos crecientes, en lugar de decrecientes, del trabajo (el factor variable). (No confunda los "rendimientos crecientes", que es un concepto a corto plazo, con los "rendimientos crecientes a escala" que es un concepto a largo plazo.)

6.4 Defina las tres etapas de la producción para el trabajo que se muestran en la figura 6-9.

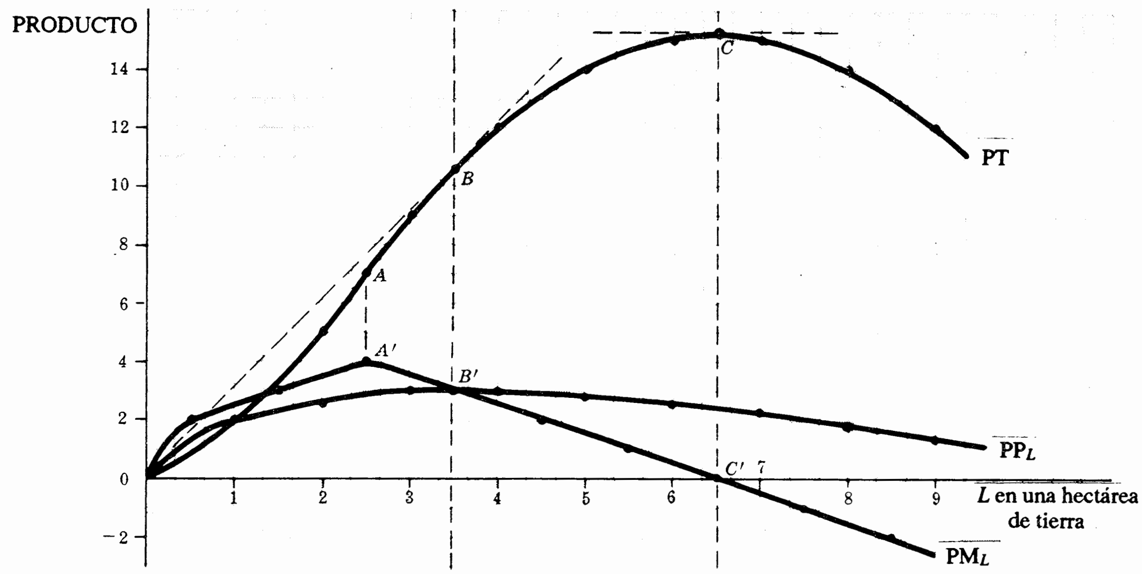

Fig. 6-10

6.5 La sección A de la tabla 6.6 es la misma de la tabla 6.1. El PT_{tierra} (columna 3 de la sección B de esta tabla) se deriva directamente de la sección A, al mantener fijo el trabajo en una unidad por periodo y utilizar cantidades alternas de tierra, que oscilan desde 1/8 de unidad (hectárea) hasta 1 unidad y suponiendo rendimientos constantes a escala. Explique *a*) cómo se obtuvo cada valor de PT_{tierra} (comenzar desde la parte inferior de la tabla), *b*) cómo se obtuvieron los valores PP_{tierra} de la columna 4) de la sección B y *c*) cómo se obtuvieron los valores de PM_{tierra}. (El propósito de este problema y de los cuatro siguientes es demostrar la simetría en las etapas de la producción para el trabajo y la tierra.)

Tabla 6.6

SECCIÓN A: TRABAJO					SECCIÓN B: TIERRA				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Tierra	Trabajo	$PT_{trabajo}$	$PP_{trabajo}$	$PM_{trabajo}$	Tierra	Trabajo	PT_{tierra}	PP_{tierra}	PM_{tierra}
1	0	0	0	. .					
1	1	3	3	3	1	1	3	3	. .
1	2	8	4	5	$\frac{1}{2}$	1	4	8	−2
1	3	12	4	4	$\frac{1}{3}$	1	4	12	0
1	4	15	$3\frac{3}{4}$	3	$\frac{1}{4}$	1	$3\frac{3}{4}$	15	3
1	5	17	$3\frac{2}{5}$	2	$\frac{1}{5}$	1	$3\frac{2}{5}$	17	7
1	6	17	$2\frac{5}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	1	$2\frac{5}{6}$	17	17
1	7	16	$2\frac{2}{7}$	−1	$\frac{1}{7}$	1	$2\frac{2}{7}$	16	23
1	8	13	$1\frac{5}{8}$	−3	$\frac{1}{8}$	1	$1\frac{5}{8}$	13	37

a) Si se comienza de la parte inferior de la sección A, se observa que 8 unidades de trabajo con 1 de tierra dan como resultado 13 unidades de producción; por lo tanto, al utilizar 1/8 de la cantidad de trabajo y de tierra, debe dar como resultado 1/8 de 13 unidades de producción, debido a los rendimientos constantes a escala. Por consiguiente, una unidad de trabajo utilizada en 1/8 de unidad de tierra produce 1/8 de 13 o sea 1 5/8 unidades de producción [véase la última línea de la columna 3) en la sección B)]. Las demás cifras de la columna 3) de la sección B se obtienen siguiendo el mismo procedimiento. *Observe que* PT_{tierra} *[(columna 3) en la sección B)] es idéntico a* $PP_{trabajo}$ *[(columna 4) en la sección A)].*

b) Con base en PT_{tierra} puede derivarse PP_{tierra} y PM_{tierra}. La columna PP_{tierra} [columna 4)] se obtiene dividiendo PT_{tierra} [columna 3)] entre las cantidades correspondientes de tierra utilizada [columna 1)]. Comenzando en la parte inferior de la sección B, se divide PT_{tierra} de 1 5/8 entre 1/8 unidad de tierra para obtener 13 como el PP_{tierra} correspondiente ($1\frac{5}{8} \div \frac{1}{8} = \frac{13}{8} \div \frac{1}{8} = \frac{13}{8} \cdot \frac{8}{1} = 13$). Las demás cifras para PP_{tierra} se obtienen en forma similar. *Observe que* PP_{tierra} *[columna 4) en la sección B] es idéntico a* $PT_{trabajo}$ *[columna 3) en la sección A].*

c) PM_{tierra} se obtiene por el *cambio* de PT_{tierra} dividido entre el *cambio* en la cantidad de tierra utilizada. Comenzando de la parte inferior de la sección B se observa que cuando cambia la cantidad de tierra utilizada de 1/8 de unidad a 1/7, PT_{tierra} cambia de 1 5/8 a 2 2/7 unidades. El pasar de un PT_{tierra} de 1 5/8 a un PT_{tierra} de 2 2/7 representa un cambio de 37/56 unidades de producción ($2\frac{2}{7} - 1\frac{5}{8} = \frac{16}{7} - \frac{13}{8} = \frac{128-91}{56} = \frac{37}{56}$). El pasar de 1/8 a 1/7 de unidad de tierra representa un cambio de 1/56 de unidad de tierra ($\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{8-7}{56} = \frac{1}{56}$). Al dividir el cambio de PT_{tierra} (37/56) entre el cambio correspondiente de la cantidad de tierra utilizada (1/56), se obtiene el PM_{tierra} de 37 ($\frac{37}{56} \div \frac{1}{56} = \frac{37}{56} \cdot \frac{56}{1} = 37$). Esto se registra en la *última* línea de la columna 5) de la sección B. Las demás cifras para PM_{tierra} registradas en la columna 5) de la sección B se obtienen en forma similar.

6.6 *a*) Trace sobre el mismo sistema de ejes la información que aparece en las secciones A y B de la tabla 6.6. Permita que un movimiento de izquierda a derecha sobre el eje horizontal mida las razones crecientes trabajo/tierra dadas al desplazarse en forma descendente por las columnas 2) y 1) de la sección A: el movimiento de derecha a izquierda a lo largo del eje horizontal medirá entonces las razones decrecientes trabajo/tierra dadas al *ascender* por las columnas 2) y 1) de la sección B. *b*) ¿Qué se puede decir sobre las etapas de la producción para el trabajo y el capital en la gráfica del inciso *a*)?

a) Un movimiento (en la forma normal) desde la parte superior hacia la inferior de la sección A de la tabla 6.6 corresponde a un movimiento de izquierda a derecha en la figura 6-11 y se obtienen los conocidos $PT_{trabajo}$, $PP_{trabajo}$ y $PM_{trabajo}$ (al igual que en la Fig. 6-2). Por otra parte, un movimiento desde la parte *inferior* hasta la *superior* en la sección B de la tabla 6.6 corresponde a un movimiento de *derecha* a *izquierda* en la figura 6-11 y se obtiene PT_{tierra}, PP_{tierra} y PM_{tierra}. Este movimiento de derecha a izquierda a lo largo del eje horizontal de la figura se refiere a una *declinación* de la razón trabajo/tierra (es decir, de 8/1 hasta 7/1, 6/1, . . . , 1/1. Esto es lo mismo que un *aumento* de la razón tierra/trabajo (es decir, 1/8 a 1/7, 1/6, . . . , 1/1). Las flechas de la figura representan la dirección de los movimientos.

b) En la figura 6-11 se observa que PT_{tierra} coincide exactamente con $PP_{trabajo}$ y que PP_{tierra} coincide con $PT_{trabajo}$. Debido a esto, la etapa I para el trabajo corresponde a la etapa III de la tierra, la etapa II para el trabajo abarca el mismo rango que la etapa II para la tierra y la etapa III para el trabajo corresponde a la etapa I para la tierra. *Por consiguiente, existe una perfecta simetría entre las etapas de producción para trabajo y tierra con los rendimientos constantes a escala.*

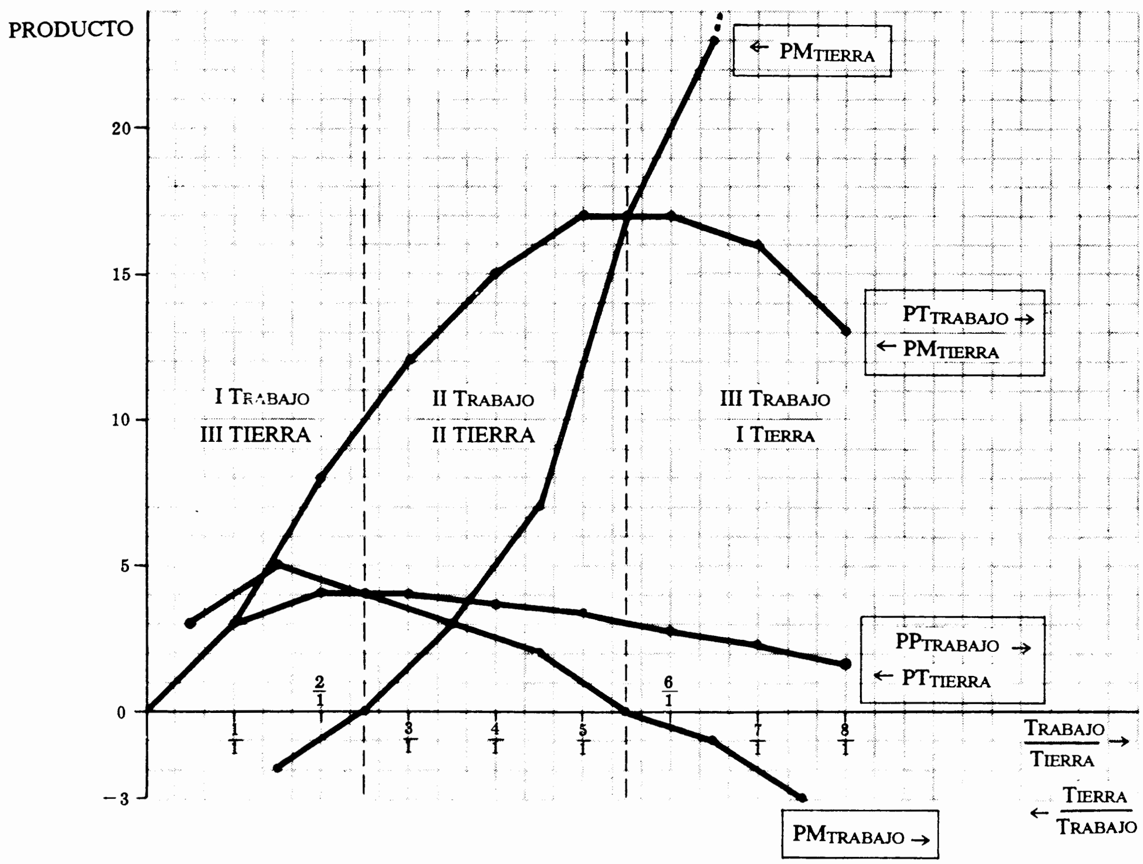

Fig. 6-11

6.7 Con los supuestos de 1) rendimientos constantes a escala, 2) trabajo constante en una unidad por periodo y 3) cantidades alternas de tierra utilizada, que oscilan desde 1/9 hasta 1 hectárea de tierra por periodo, *a*) determine PT de la tierra de la tabla 6.4; a partir de este PT_{tierra} determine PP y PM de la tierra. *b*) Trace sobre el mismo sistema de ejes (al igual que en el problema 6.6) PT_{trabajo}, PP_{trabajo} y PM_{trabajo} del problema 6.1 y PT_{tierra}, PP_{tierra} y PM_{tierra} que se determinaron en la parte *a*) de este problema, y defina las etapas de la producción I, II y III para el trabajo y la tierra.

a) Los valores de PT, PP y PM de la tierra se obtienen tal como se explicó en el problema 6.5.

Tabla 6.7

Tierra	Trabajo	PT_{tierra}	PP_{tierra}	PM_{tierra}
1	1	2	2	. .
$\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{2}$	5	−1
$\frac{1}{3}$	1	3	9	−3
$\frac{1}{4}$	1	3	12	0
$\frac{1}{5}$	1	$2\frac{4}{5}$	14	4
$\frac{1}{6}$	1	$2\frac{1}{2}$	15	9
$\frac{1}{7}$	1	$2\frac{1}{7}$	15	15
$\frac{1}{8}$	1	$1\frac{3}{4}$	14	22
$\frac{1}{9}$	1	$1\frac{1}{3}$	12	30

b) (Véase la Fig. 6-12.)

Recuerde que para que se mantengan las relaciones presentadas en la figura 6-12, el factor fijo tiene que ser la unidad y tienen que suponerse rendimientos constantes a escala.

6.8 **En el mismo sistema de ejes, dibuje curvas suaves "típicas" de PT, PP y PM para el trabajo y la tierra, y defina las etapas de la producción.**

Observe que el movimiento de derecha a izquierda en la figura 6-13, PM_{tierra} primero asciende, llega a un punto máximo y después declina en la etapa I para la tierra. Esto es análogo al comportamiento de $PM_{trabajo}$ en la etapa I para el trabajo, para un movimiento de izquierda a derecha. En la figura 6-12 no se mostró este aspecto del comportamiento de PM_{tierra} en la etapa I para la tierra.

6.9 **Con referencia a la etapa II de la producción, *a*) ¿por qué opera el productor en la etapa II? *b*) ¿qué combinación de factores (dentro de la etapa II) utilizará en realidad el productor? y *c*) ¿dónde operará el productor si $P_{trabajo} = 0$? ¿Si $P_{tierra} = 0$? ¿Si $P_{trabajo} = P_{tierra}$?**

a) El productor no operará en la etapa I del trabajo (= etapa III de la tierra) porque PM_{tierra} es negativo. El

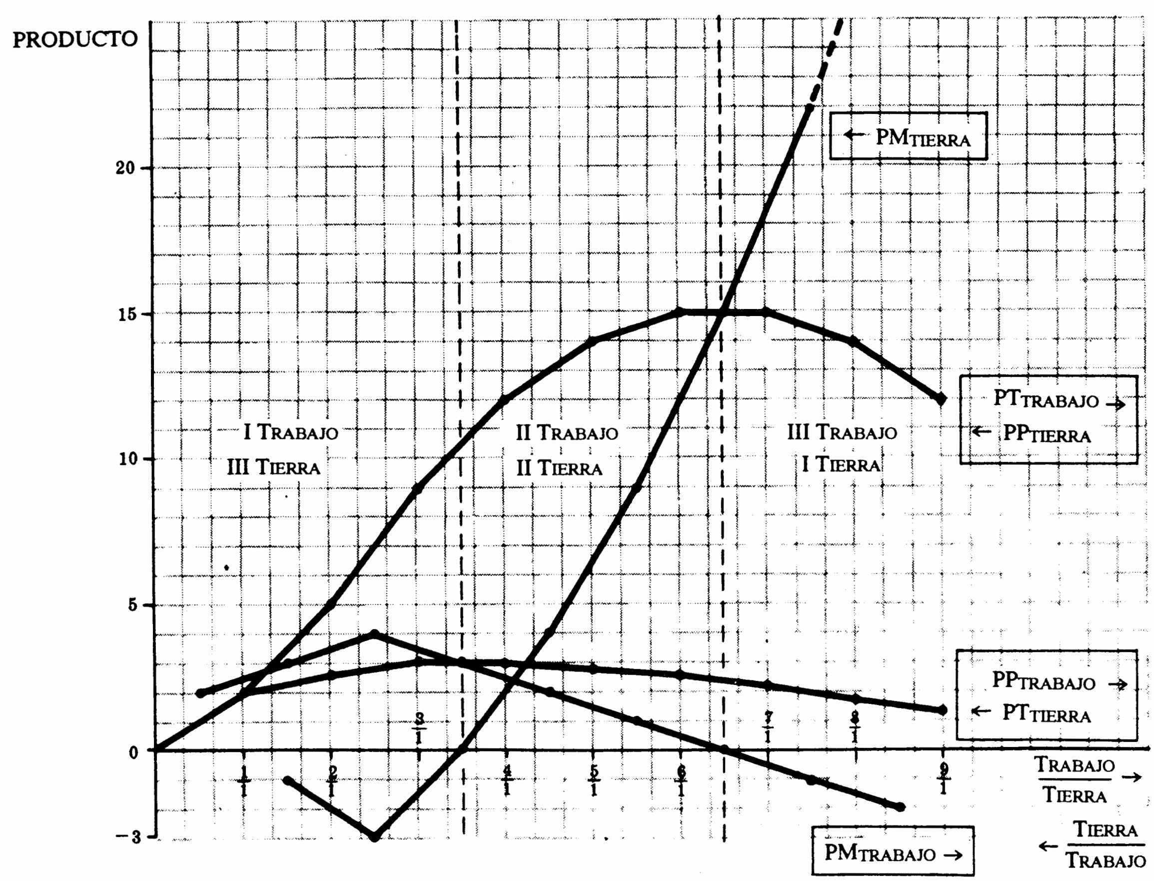

Fig. 6-12

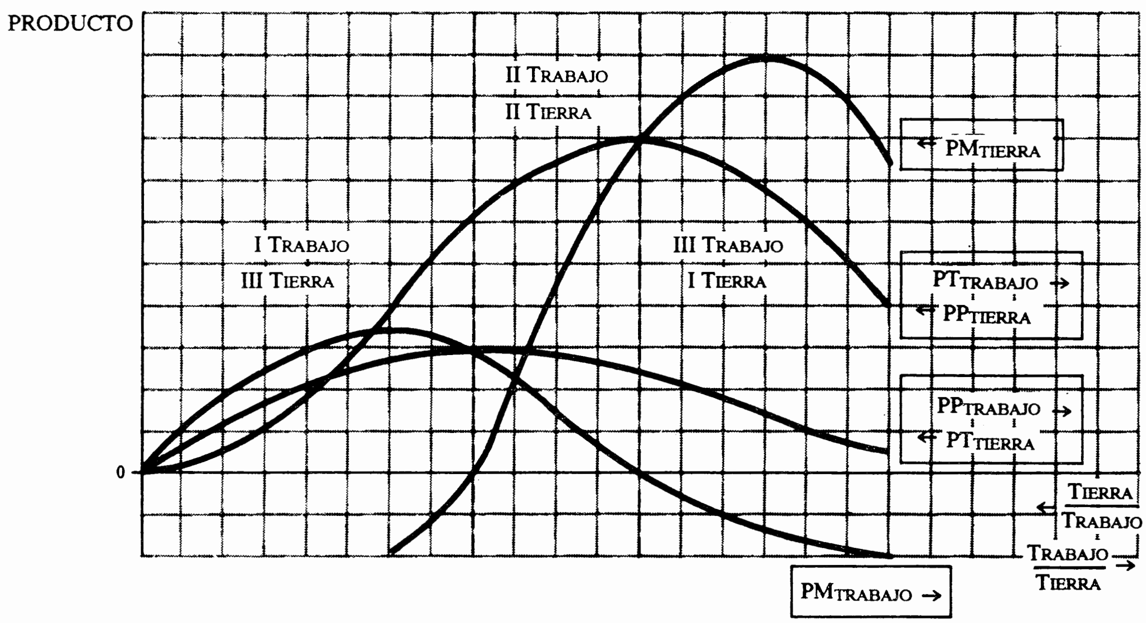

Fig. 6-13

productor no operará en la etapa III del trabajo porque $PM_{trabajo}$ es negativo. El productor producirá en la etapa II porque el PM del trabajo y de la tierra son ambos positivos (aunque estén disminuyendo).

b) Dentro de la etapa II el productor producirá en el punto donde $PM_{trabajo}/P_{trabajo} = PM_{tierra}/P_{tierra}$.

c) Si $P_{tierra} = 0$, el productor querrá producir en el punto de mayor eficiencia promedio para el *trabajo* y por lo tanto producirá al inicio de la etapa II para el trabajo (donde $PP_{trabajo}$ está en su punto máximo y $PM_{tierra} = 0$). Si $P_{trabajo} = 0$, el productor producirá al final de la etapa II para el trabajo (donde $PM_{trabajo} = 0$ y PP_{tierra} está en su punto máximo). Si $P_{trabajo} = P_{tierra}$, el productor producirá en el punto (dentro de la etapa II) donde se cruzan las curvas $PM_{trabajo}$ y PM_{tierra}. Mientras más alto sea el precio del trabajo en relación con el precio de la tierra, el productor operará lo más cerca posible al inicio de la etapa II para el trabajo. Cuanto más alto sea el precio de la tierra en relación con el precio del trabajo, tanto más cerca al inicio de la etapa II para la tierra (que es el final de la etapa II para el trabajo), operará el productor.

6.10 Con base en la tabla 6.8 *a*) encuentre PP y PM del trabajo y *b*) trace las curvas PT, PP y PM del trabajo. *c*) ¿En qué se diferencia esta gráfica de la figura 6-12?

Tabla 6.8

Tierra	1	1	1	1	1
Trabajo	1	2	3	4	5
$PT_{trabajo}$	10	18	24	28	30

a)

Tabla 6.9

Tierra	Trabajo	$PT_{trabajo}$	$PP_{trabajo}$	$PM_{trabajo}$
1	1	10	10	. .
1	2	18	9	8
1	3	24	8	6
1	4	28	7	4
1	5	30	6	2

b)

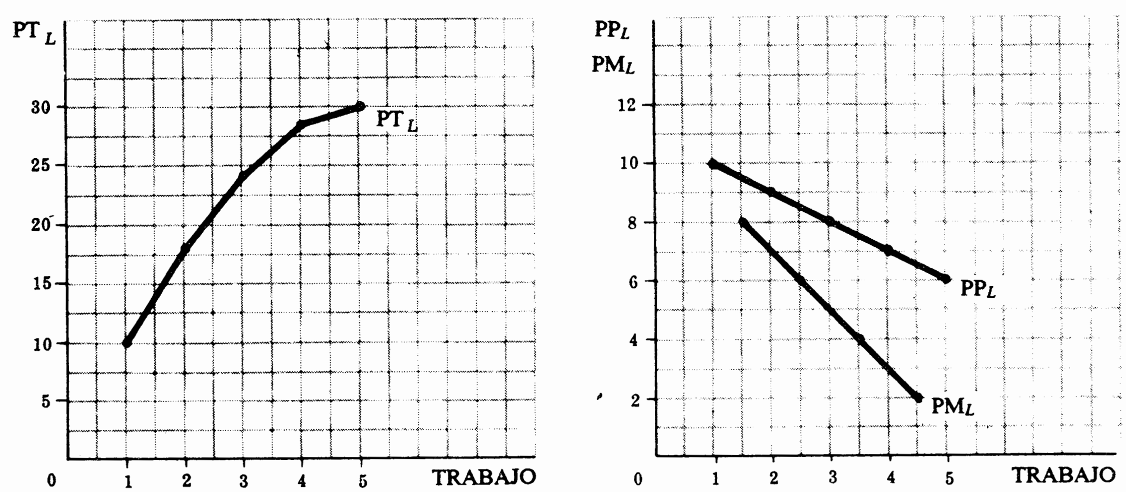

Fig. 6-14

c) La figura 6-14 sólo muestra la etapa II. Faltan las etapas I y III. Esto puede ocurrir a veces en el mundo real y con frecuencia se supone así en el trabajo empírico.

6.11 Con base en la tabla 6.10 *a*) determine PP y PM del trabajo y *b*) trace las curvas PT, PP y PM del trabajo, *c*) ¿Por qué es diferente esta gráfica a la figura 6-14?

Tabla 6.10

Tierra	2	2	2	2	2
Trabajo	1	2	3	4	5
$PT_{trabajo}$	15	26	33	38	41

a)

Tabla 6.11

Tierra	Trabajo	$PT_{trabajo}$	$PP_{trabajo}$	$PM_{trabajo}$
2	1	15	15	
2	2	26	13	11
2	3	33	11	7
2	4	38	9.5	5
2	5	41	8.2	3

b) Véase la figura 6-15. Las curvas punteadas de la figura 6-15 son las funciones del problema 6.10 y se reproducen aquí para facilitar la consulta.

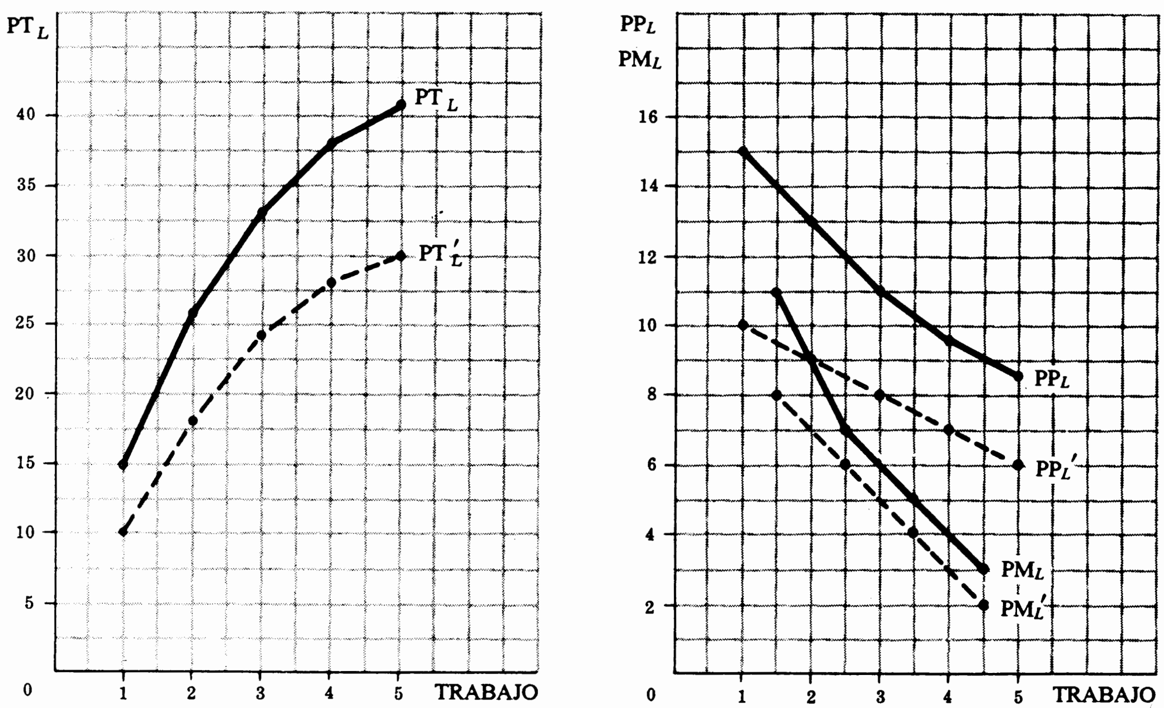

Fig. 6-15

c) Cuando la cantidad de tierra se mantiene constante en 2 unidades en lugar de en 1, todas las curvas se desplazan hacia arriba (las curvas continuas en comparación con las correspondientes curvas punteadas). Por lo general, éste es el caso (en la etapa II) y resulta así debido a que cada unidad del factor variable tiene más del factor fijo con qué trabajar. Observe que los ejes horizontales de la figura 6-15 se refieren al número de unidades de trabajo utilizadas por unidad de tiempo con 2 unidades de tierra para las líneas continuas y con 1 unidad de tierra para las líneas punteadas.

PRODUCCIÓN CON DOS INSUMOS VARIABLES

6.12 La tabla 6.12 proporciona puntos de cuatro isocuantas diferentes. *a*) Determine la $TMST_{LK}$ entre puntos sucesivos dentro del rango significativo de cada isocuanta. *b*) Trace las cuatro isocuantas sobre el mismo sistema de ejes y dibuje las líneas de contorno.

Tabla 6.12

I		II		III		IV	
L	*K*	*L*	*K*	*L*	*K*	*L*	*K*
3	14	4	14	5.5	15	8	16
2	10	3	11	5	12	7	12.5
3	6	4	8	5.5	9	8	9
4	4.5	5	6.3	6	8.3	9	7
5	3.5	6	5	7	7	10	6.4
6	3	7	4.4	8	6	11	7
7	2.7	8	4	9	5.6		
8	3	9	4.4	10	6		

a)

Tabla 6.13

I			II			III			IV		
L	*K*	$TMST_{LK}$	*L*	*K*	$TMST_{LK}$	*L*	*K*	$TMST_{LK}$	*L*	*K*	$TMST_{LK}$
3	14		4	14		5.5	15		8	16	
2	10		3	11		5	12		7	12.5	
3	6	4.0	4	8	3.0	5.5	9	6.0	8	9	3.5
4	4.5	1.5	5	6.3	1.7	6	8.3	1.4	9	7	2.0
5	3.5	1.0	6	5	1.3	7	7	1.3	10	6.4	0.6
6	3	0.5	7	4.4	0.6	8	6	1.0	11	7	
7	2.7	0.3	8	4	0.4	9	5.6	0.4			
8	3		9	4.4		10	6				

$TMST_{LK} = -\Delta K/\Delta L$. El rango significativo de las isocuantas es aquel donde las cantidades correspondientes de trabajo y capital se desplazan en direcciones opuestas. Éstas corresponden a las partes con pendiente negativa de las isocuantas.

b)

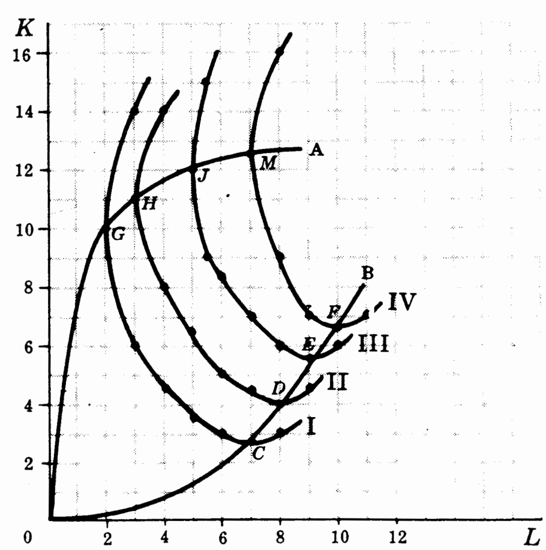

Fig. 6-16

Las líneas de contorno separan las partes con pendiente positiva de las partes con pendiente negativa de las isocuantas. A medida que se desplazan en forma descendente por la isocuanta (dentro de las líneas de contorno), disminuye TMST_{LK}. Esta TMST_{LK} decreciente se refleja en que la isocuanta es convexa respecto al origen. Si el trabajo y el capital son los dos únicos factores, un movimiento descendente en la isocuanta se refiere al largo plazo. La duración real del tiempo implícito en el largo plazo varía de una industria a otra. En algunas industrias es de unos pocos meses; en otras puede ser de varios años. Todo depende del tiempo que necesite la empresa para cambiar *todos* sus insumos.

6.13 Explique *a*) por qué a la derecha de la línea de contorno *OB* de la figura 6-16 se encuentra la etapa III para el trabajo y *b*) por qué por encima de la línea de cresta *OA* de esta figura se tiene la etapa III para el capital.

a) La línea de contorno *OB* une los puntos *C, D, E* y *F* en los cuales las isocuantas I, II, III y IV tienen pendiente cero (y por lo tanto, TMST_{LK} es igual a cero). A la izquierda de *OB* las isocuantas tienen pendiente negativa. A la derecha de *OB* las isocuantas tienen pendiente positiva. Esto significa que a partir del punto *C* sobre la isocuanta I, si la empresa utilizara más trabajo, también tendría que utilizar más capital con el fin de permanecer sobre la isocuanta I. Si utilizara más trabajo con la misma cantidad de capital, el nivel de la producción disminuiría. Lo mismo es cierto para los puntos *D, E* y *F*. Por lo tanto, PM_L tiene que ser negativo a la derecha de la línea de cresta *OB*. Esto corresponde a la etapa III para el trabajo. (Observe que las cantidades de capital señaladas por los puntos *C, D, E* y *F* son las cantidades mínimas de capital para obtener la producción señalada por las isocuantas I, II, III y IV. También, en los puntos *C, D, E* y *F* el $\text{TMST}_{LK} = \text{PM}_L/\text{PM}_K = 0/\text{PM}_K = 0$.)

b) La línea de contorno *OA* une a *G, H, J* y *M* en los cuales las isocuantas I, II, III y IV tienen pendientes infinitas (y por lo tanto, TMST_{LK} infinita). Por encima de la línea de contorno *OA*, las isocuantas tienen pendientes positivas. Así, comenzando en el punto *G* de la isocuanta I, si la empresa utilizara más capital, también tendría que utilizar más trabajo con el fin de permanecer en la isocuanta I. Si utilizara más capital con la misma cantidad de trabajo, disminuiría el nivel de la producción. Lo mismo es cierto para los puntos *H, J* y *M*. Por consiguiente, PM_K tiene que ser negativo por encima de la línea de contorno *OA*. Esto corresponde a la etapa III para el capital. (Observe que las cantidades de trabajo señaladas por los puntos *G, H, J* y *M* son las cantidades mínimas de trabajo para obtener la producción señalada por las isocuantas I, II, III y IV. Igualmente, en los puntos *G, H, J* y *M*, $\text{TMST}_{LK} = \text{PM}_L/\text{PM}_K = \text{PM}_L/0 =$ infinito).

6.14 *a*) Suponiendo que la figura 6-16 muestra rendimientos constantes a escala, defina las etapas de producción I, II y III para el trabajo y el capital. *b*) Explique por qué un movimiento descendente por una isocuanta, dentro de las líneas de contorno, implica que está declinando PM_L.

a) En el problema 6.13 *b*) se observó que por encima de la línea de contorno *OA* se tiene la etapa III para el capital. Con rendimientos constantes a escala, la etapa III para el capital corresponde a la etapa I para el trabajo. A la derecha de la línea de contorno *OB* se tiene la etapa III para el trabajo [véase el problema 6.13 *a*)]. Esto corresponde a la etapa I para el capital. Por lo tanto, el rango de las isocuantas dentro de las líneas de contorno *OA* y *OB* corresponde a la etapa II para el trabajo y el capital.

b) Un movimiento descendente por una isocuanta, dentro de las líneas de contorno, corresponde *tanto* a un *movimiento* descendente *a lo largo* de una curva PM_L (puesto que se está en la etapa II y se está aumentando la cantidad de trabajo utilizado) como a un *desplazamiento* descendente en la curva PM_L (puesto que se está reduciendo la cantidad de capital utilizado con cada cantidad de trabajo empleado). De esta manera, a medida que se desciende por la isocuanta (dentro de las líneas de contorno), el valor de PM_L baja por ambas razones. Se podría utilizar el mismo razonamiento para explicar por qué un movimiento *ascendente* por una isocuanta (dentro de las líneas de contorno) implica que PM_K está declinando.

6.15 Explique cómo, de un mapa de isocuantas, pueden derivarse *a*) PT_L y *b*) PT_K. *c*) ¿Qué tipo de mapa de isocuantas implica una función PT como la del problema 6.10?

a) Fijar la cantidad de capital utilizado en un nivel específico ($\bar{K}$) y aumentar la cantidad de trabajo por unidad de tiempo, corresponde a un movimiento de izquierda a derecha a lo largo de la línea paralela y por encima del eje horizontal de la sección A del siguiente mapa de isocuantas (Fig. 6-17). A medida que hay un desplazamiento de izquierda a derecha a lo largo de esta línea, se cruzan isocuantas cada vez más altas, hasta cierto punto. Al registrar la cantidad de trabajo utilizado (con la cantidad fija de capital) y las correspondientes cantidades de la producción total, se puede elaborar la curva PT_L que se muestra en la sección B de la figura 6-17. Esto hace regresar al análisis de corto plazo. Si se fija la cantidad de capital utilizado en un nivel diferente, se obtendrá una curva PT_L distinta.

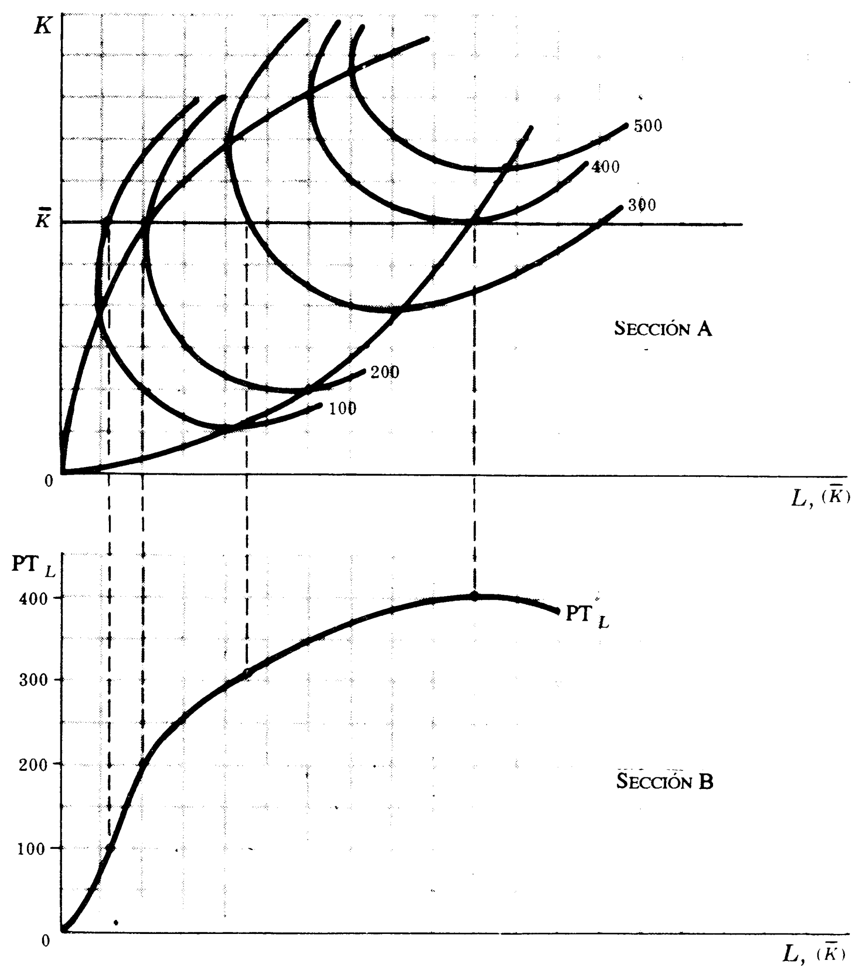

Fig. 6-17

b) En forma similar, se podría derivar la curva PT_K trazando una línea vertical en la cual la cantidad de trabajo es fija, cambiando la cantidad de capital utilizado por unidad de tiempo y registrando los niveles de producción.

c) Una curva TP como la del problema 6.10 implica un mapa de isocuantas en el cual éstas se definen sólo por su rango con pendiente negativa.

6.16 Suponga que $P_K = \$1$, $P_L = \$2$ y PT $= \$16$. *a*) ¿Cuál es la pendiente del isocosto? *b*) Escriba la ecuación del isocosto, *c*) ¿Qué significa P_L? ¿Qué significa P_K?

a) Si se traza el trabajo a lo largo del eje horizontal y el capital a lo largo del eje vertical, la pendiente del isocosto es $-P_L/P_K = -2$.

b) La ecuación del isocosto rectilíneo se obtiene por

$$\text{PT} = P_K K + P_L L \qquad \text{o} \qquad \$16 = K + 2L$$

donde L y K representan las cantidades de trabajo y capital, respectivamente. Despejando K se obtiene

$$K = \frac{\text{PT}}{P_K} - \frac{P_L}{P_K} L \qquad \text{o} \qquad K = 16 - 2L$$

Esto significa que la empresa puede comprar $0L$ y $16K$, o $1L$ y $14K$, o $2L$ y $12K$, o . . . $8L$ y $0K$. Por cada dos unidades de capital a que renuncie la empresa, puede comprar una unidad adicional de trabajo. Por lo tanto, la tasa de sustitución de L por K *en el mercado* es 2 (la pendiente absoluta del isocosto) y permanece constante.

c) P_L se refiere al *salario* que tiene que pagar la empresa con el fin de *contratar* trabajo o comprar *tiempo de trabajo* para un periodo específico. Se puede expresar en pesos por hora de trabajo, pesos por trabajador-año, etc. En términos generales, P_K se obtiene mediante la tasa de interés del mercado que tiene que pagar la empresa por tomar prestado capital (para fines de inversión). Por ejemplo, la empresa tendría que pagar un 8% por pedir un préstamo de \$100 durante un año. En este caso $P_K = \$8$. En nuestro análisis se supuso implícitamente que P_L y P_K permanecen constantes, con independencia de la cantidad de trabajo y capital

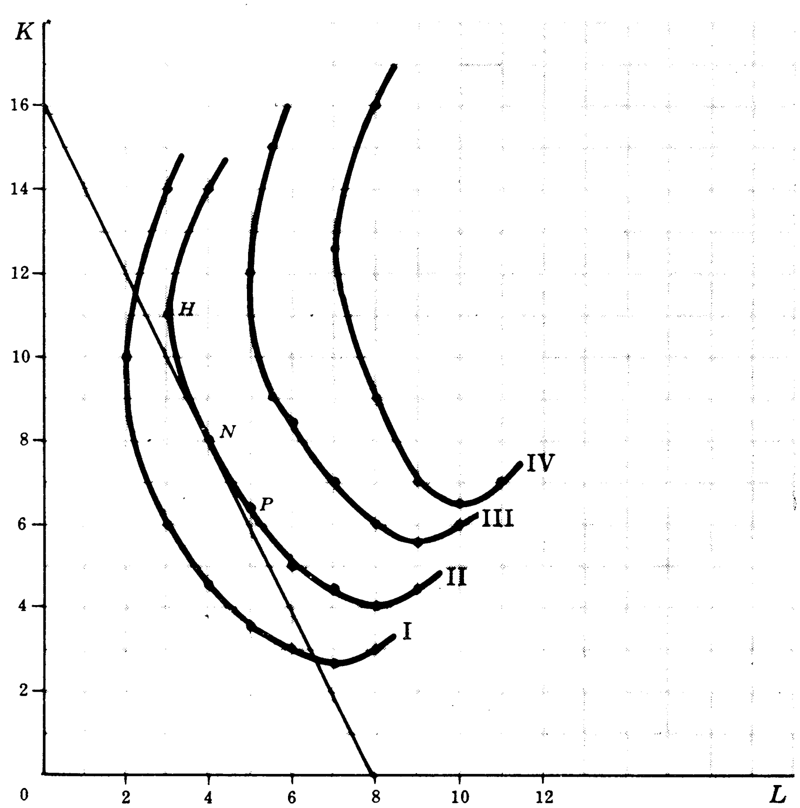

Fig. 6-18

demandado por la empresa por unidad de tiempo. (En el capítulo 13 se estudia la fijación de los precios de los factores.)

6.17 Si se utilizan las isocuantas del problema 6.12 y el isocosto definido en el problema 6.16, determine el punto en que el productor está en equilibrio.

El productor está en equilibrio en el punto N de la isocuanta II. Así, con el fin de estar en equilibrio, el productor debe gastar \$8 de su PT para comprar $8K$ y los \$8 restantes para comprar $4L$. En equilibrio, $\text{TMST}_{LK} = \text{PM}_L/\text{PM}_K = P_L/P_K = 2$. En el punto H, TMST_{LK} excede la tasa a la cual puede sustituirse el trabajo por capital *en el mercado*. Por consiguiente, a la empresa le conviene sustituir trabajo por capital hasta llegar al punto N. Lo contrario es cierto en el punto P.

Como una opción para maximizar la producción para un PT determinado, la empresa podría desear minimizar el costo de obtener un nivel específico de producción. Esto corresponde a determinar el isocosto más bajo (PT) necesario para alcanzar la isocuanta especificada (el nivel de producción).

6.18 Suponga que 1) la empresa tiene las isocuantas I, II y III del problema 6.12, 2) P_K y P_L son \$1 y \$2, respectivamente, y permanecen constantes, y 3) el PT de la empresa aumenta de \$12 a \$16 y después a \$20 por periodo. Derive la ruta de expansión de la empresa.

Con el isocosto 1, el productor está en equilibrio en el punto R de la isocuanta I; con el isocosto 2, el productor está en equilibrio en el punto N de la isocuanta II; con el isocosto 3, el productor está en equilibrio en el punto S de la isocuanta III. La línea que une los puntos de equilibrio R, N y S es la ruta de expansión de esta empresa. Observe que en este caso, a medida que aumenta la producción disminuye la pendiente de la ruta de expansión (la razón $\Delta K/\Delta L$). Los isocostos 1, 2 y 3 son paralelos porque P_K y P_L permanecen constantes. Puesto que la pendiente absoluta de los tres isocostos es igual a 2, TMST_{LK} en los puntos de equilibrio R, N y S también es igual a 2. Es decir, en los puntos de equilibrio R, N y S,

$$\text{TMST}_{LK} = \text{MP}_L/\text{MP}_K = P_L/P_K = 2$$

Por lo tanto, la ruta de expansión $ORNS$ es una isoclina.

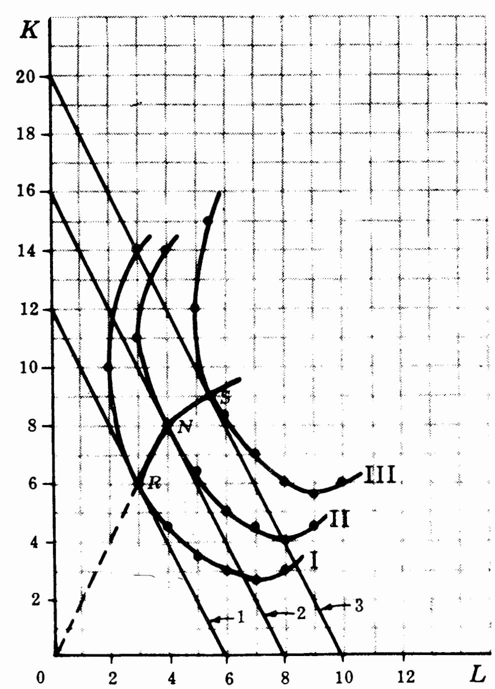

Fig. 6-19

SUSTITUCIÓN DE FACTORES

6.19 A partir de la posición de equilibrio M de la figura 6-6, encuentre el nuevo punto de equilibrio si P_L disminuye a \$0.50 (mientras que P_K y PT permanecen sin cambios en \$1 y \$10, respectivamente).

Cuando P_L baja a \$0.50 (mientras que P_K y PT permanecen sin cambios), el isocosto rota en sentido contrario a las manecillas del reloj, del isocosto 2 al isocosto 4 (véase la Fig. 6-20). Con este nuevo isocosto, el productor está en equilibrio en el punto W donde el isocosto 4 es tangente a la isocuanta III. Así cuando P_L baja \$1 a \$0.50 (*ceteris paribus*), la cantidad de trabajo que compra este productor aumenta de 5 a 9 unidades por periodo de tiempo. Este efecto total es el resultado combinado de un *efecto producción* y un *efecto sustitución*. Éstos son análogos a los efectos ingreso y sustitución de la teoría de la demanda (Capítulo 4). Se presenta el efecto producción debido a que cuando disminuye P_L, el productor podría obtener una producción mayor (isocuanta III en lugar de la isocuanta II) con un PT determinado. Esto significa que el productor podría obtener el nivel de producción señalado por la isocuanta II con un PT menor, después de la disminución de P_L.

6.20 Separe el efecto producción del efecto total del cambio en el precio de los factores del problema 6.19. ¿Cuál es la magnitud del efecto sustitución? ¿Qué mide este efecto sustitución?

Se puede separar el efecto producción del efecto total del cambio en precios desplazando el isocosto 4 *hacia abajo* y *paralelo* a sí mismo hasta que sea tangente a la isocuanta II. Lo que se obtiene es el isocosto 4′. (El desplazamiento descendente se refiere a una reducción en el DT; el desplazamiento paralelo es necesario con el fin de conservar el *nuevo* conjunto de precios *relativos* de los factores).

Por lo tanto, Efecto total = Efecto sustitución + Efecto de producción

$$MW \quad = \quad MZ \quad + \quad ZW$$

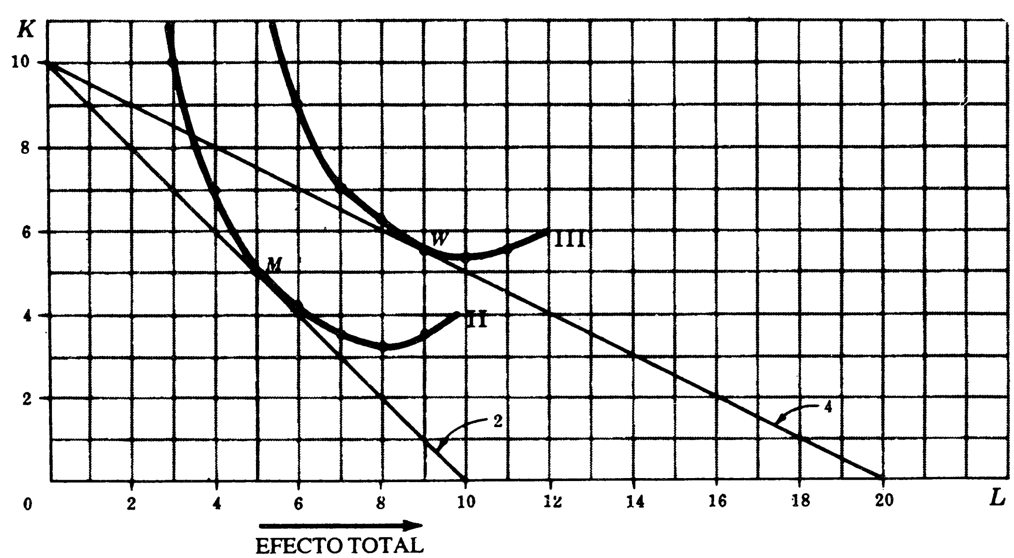

Fig. 6-20

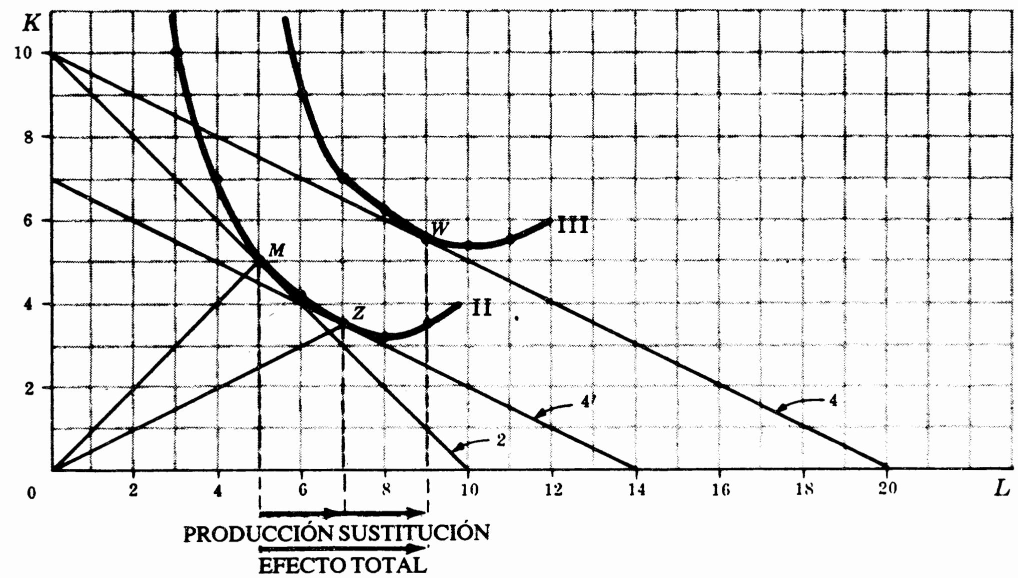

Fig. 6-21

Observe que el efecto sustitución lo determina un movimiento a lo largo de la misma isocuanta y mide el grado de posibilidad de sustitución de capital por trabajo en la producción, resultante exclusivamente del cambio en los precios relativos de los factores.

6.21 Encuentre la elasticidad de sustitución de K por L para el cambio en el precio de los factores de los problemas 6.19 y 6.20.

El grado de posibilidad de sustitución de K por L depende de la curvatura de la isocuanta y se mide por el coeficiente de elasticidad de las sustituciones técnicas. En la figura 6-21, K/L en el punto M es 1 (la pendiente de la línea delgada OM) y K/L en el punto Z es 0.5 (la pendiente de la línea delgada OZ). Por lo tanto, $\Delta(K/L)$ de M a Z es 0.5. TMST_{LK} en el punto M es igual a 10/10 o 1 (la pendiente absoluta del isocosto 2). TMST_{LK} en el punto Z es igual a 3.5/7 o 0.5 (la pendiente absoluta del isocosto 4'). Así, TMST_{LK} de M a Z es 0.5. Al sustituir estos valores en la fórmula para el coeficiente de elasticidad de sustitución técnica, se obtiene

$$(e\ \text{sust.})_{LK} = \frac{\Delta\left(\frac{K}{L}\right)\Big/\left(\frac{K}{L}\right)}{\Delta(\text{TMST}_{LK})/\,\text{TMST}_{LK}} = \frac{0.5/1}{0.5/1} = 1$$

6.22 Si comenzando de la posición de equilibrio del problema 6.17, P_L baja \$1 mientras que P_K y PT permanecen constantes, *a*) separe geométricamente el efecto producción del efecto sustitución resultante del cambio en P_L y *b*) encuentre el coeficiente de elasticidad de la sustitución técnica para el cambio en P_L.

a)

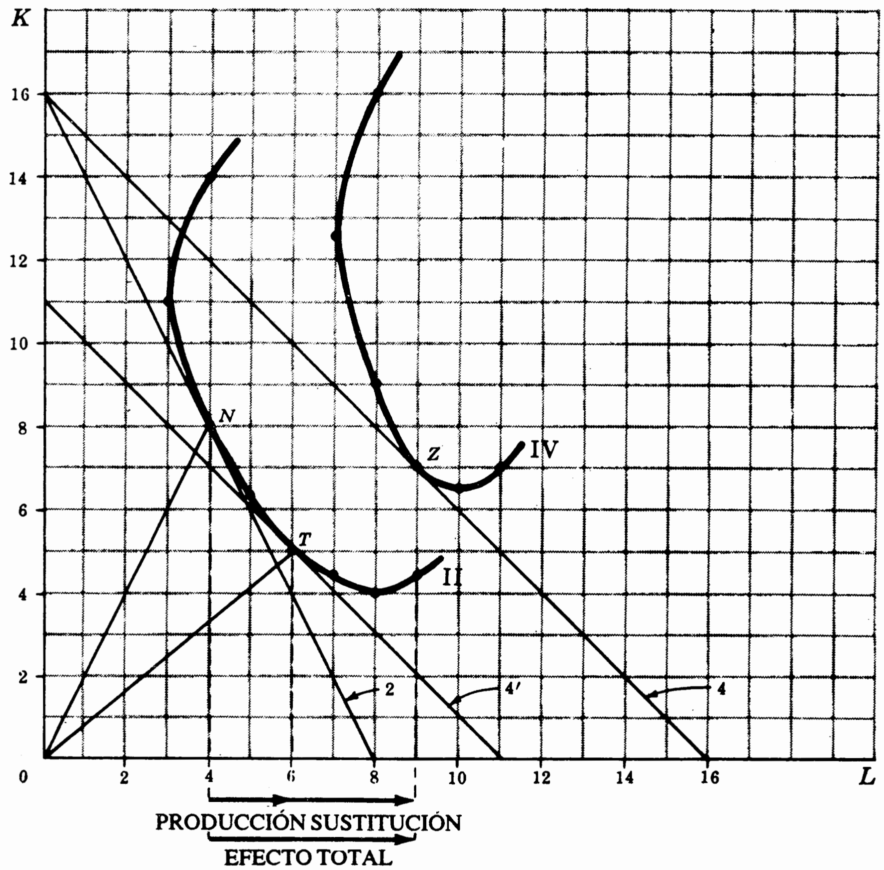

Fig. 6-22

Cuando P_L baja de \$2 a \$1, hay un movimiento del punto de equilibrio N del isocosto 2 y la isocuanta II al punto de equilibrio Z del isocosto 4 y la isocuanta IV. Esta empresa alcanzaría el nivel de producción *antiguo* (es decir, el nivel de producción señalado por la isocuanta II) a los *nuevos* precios de insumos (la pendiente del isocosto 4) con \$5 menos de PT. Esto da el nuevo punto de equilibrio T sobre la isocuanta II y el isocosto 4'. De esta manera,

$$\text{Efecto total} = \text{Efecto sustitución} + \text{Efecto producción}$$

$$NZ \quad = \quad NT \quad + \quad TZ$$

b) El movimiento a lo largo de la isocuanta II de N a T es el efecto sustitución y es resultado exclusivamente del cambio en los precios relativos de los factores. Por lo tanto, a medida que P_L baja en relación con P_K, la empresa sustituye 3 unidades de capital por 2 unidades de trabajo para obtener el mismo nivel de producción. Al sustituir los valores de este problema en la fórmula se obtiene el coeficiente de elasticidad de sustitución de capital por trabajo entre los puntos N y T, en la forma siguiente:

$$(e\ \text{sust.})_{LK} = \frac{\Delta\left(\frac{K}{L}\right)\Big/\left(\frac{K}{L}\right)}{\dfrac{\Delta(\text{TMST}_{LK})}{\text{TMST}_{LK}}} = \frac{\left(\frac{7}{6}\right)\Big/\left(\frac{2}{1}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{7}{12}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{7}{6} \cong 1.17$$

Para separar el efecto sustitución del efecto producción para un *aumento* en el precio de un factor, se procede en una forma similar a la que se siguió para separar el efecto sustitución del efecto ingreso de un aumento en el precio de una mercancía [véase el problema 4.34 *a*)].

6.23 En un sistema de ejes dibuje tres isocuantas que muestren (e sust.)$_{LK}$ cero y rendimientos constantes a escala. En otro sistema de ejes dibuje tres isocuantas que muestren (e sust.)$_{LK}$ infinito y rendimientos constantes a escala.

En la figura 6.23 las isocuantas de la sección A muestran (e sust.)$_{LK}$ de cero y rendimientos constantes a escala. La producción se realiza con $K/L = 1$ *con independencia de los precios relativos de los factores.* Por lo tanto, si estos precios cambian, $\Delta(K/L) = 0$ y (e sust.)$_{LK} = 0$. La empresa utilizará $2K$ y $2L$ para obtener 100 unidades de producción (punto D). Si la empresa utilizara $2K$ y más de $2L$, por ejemplo, $4L$ (punto F), la producción seguiría siendo 100 unidades. De este modo, $\text{PM}_L = 0$. En forma similar, si la empresa utilizara $4K$ y $2L$ (punto E), la producción sería de nuevo 100 unidades. Por lo tanto, $\text{PM}_K = 0$. Si la empresa duplica todos sus insumos (punto G), la producción se duplica. Se tienen así rendimientos constantes a escala. La producción se realiza a lo largo de la línea delgada OC.

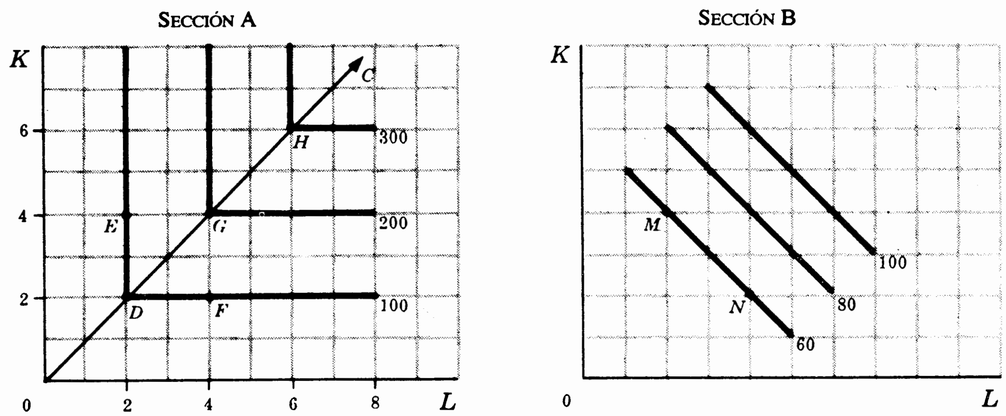

Fig. 6-23

Las isocuantas de la sección B muestran (e sust.)$_{LK}$ infinito y rendimientos constantes a escala. Puesto que la pendiente de las isocuantas (TMST_{LK}) permanece sin cambio, $\Delta\text{TMST}_{LK} = 0$ y (e sust.)$_{LK} = \infty$. Además, puesto que la producción aumenta en forma proporcional al aumento de ambos insumos, se tienen rendimientos constantes a escala.

La isocuanta normal es convexa respecto al origen y tiene un (e sust.)$_{LK}$ entre cero e infinito (dependiendo de la ubicación y la curvatura de la isocuanta). Al dibujar isocuantas continuas que son convexas respecto al origen, se está suponiendo implícitamente que los insumos están disponibles en cantidades continuamente variables.

RENDIMIENTOS A ESCALA

6.24 Explique qué entiende por *a*) rendimientos constantes a escala, *b*) rendimientos crecientes a escala y *c*) rendimientos decrecientes a escala. Explique brevemente cómo se podría presentar cada uno de éstos.

a) Los *rendimientos constantes a escala* significa que si todos los factores de la producción aumentan en una proporción determinada, la producción obtenida aumenta exactamente en la *misma* proporción. Así, si se aumenta en un 10% la cantidad de trabajo y capital utilizada por unidad de tiempo, la producción aumenta también en un 10%; si se duplica el trabajo y el capital, se duplica la producción. Esto tiene su lógica porque; si se emplean dos trabajadores del mismo tipo y dos máquinas idénticas, normalmente se espera el doble de producción que con un trabajador con una máquina. En forma similar, si todos los insumos se *reducen* en una proporción determinada, la producción se *reduce* en la misma proporción.

b) Los *rendimientos crecientes a escala* se refieren al caso en que si todos los factores aumentan en una proporción determinada, la producción aumenta en una proporción *mayor*. Por lo tanto, si se aumentan el trabajo y el capital en un 10%, la producción aumenta más del 10%; si se duplican el trabajo y el capital, la producción aumenta más del doble. Pueden ocurrir rendimientos crecientes a escala debido a que al aumentar la escala de operación resulta posible una mayor división y especialización del trabajo. Es decir, cada trabajador puede especializarse en realizar una tarea sencilla y repetitiva, en lugar de muchas tareas diferentes. Como resultado de esto aumenta la productividad del trabajo. Además una escala de operación mayor puede permitir el uso de maquinaria especializada más productiva, que no era posible emplear en una escala de operación inferior.

c) Si la producción aumenta en una proporción *menor* al aumento de todos los insumos, se dan los *rendimientos decrecientes a escala*. Esto puede ocurrir porque a medida que se amplía la escala de operación, las dificultades en las comunicaciones pueden hacer cada vez más difícil al empresario el manejo eficiente de su negocio. Por lo general, se cree que a escalas de operación muy pequeñas la empresa tiene rendimientos crecientes a escala. Sin embargo, a medida que aumenta la escala de operación, los rendimientos crecientes ceden el paso a rendimientos constantes a escala y finalmente a rendimientos decrecientes a escala. El que éste sea el caso de una situación particular es un aspecto empírico.

6.25 ¿Cuál conjunto de isocuantas de la figura 6-24 muestra *a*) rendimientos constantes a escala, *b*) rendimientos crecientes a escala, y *c*) rendimientos decrecientes a escala?

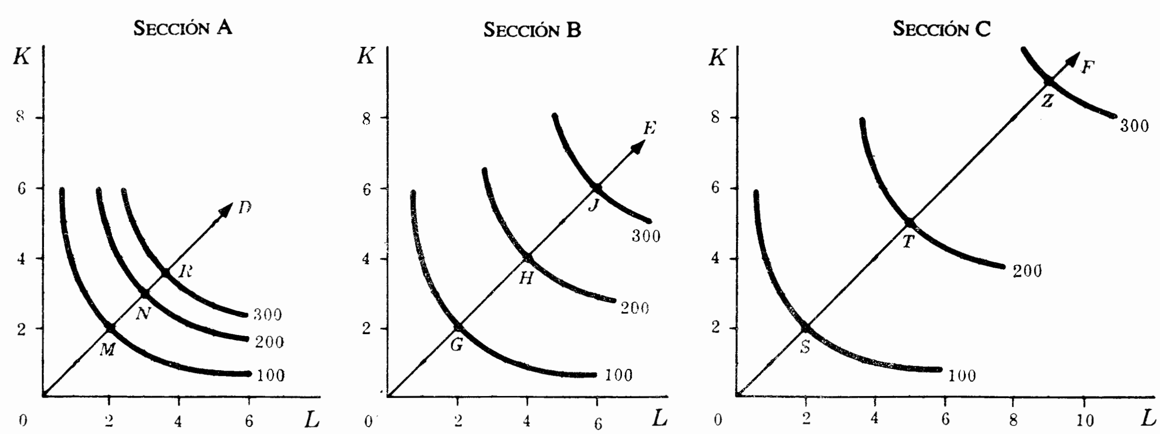

Fig. 6-24

a) La sección B muestra rendimientos constantes a escala. Muestra que cuando se duplican ambos insumos se duplica la producción; si se triplican todos los insumos, se triplica el nivel de producción. Por lo tanto, $OG = GH = HJ$ (y en forma similar para cualquier otra línea delgada desde el origen). Observe que la producción aumenta a lo largo de la línea delgada OE (y la razón K/L permanece sin cambios) *siempre y cuando los precios relativos de los factores permanezcan sin cambio.* (Compare la sección B con la sección A de la Fig. 6-23 donde la razón K/L se fijó *tecnológicamente.*)

b) En la sección A se muestra el caso de rendimientos crecientes a escala, donde un aumento en ambos insumos en una producción determinada, ocasiona un aumento en la producción más que proporcional. Así, $OM > MN > NR$. De nuevo, si los precios relativos de los factores permanecen sin cambio, la producción aumenta a lo largo de la línea delgada OD.

c) La sección C muestra rendimientos decrecientes a escala. En este caso, para duplicar la producción por unidad de tiempo, la empresa tiene que aumentar en más del doble la cantidad de ambos insumos utilizados por unidad de tiempo. De este modo, $OS < ST < TZ$.

6.26 Respecto a la función de la producción de la tabla 6.14, *a*) indique si se tienen rendimientos crecientes a escala, decrecientes o constantes. *b*) ¿Cuáles de estos puntos están sobre la misma isocuanta? *c*) ¿Está operando la ley de los rendimientos decrecientes?

a) La tabla 6.14 indica que $Q = f(L, K)$. Esto significa: La cantidad de producción obtenida por unidad de tiempo es una función de (o depende de) la cantidad de trabajo y capital utilizados por periodo. Con $1L$ y $1K$, $Q = 50$; con $2L$ y $2K$, $Q = 100$; con $3L$ y $3K$, $Q = 150$. Por consiguiente, se tienen rendimientos constantes a escala

Tabla 6.14

$3K$	80	120	150
$2K$	70	100	120
$1K$	50	70	80
	$1L$	$2L$	$3L$

b) La ecuación general para una isocuanta se determina mediante $Q = f(L, K)$ y se refiere a las diferentes combinaciones de trabajo y capital necesarias para *obtener* un determinado nivel de producción de un bien o *servicio.* En la tabla 6.14 se observa que puede obtenerse una producción de 70 unidades con $1L$ y $2K$ o con $2L$ y $1K$. Estos dos son puntos sobre la isocuanta que representan 70 unidades de producción. Igualmente, la empresa puede obtener 80 unidades de producción (y por lo tanto, permanecer sobre la misma isocuanta) utilizando $1L$ y $3K$ o $1K$ y $3L$. Por último, pueden obtenerse 120 unidades de producción con $2L$ y $3K$ o con $3L$ y $2K$. Éstos son dos puntos sobre una isocuanta más alta.

c) La ley de los rendimientos decrecientes es una ley a corto plazo. A corto plazo se observa cómo varía el nivel de la producción, bien sea cambiando el trabajo y manteniendo constante el capital, o viceversa. Esto se puede presentar de un modo funcional como $Q = f(L, \bar{K})$ o $Q = f(\bar{L}, K)$. Al hacer esto se obtienen las funciones PT_L y PT_K, respectivamente. Observe que se obtiene una función PT_L diferente para cada nivel en el que se mantiene constante el capital. (En forma similar, al mantener constante la cantidad de trabajo utilizado a niveles diferentes, se obtienen diferentes funciones PT_K.) Si $\bar{K} = 1$, y el trabajo aumenta de 1 unidad a 2 unidades y después a 3 unidades, Q aumenta de 50 a 70 unidades y después a 80 unidades. Puesto que PM_L disminuye continuamente (de 50 a 20 y a 10), la ley de los rendimientos decrecientes está operando en forma continua. Lo mismo es cierto para las funciones PT_L dadas por las líneas 2 y 3. La ley de los rendimientos decrecientes opera también en forma continua a lo largo de las funciones PT_K dadas por las columnas 1), 2) y 3). (El supuesto implícito hecho en las tres últimas frases es que $f(O, K) = f(L, O) = 0$.)

TEORÍA DE LA PRODUCCIÓN CON CÁLCULO

***6.27 Si se parte de la función de producción general $Q = f(L, K)$, que afirma que la producción Q es una función de, o depende de, la cantidad de trabajo (L) y el capital (K) utilizados en la producción, derive la expresión para la pendiente de la isocuanta utilizando el cálculo.**

Si se toma el diferencial total y se iguala a cero (debido a que la producción permanece sin cambios a lo largo de una determinada isocuanta), se obtiene

$$dQ = \frac{\partial f}{\partial L} dL + \frac{\partial f}{\partial K} dK = 0$$

Por lo tanto, la expresión para la pendiente absoluta de la isocuanta es

$$-\frac{dK}{dL} = \frac{\partial f / \partial L}{\partial f / \partial K} = \frac{\mathrm{PM}_L}{\mathrm{PM}_K} = \mathrm{TMST}_{LK}$$

***6.28 Una empresa tiene la función de producción general $Q = f(L, K)$ y un determinado desembolso de costos de $C^* = wL + rK$, donde w es el salario del trabajo y r es el precio de arrendamiento del capital. Determine, mediante el uso del cálculo, la cantidad de trabajo y capital que debe utilizar la empresa con el fin de maximizar la producción.**

Al formar la función Z, que incorpora la función de producción a maximizar sujeta al determinado desembolso de costos establecido igual a cero. se obtiene

$$Z = f(L,K) + \lambda^*(C^* - wL - rK)$$

donde λ^* es el multiplicador de Lagrange. Si se toma la primera derivada parcial de Z con relación a L y K, se obtiene

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} - \lambda^* w = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Z}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - \lambda^* r = 0$$

Al dividir la primera ecuación entre la segunda se obtiene,

$$\frac{\mathrm{PM}_L}{\mathrm{PM}_K} = \frac{w}{r} \qquad \text{o} \qquad \frac{\mathrm{PM}_L}{w} = \frac{\mathrm{PM}_K}{r}$$