Unidad 14

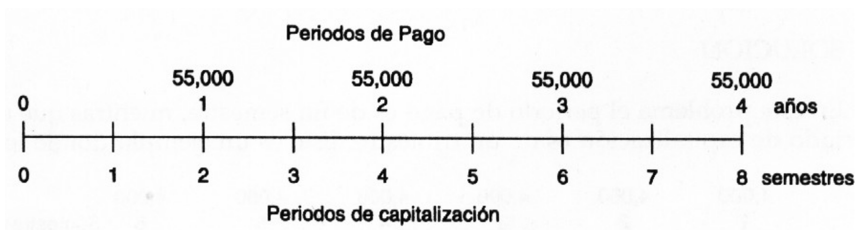
- Anualidades Generales

INTRODUCCION

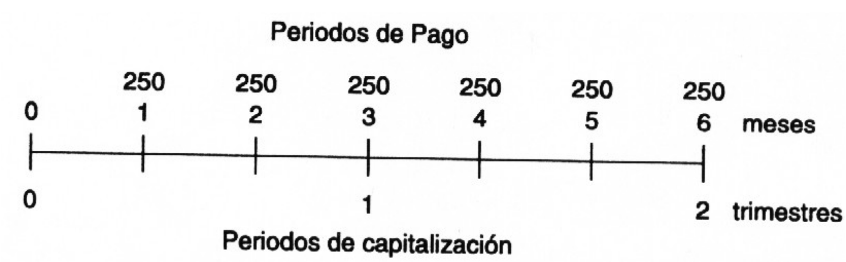
Los problemas de anualidades estudiados hasta este momento han sido únicamente del tipo de anualidades ciertas simples; esto es, aquellas anualidades donde el periodo de capitalización coincide con los plazos en que se efectúa el pago. En este capítulo se estudiarán las anualidades generales ciertas. Una anualidad general es aquella en la cual no coinciden los periodos de capitalización con los periodos de pago.

Las anualidades generales se dividen en dos tipos:

1. Aquellas cuyos pagos se realizan con menor frecuencia que la capitalización de intereses. Por ejemplo, se realizan 4 pagos anuales de $ 55,000.00 cada uno y los intereses se capitalizan cada semestre.



2. Los pagos se realizan con mayor frecuencia que la capitalización de intereses. Por ejemplo, se realizan 6 pagos mensuales de $ 250.00 cada uno y los intereses se capitalizan cada trimestre.



Para resolver un problema de anualidad general es necesario modificarlo de tal manera que los periodos de pago y los periodos de capitalización coincidan. Es decir, es necesario modificar la anualidad general en una anualidad simple equivalente.

Existen, básicamente, dos formas de convertir anualidades generales en anualidades simples:

1. Se reemplazan los pagos originales por pagos equivalentes que coincidan con las fechas de capitalización de intereses.
2. Se cambia la tasa de interés dada por una tasa equivalente en la cual el nuevo periodo de capitalización coincida con el periodo de pago.

PROBLEMAS DE ANUALIDADES GENERALES

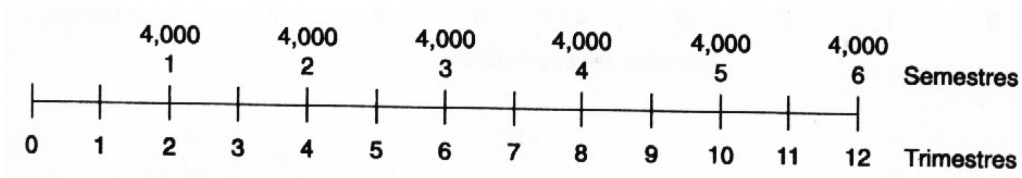
A continuación se verá un ejemplo que será resuelto utilizando los dos métodos de resolución anteriormente mencionados.

EJEMPLO 12.1

Obtener el monto y el valor presente de una anualidad vencida de $ 4,000.00 semestrales por 3 años con interés al 22.2% capitalizable cada trimestre.

SOLUCION

En este problema el periodo de pago es de un semestre, mientras que el periodo de capitalización es de un trimestre. Este es un ejemplo donde los

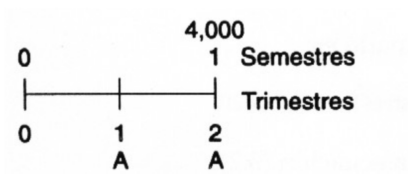


pagos se realizan con menor frecuencia que la capitalización de intereses; hay 2 periodos de capitalización por intervalo de pago.

1o. Metodo

Se reemplazan los pagos originales, $ 4,000.00 cada semestre, por pagos equivalentes de $ A hechos al final de cada trimestre.

A continuación se muestra un diagrama de tiempo para un intervalo de pago original, donde A representa el valor equivalente del pago original.



El diagrama muestra que al depositar $ A al final de cada uno de dos trimestres se tendrá un monto de $ 4,000.00. Debido a que la capitalización de los intereses es trimestral se tiene una anualidad vencida simple, donde:

$F = 4,000$

$n = 2$ trimestres

$i = 0.222/4$ por trimestre

Usando la ecuación (8.1), se tiene:

$$4{,}000 = A\left[\frac{(1+\frac{0.222}{4})^2 - 1}{\frac{0.222}{4}}\right]$$

$$4{,}000 = A\left[\frac{(1.0555)^2 - 1}{0.0555}\right]$$

$$A = \frac{(4{,}000)\ (0.0555)}{1.0555^2 - 1}$$

$$A = \$\ 1{,}945.9985$$

$ 1,945.9985 es el pago trimestral equivalente a un pago semestral de $ 4,000.

Ahora se tiene que:

A = 1,945.9985

n = 12 trimestres

i = 0.222/4 = 0.0555 por trimestre

Usando de nuevo la ecuación (8.1), se obtiene el monto de la anualidad:

$$F = 1{,}945.9985\left[\frac{(1.0555)^{12} - 1}{0.0555}\right]$$

$$F = \$\ 31{,}979.20$$

El monto es de $ 31,979.20. El interés ganado es:

$$I = 31{,}979.20 - (\ 4{,}000\ \text{pesos/semestre})\ \ (6\ \text{semestres}) = \$\ 7{,}979.20$$

El valor presente se obtiene utilizando la ecuación (8.2):

$$P = 1{,}945.9985\left[\frac{1 - (1.0555)^{-12}}{0.0555}\right]$$

$$P = \$\ 16{,}725.10$$

2o. Método

Se cambia la tasa de interés dada, 22.2% capitalizable cada trimestre, en una tasa equivalente cuyo periodo de capitalización sea semestral, con el fin de que coincida con el periodo de pago.

Se dice que dos o más tasas de interés con diferentes periodos de capitalización son equivalentes si producen el mismo monto compuesto al final de un año. Por ejemplo, al invertir $ 100.00 al 50% capitalizable cada trimestre, el monto obtenido al final de un año será $ 160.18. Si el dinero se invierte al 48.05% con capitalización mensual, al final de un año se tendrá un monto de $ 160.18. Como el monto compuesto es el mismo en ambos casos, se dice que las tasas de interés son equivalentes.

En este problema se desea encontrar una tasa nominal con capitalización semestral que sea equivalente a la tasa del 22.2% capitalizable cada trimestre. Para lograr esto se supone un capital cualquiera, digamos $ 1.00, y se calcula su monto compuesto al final de un año.

$$F = 1\,(1 + \frac{0.222}{4})^4$$

$$F = \$\ 1.24117480344$$

Por definición este monto debe ser igual al monto generado por $ 1.00 a la tasa i capitalizable cada semestre.

Es decir:

$$1.24117480344 = 1\,(1 + \frac{i}{2})^2$$

i es la tasa anual equivalente con capitalización semestral.

Sacando raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad:

$$(1 + \frac{i}{2}) = 1.11408025$$

$$\frac{i}{2} = 0.11408025$$

$$i = 0.2281605$$

Por tanto:

j = 22.81605% anual capitalizable semestralmente.

Una vez obtenida la tasa equivalente el problema deja de ser una anualidad general para convertirse en una anualidad simple vencida, donde:

A = 4,000

n = 6 semestres

i = 0.2281605/2 por semestre

Por tanto:

$$F = 4{,}000\left[\frac{(1 + \frac{0.2281605}{2})^6 - 1}{\frac{0.2281605}{2}}\right]$$

$$F = 4{,}000\left[\frac{1.91204826914 - 1}{0.11408025}\right]$$

$$F = \$\ 31{,}979.20$$

El valor presente se obtiene usando la ecuación (8.2):

$$P = 4{,}000\left[\frac{1-(1+\frac{0.2281605}{2})^{-6}}{\frac{0.2281605}{2}}\right]$$

$$P = \$\ 16{,}725.10$$

Otra forma, más sencilla, de obtener el valor presente es utilizar la fórmula del interés compuesto, despejando P y utilizando $ 31,979.20 como el monto.

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = F\,(1+i)^{-n} = 31{,}979.20\ (1+\frac{0.2281605}{2})^{-6}$$

$$P = \$\ 16{,}725.10$$

El lector puede observar que resolver problemas de anualidades generales obteniendo la tasa equivalente resulta más sencillo que el otro método; por tanto, ésta será la forma de resolver los problemas en el resto del capítulo.

Con el fin de que sea más sencilla y rápida la resolución de problemas sobre anualidades generales, a continuación se deducirá una fórmula que nos permita obtener la tasa equivalente.

Sea j% anual capitalizable m veces en un año la tasa nominal dada. Sea jeq% anual capitalizable q veces en un año la tasa nominal equivalente.

Si se invierte $ P a la tasa del j%, el monto al cabo de un año será:

$$F_1 = P(1+\frac{j}{100\ m})^m$$

La misma cantidad P invertida al jeq% proporcionará un monto, al cabo de un año, de:

$$F_2 = P(1+\frac{j_{eq}}{100q})^q$$

Por definición:

$$F_1 = F_2$$

Por tanto:

$$P\,(1+\frac{j}{100m})^m = P(1+\frac{j_{eq}}{100q})^q$$

Es decir:

$$\left(1+\frac{j}{100\ m}\right)^m = \left(1+\frac{j_{eq}}{100\ q}\right)^q$$

Sacado de raíz q a ambos lados de la igualdad:

$$\sqrt[q]{\left(1+\frac{j}{100m}\right)^{m}} = 1+\frac{j_{eq}}{100q}$$

Esto es:

$$\left(1+\frac{j}{100m}\right)^{m/q} = 1+\frac{j_{eq}}{100q}$$

$$\left(1+\frac{j}{100m}\right)^{m/q} - 1 = \frac{j_{eq}}{100q}$$

Por tanto:

$$j_{eq} = 100q\left[\left(1+\frac{j}{100m}\right)^{m/q} - 1\right] \tag{12.1}$$

EJEMPLO 12.2

Utilizando la ecuación (12.1), obtener la tasa equivalente del ejemplo 12.1.

SOLUCIÓN

La tasa de interés dada es del 22.2% capitalizable cada trimestre, por tanto:

$j = 22.2$

$m = 4$ capitalizaciones en un año.

Se desea una tasa equivalente con periodo de capitalización semestral, por tanto:

$q = 2$ capitalizaciones en un año

Al sustituir los datos anteriores en la ecuación (12.1), se tiene:

$$j_{eq} = (100)(2)\left[\left(1+\frac{22.2}{(100)(4)}\right)^{4/2} - 1\right]$$

$$j_{eq} = 200\,[(1.0555)^2 - 1]$$

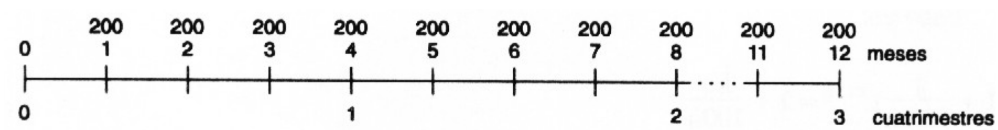
$$j_{eq} = 22.81605\% \text{ anual}$$

EJEMPLO 12.3

Hallar el monto de una anualidad vencida de $ 200.00 mensuales por un año, al 1.6% mensual capitalizable cada cuatrimestre.

SOLUCIÓN

En este problema los pagos se realizan con mayor frecuencia que la capitalización de intereses. En un periodo de capitalización se efectúan 4 pagos.



Periodos de capitalización

En primer lugar, es necesario obtener la tasa de interés equivalente: j = (1.6% mensual) (12 meses) = 19.2% anual m = 3 capitalizaciones en un año

Debido a que se quiere una tasa equivalente con capitalización mensual, entonces:

q = 12 capitalizaciones en un año

Por tanto:

$$j_{eq} = (100)\,(12)\left[(1 + \frac{19.2}{(100)\,(3)})^{3/12} - 1\right]$$

$$j_{eq} = 1200\ [(1.064)^{0.25} - 1]$$

$$j_{eq} = 1200\ (1.01562973404 - 1)$$

$$j_{eq} = 18.75568\%\ \text{anual}$$

Una vez obtenida la tasa equivalente, el problema se ha convertido en una anualidad vencida simple.

A = 200
n = 12 meses
i = 0.1875568/12 por mes

$$F = 200\left[\frac{(1 + 0.1875568/12)^{12} - 1}{0.1875568/12}\right]$$

$$F = 200\left[\frac{1.204550129 - 1}{0.01562973333}\right]$$

$$F = \$\ 2{,}617.45$$

La cantidad ganada por intereses es de:

$$I = 2{,}617.45 - (200/\text{mes})\ (12\ \text{meses})$$

$$I = \$\ 217.45$$

EJEMPLO 12.4

Una tienda ofrece un teléfono celular a crédito por 6 meses, pagando $ 287.50 cada quincena. Si la tasa de interés es del 28% capitalizable cada mes, encuentre el precio de contado.

SOLUCIÓN

Cálculo de la tasa de interés equivalente:

j = 28% anual

m = 12 capitalizaciones por año

q = 24 capitalizaciones por año

$$j_{eq} = (100)\ (24)\left[(1 + \frac{28}{(100)\ (12)})^{\frac{12}{24}} - 1\right]$$

$$j_{eq} = 2{,}400\ [(1.0233333333)^{0.5} - 1]$$

$$j_{eq} = 27.83854488\%\ \text{anual}$$

Para encontrar el valor actual, los datos a sustituir en la ecuación (8.2) son:

$A = 287.50$
$n = 12$ quincenas
$i = 0.2783854488/24$ por quincena

$$P = 287.50\left[\frac{1 - (1 + \frac{0.2783854488}{24})^{-12}}{\frac{0.2783854488}{24}}\right]$$

$$P = 287.50\left[\frac{1 - 0.870757603548}{0.0115993937}\right]$$

$$P = \$\ 3{,}203.35$$

EJEMPLO 12.5

El comprador de una casa de campo pagará \$ 25,000.00 como enganche y \$ 3,895.35 al principio de cada mes durante 8 años. Si el interés es del 27% capitalizable cada quincena, ¿cuál es el valor de contado de la casa de campo?

SOLUCIÓN

$j = 27\%$
$m = 24$
$q = 12$

$$j_{eq} = (100)\ (12)\left[(1 + \frac{27}{(100)\ (24)})^{\frac{24}{12}} - 1\right]$$

$$j_{eq} = 1{,}200\ [(1.01125)^2 - 1]$$

$$j_{eq} = 27.151875\%\ \text{capitalizable cada mes}$$

En este problema se nos pide encontrar el valor presente de una anualidad anticipada; por tanto, se deberá usar la ecuación (9.2).

$$P = 3{,}895.35\left[\frac{(1 + \frac{0.27151875}{12}) - (1 + \frac{0.27151875}{12})^{1-96}}{(\frac{0.27151875}{12})}\right]$$

$$P = 3{,}895.35\left[\frac{1.0226265625 - (1.0226265625)^{-95}}{0.0226265625}\right]$$

$$P = \$\ 155{,}503.90$$

$$\text{Precio de contado} = \$\ 155{,}503.90 + \$\ 25{,}000$$

$$\text{Precio de contado} = \$\ 180{,}503.90$$

EJEMPLO 12.6

¿Cuántos depósitos semanales de $ 45.00 cada uno serán necesarios para acumular $ 6,500.00, si la tasa de interés es del 23% compuesto en forma mensual?

SOLUCION

$j = 23$
$m = 12$
$q = 52$

$$j_{eq} = (100)(52)\left[(1 + \frac{23}{(100)(12)})^{12/52} - 1\right]$$

$$j_{eq} = 5{,}200\ [(1.0191666666)^{0.230769230769} - 1]$$

$$J_{eq} = 22.83234018\% \text{ compuesto cada semana}$$

Sustituyendo los datos numéricos en la ecuación (8.1), se tiene:

$$6{,}500 = 45\left[\frac{(1 + \frac{0.2283234018}{52})^n - 1}{\frac{0.2283234018}{52}}\right]$$

$$\frac{6{,}500}{45} = \frac{1.00439083465^n - 1}{0.00439083465}$$

$$1.63423167167 = 1.00439083465^n$$

$$n \log 1.00439083465 = \log 1.63423167167$$

Por tanto:

$$n = 112.10859651 \text{ semanas}$$

Teóricamente se necesitan 112.10859651 semanas para acumular $ 6,500.00. En la práctica, como podrá recordar el lector, se tienen dos soluciones: si se llevan a cabo 112 depósitos se tendrá un monto por $ 6,492.05; si se deposita el dinero durante 113 semanas, el monto será por $ 6,565.55. En cambio, si los $ 6,492.05 se dejan invertidos una semana más se tendrá un monto por $6,520.55

Otra solución podría ser ajustar el pago semanal tomando 112 semanas completas.

$$A = \frac{Fi}{(1+i)^n - 1} = \frac{(6{,}500)\left[\frac{0.2283234018}{52}\right]}{(1 + \frac{0.2283234018}{52})^{112} - 1} = \$\ 45.05$$

Al depositar $ 45.05 cada semana, durante 112 semanas, se tendrá un monto por $ 6,500.00.

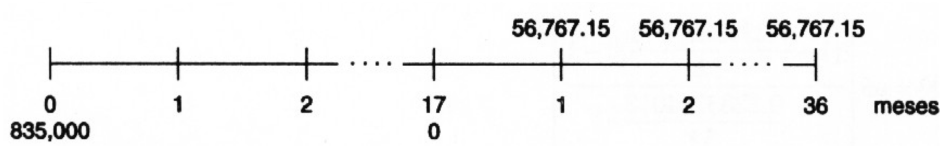
EJEMPLO 12.7

Un equipo industrial tiene un precio de contado de $ 900,000.00. Una fábrica lo adquiere mediante un pago inicial de $ 65,000.00 y 36 pagos mensuales de $

56,767.15, el primero con vencimiento al cabo de un año y medio. ¿Qué tasa nominal capitalizable cada bimestre se está cargando?

SOLUCION

El saldo insoluto o valor presente de la deuda es de $ 900,000 - $ 65,000 = $ 835,000 y el diagrama de tiempo es el siguiente:



En primer lugar es necesario obtener la tasa nominal capitalizable cada mes y, posteriormente, calcular la tasa equivalente capitalizable cada bimestre. El problema corresponde a una anualidad diferida; por tanto, al tomar como fecha focal un mes antes de que comiencen los pagos, se tendrá:

$$835{,}000\ (1 + i)^{17} = 56{,}767.15 \left[\frac{1 - (1 + i)^{-36}}{i} \right]$$

donde i es la tasa mensual, en forma decimal.

Recuerde el lector que la ecuación anterior se resuelve por prueba y error. Utilizando este método de resolución, se llega al siguiente resultado:

$i = 0.0266$ por mes

Por tanto:

$j = 2.66\%$ mensual

$j = 31.92\%$ anual, capitalizable cada mes

Para obtener la tasa equivalente capitalizable cada 2 meses se emplea la ecuación (12.1), donde:

$j = 31.92$
$m = 12$
$q = 6$

$$j_{eq} = (100)\ (6) \left[(1 + \frac{31.92}{(100)\ (12)})^{12/6} - 1 \right]$$

$$j_{eq} = 600\ [(1.0266)^2 - 1\}$$

$J_{eq} = 32.3445\%$ anual, capitalizable cada bimestre

EJEMPLO 72.8

Encuentre la tasa efectiva en el ejemplo anterior.

SOLUCION

La tasa efectiva se obtiene de la ecuación (7.3):

$j = 31.92\%$
$m = 12$

Por tanto:

$$i_e = \left((1 + \frac{0.3192}{12}\right)^{12} - 1 = 0.370298$$

$j_e = 37.0298\%$ anual

Otra forma de obtenerla es la siguiente:

$j = 32.3445\%$
$m = 6$

Por tanto:

$$i_e = \left((1 + \frac{0.323445}{6}\right)^{6} - 1 = 0.370298$$

$j_e = 37.0298\%$ anual

Ejercicios 12.1

1. Encontrar el monto y el valor actual de 10 pagos trimestrales de $1,500.00, si la tasa de interés es del 25% capitalizable cada mes.
2. Una compañía deposita $ 10,000.00 al final de cada mes en un fondo de depreciación que gana un interés del 19.5% capitalizable cada bimestre. ¿Cuánto habrá en el fondo al término de 2 años?
3. Resuelva el problema anterior si la compañía, en lugar de depositar $ 10,000 cada mes, deposita $ 120,000.00 al final de cada año.
4. Un automóvil cuyo precio de contado es de $ 63,000.00 es vendido con $ 6,300.00 de enganche y el saldo insoluto a pagar en 24 mensualidades, con una tasa de interés del 30% anual capitalizable cada semestre. Encuentre el valor de los pagos mensuales y el interés total pagado.
5. El Banco Nacional de Crédito Rural otorga un préstamo a un grupo de campesinos bajo la siguiente forma de pago: $ 45,000.00 trimestrales durante 5 años, debiéndose dar el primer pago dentro de 2 años. Encuentre el valor del préstamo, si la tasa de interés es del 20% con capitalización mensual.
6. Martín compra una casa en $ 234,000.00 a 20 años de plazo, dando un enganche del 5% del precio de contado y el saldo en pagos mensuales con el 31.75% de interés capitalizable cada año. Hallar el valor del pago mensual.
7. Una secretaria deposita cada quincena $ 80.00 de su sueldo en una cuenta de ahorros que paga el 18.793% capitalizable cada mes. ¿Cuántos depósitos debe hacer para reunir $ 2,692.00?

8. Una videocámara se vende en $ 5,310.00, al contado. A plazos, se vende en 18 mensualidades de $ 350.00 cada una, sin enganche. Hallar la tasa de interés efectiva que carga la tienda.
9. Una avioneta cuyo valor de contado es de $ 1'000,000.00 se vende con un pago inicial de $ 100,000.00 y el saldo en pagos mensuales de $ 31,850.00. Si la tasa de interés cargada es del 24% capitalizable cada semestre, encuentre el número de pagos necesarios para saldar la deuda.
10. Se conviene en pagar una deuda con abonos de $ 1,700.00, a comienzos de cada trimestre, durante 4 años. Hallar el valor de la deuda con la tasa del 30% capitalizable cada mes.
11. Suponiendo una tasa de interés del 35% convertible cada trimestre, ¿qué pagos iguales hechos al final de cada semestre, durante 4 años y 6 meses, amortizarán una deuda de $ 275,890.00?
12. La compañía Alfa-Omega, S.A., desea acumular $ 1'000,000.00 en un fondo de amortización, al término de 7 años. ¿Qué depósito hecho al final de cada bimestre es necesario, si el fondo paga un 39.5% capitalizable cada año?
13. Margarita compra un automóvil usado valuado en 3,400 dólares. Paga 340 dólares de cuota inicial y acuerda pagar 110 dólares al final de cada quincena. Hallar el número de pagos completos y el pago final, una quincena después, si la tasa de interés es del 14% capitalizable cada dos meses.
14. ¿Cuántos depósitos semestrales de $ 15,000.00 serán necesarios para obtener un monto de $ 200,000.00, si el dinero se deposita en una cuenta que paga el 2.7% mensual capitalizable cada mes?
15. Se puede comprar una litera que cuesta $ 1,070.00 mediante 18 pagos mensuales de $ 70.35, comenzando al momento de la compra. Determine la tasa de interés efectiva cargada.
16. Si David emplea 15 meses para pagar un préstamo de $ 1,350.00, a razón de $ 133.65 mensuales, ¿qué tasa nominal capitalizable semestralmente se está cargando?
17. En la compra de un equipo de sonido que cuesta $ 3,225.00, el plan a crédito consiste en 10 pagos quincenales anticipados de $ 349.70 cada uno. ¿Cuál es la tasa anual con capitalización mensual que se está cobrando?
18. El Sr. Jáuregui compra una pequeña fábrica para el cromado de la madera mediante un pago inicial de $ 500,000.00 y el resto a 2 años de plazo mediante pagos cuatrimestrales de $ 379,166.70 cada uno; el primero con vencimiento al final de un año. Hallar el valor de contado de la fábrica si la tasa de interés es de un 2.45% mensual convertible cada mes.
19. Una casa se puede comprar con 5,000 dólares de cuota inicial y 625 dólares al principio de cada mes, por los próximos 15 años. Con una tasa de interés del 12% capitalizable cada semestre, ¿cuál es el valor de contado de la casa?
20. Una compañía tiene establecido un plan de jubilación, equivalente a 180 días de sueldo nominal más 50 días de sueldo nominal por cada año de servicio. La forma de pago al trabajador es en una sola exhibición y se otorga cuando el trabajador tenga, al menos, 60 años de edad, independientemente de los años

trabajados en la compañía. El sueldo utilizado para el cálculo del pago es el devengado en el momento en que el trabajador solicita su retiro.

El señor Alberto León tiene 62 años de edad y desea jubilarse. Tiene trabajando en la compañía 24 años y actualmente gana $ 87.75 diarios. El dinero de la jubilación piensa depositarlo en una cuenta de inversión que le da un 17.35% capitalizable cada mes y de ahí retirar $ 1,000.00 cada quincena. ¿Cuántos retiros quincenales podrá efectuar en total?

TEMA ESPECIAL

EL SAR

¿Qué es el SAR?

El Sistema de Ahorro para el Retiro (SAR) es una prestación creada por el gobierno mexicano cuyos objetivos básicos son los siguientes:

- El SAR pretende aumentarlos recursos a disposición de los trabajadores al momento de su jubilación, muerte o incapacidad total o parcial.
- Aumentar el ahorro y la inversión a fin de sostener el crecimiento económico del país.

¿Cuándo se creó el SAR?

El SAR se creó mediante un Decreto Presidencial y entró en vigor el primero de mayo de 1992.

¿Cómo funciona el SAR?

El SAR consiste en la aportación obligatoria por parte de la empresa del 2% dei salario base de cotización de cada trabajador. Estos recursos se depositan en cuentas individuales en sociedades de inversión administradas por bancos, casas de bolsa y aseguradoras, a elección del trabajador.

El pago de las cuotas será por bimestre vencido, a más tardar el día 17 de los meses de enero, marzo, mayo, julio, septiembre y noviembre de cada año.

¿Qué pasará con la aportación al IMSS, sobre el plan de jubilación?

Aunque el SAR es una rama del seguro obligatorio y por lo tanto sujeta su administración a lo estipulado en la Ley del Seguro Social, no sustituye al sistema oficial de seguridad social manejado por el IMSS. Esto significa que un trabajador al momento de jubilarse recibirá dos pensiones: una del IMSS y otra del SAR.

¿Qué pasará con los fondos de pensiones privados?

Los fondos de pensiones privados son totalmente independientes del SAR. ¿Qué relación hay entre el SAR y el INFONAVIT?

La cuenta de cada trabajador se conforma por dos subcuentas: la del SAR y la del INFONAVIT (Instituto del Fondo Nacional de la Vivienda para los Trabajadores). La aportación a la subcuenta del INFONAVIT es el 5% del salario y deberá depositarse por bimestre vencido.

¿Se pueden realizar depósitos voluntarios en la subcuenta del SAR?

Sí se puede. El trabajador puede hacer aportaciones voluntarias deducibles de hasta 2% de su salario. Arriba de ese porcentaje, ya son gravables.

¿Qué tasa de interés se pagará sobre las aportaciones?

Los recursos ahorrados tendrán un rendimiento garantizado de entre 2% y 6% anual real. Lo anterior significa que se ganará, aproximadamente, entre 2 y 6 puntos porcentuales arriba de la tasa de inflación. Por ejemplo, en 1992 hubo una inflación del 11.2% anual. En estas condiciones, el dinero invertido en el SAR habría ganado intereses a una tasa nominal de entre 13.2% y 17.2% anual.

La tasa de interés la determinará la S.H.C.P. y será publicada en el Diario Oficial, cuando menos cada 3 meses.

Los intereses se aplicarán cada mes y se capitalizarán.

¿Cuándo se podrá disponer del dinero ahorrado en el SAR?

Un trabajador podrá contar con su dinero ahorrado en el SAR de la siguiente manera:

- En el momento de su jubilación a los 65 años de edad, o bien a la edad que establezca la empresa en que labore. El trabajador podrá disponer de su dinero en una sola exhibición o mediante una pensión vitalicia.
- Por incapacidad permanente total o por incapacidad permanente parcial del 50% o más.
- En caso de incapacidad temporal o desempleo el trabajador podrá retirar el 10% del saldo de la subcuenta del SAR. Este retiro podrá hacerse cada 5 años a partir del primero de enero de 1997.

En caso de muerte, los beneficiarios del trabajador recibirán el ahorro.

¿Qué pasará con la subcuenta del INFONAVIT?

Si un trabajador no pide préstamo para vivienda durante su vida laboral, recibirá el total de lo ahorrado en la subcuenta del INFONAVIT cuando se retire, o sus beneficiarios en caso de fallecimiento.

De esta subcuenta no se podrán hacer retiros parciales por incapacidad temporal o desempleo.

¿Quién decide en qué banco hacer los depósitos del SAR y del INFONAVIT?

El patrón. El trabajador, si lo desea, podrá transferir su cuenta individual al banco de su elección, pero el patrón seguirá haciendo la aportación al banco que seleccionó. Por este movimiento se le cobrará al trabajador una comisión.

¿Será suficiente la cantidad que al final de la vida laboral otorgue el SAR a un trabajador para que éste viva dignamente?

De entrada diremos que el SAR difícilmente les permitirá a los trabajadores un ahorro suficiente para su jubilación. La afirmación anterior será avalada mediante el análisis del siguiente ejemplo hipotético:

Daniel es un trabajador que tiene 25 años de edad y empieza a trabajar formalmente. Espera trabajar un periodo de 40 años; de los 25 a los 65 años de edad. Con el fin de simplificar los cálculos, se harán las siguientes suposiciones:

- Daniel percibe un sueldo mensual de $ 3,000.00*, el cual se supondrá que se va a mantener constante, en cuanto a poder adquisitivo se refiere, durante los próximos 40 años.
- El banco pagará sobre los depósitos hechos al SAR una tasa de interés del 4% anual real; esto es, descontando la inflación. Esta tasa de interés es el promedio de las tasas mínima (2%) y máxima (6%) que se pagarán a los depósitos hechos al SAR.

Las suposiciones anteriores permiten que el análisis se lleve a cabo a valor actual.

Si Daniel gana $ 3,000.00 al mes, al bimestre ganará $ 6,000.00. El 2% de ese sueldo son $ 120.00, que es la cantidad que la empresa le depositará en la parte de la cuenta correspondiente al SAR.

Como la tasa de interés tiene un periodo de capitalización que no coincide con el periodo de los depósitos, es necesario obtener la tasa de interés equivalente. Sin embargo, como la tasa real es pequeña, la tasa equivalente con capitalización bimestral será prácticamente igual a 4%.

Después de 40 años de trabajo, 240 aportaciones bimestrales, Daniel tendrá un monto de:

$$F = 120\left[\frac{(1+\frac{0.04}{6})^{240}-1}{(\frac{0.04}{6})}\right]$$

$$F = \$\ 70,682.45$$

Al momento de jubilarse Daniel tendrá un fondo de retiro por $ 70,682.45. Esta cantidad pudiera parecer poca, pero recuérdese que estamos hablando a valor presente, es decir, al momento de jubilarse Daniel tiene una cantidad de dinero X en su fondo de retiro, esta cantidad X tiene un valor adquisitivo de $ 70,682.45 de cuando él tenía 25 años de edad.

Al jubilarse una persona, por lo general, su nivel de gasto no es igual al que tuvo durante su vida laboral; por tanto, supongamos que Daniel vive bien con el 70% de su sueldo.

Esto es:

---

* *Esta cantidad representa un "buen sueldo" ya que de acuerdo a estadísticas laborales, actualmente (1993) el 84% de los trabajadores del sector privado ganan menos de $ 2,000.00 al mes y en el sector público el 96% de los trabajadores ganan menos de $ 2,000.00 al mes.*

70% de $ 3,000 = $ 2,100

¿En cuanto tiempo se agotará el fondo de retiro, suponiendo que se encuentra invertido al 4% anual real?

$$70{,}682.45 = 2{,}100\left[\frac{1-(1+\frac{0.04}{12})^{-n}}{(\frac{0.04}{12})}\right]$$

$$n = 35.76 \text{ meses}$$

En aproximadamente 3 años se termina el dinero del fondo de retiro. Si Daniel no muere en ese intervalo de tiempo, ¿cómo le va a hacer para vivir? ¿Buscará trabajo?

Si Daniel desea que el dinero le dure más tiempo tendrá que disponer de una cantidad menor a $ 2,100.00 mensuales. El lector puede calcular la cantidad que se tendría que retirar cada mes si se supone una esperanza de vida de 15 años.

Con lo anterior se demuestra que el SAR es insuficiente para cubrir el retiro de una persona y que ésta viva dignamente. Sin embargo, el SAR es una muy buena idea, ya que en un futuro las aportaciones al IMSS podrían reducirse para aumentar la cuota del SAR y con esto incrementar el fondo de retiro. Por otro lado, dado que los trabajadores tienen la opción de realizar aportaciones voluntarias es posible aumentar de esta manera el monto del fondo de retiro. En este caso la pregunta sería: ¿cuánto hay que ahorrar para que con el monto obtenido al final de la vida de trabajo se pueda vivir cómodamente y sin angustia?

Supóngase que Daniel tiene una esperanza de vida de 15 años, después de jubilarse a los 65 años de edad y que él piensa que con una mensualidad de $ 2,100 puede vivir, entonces el valor actual del fondo de retiro, al momento de la jubilación, debe ser de:

$$P = 2{,}100\left[\frac{1-(1+\frac{0.04}{12})^{-180}}{(\frac{0.04}{12})}\right]$$

$$P = \$\ 283{,}903.51$$

Para obtener este monto al final de la vida de trabajo, se debe de ahorrar:

$$A = \frac{(283{,}903.51)\ (\frac{0.04}{6})}{\left[(1+\frac{0.04}{6})^{240}-1\right]}$$

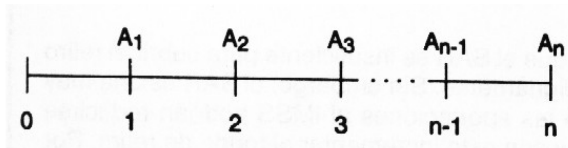
$$A = \$\ 481.99 \text{ cada bimestre}$$

Se debe ahorrar $ 241.00 cada mes, lo cual representa el 8% del sueldo mensual. Esto es, Daniel deberá aportar un 6% de su sueldo y la empresa el 2%.

De lo anterior se puede observar que los trabajadores que resultarán más afectados serán los que tengan cierta antigüedad en el trabajo y que les falta sólo unos años para jubilarse.

ANUALIDADES VARIABLES

Una anualidad variable es aquella cuyos pagos son diferentes entre sí. Si A_1, A_2, A_3, ..., A„ son los pagos hechos al final de los periodos, se tiene el siguiente diagrama de tiempo:



Si $A_1 < A_2 < A_3 < ... <$ A,,, entonces se dice que la anualidad es del tipo creciente. Si $A_1 > A_2 > A_3 > ... > A_n$, se tiene una anualidad variable decreciente. Si la anualidad es variable y no se corresponde a uno de los tipos anteriores, entonces se tiene una anualidad variable sin dirección.

Cualquiera que sea el tipo de la anualidad variable, el monto F a la tasa i por periodo de capitalización de la anualidad variable representada en el diagrama de tiempo anterior, se puede calcular formulando una ecuación de valor. Si se escoge como fecha focal el final del periodo n, entonces:

$$F = A_1(1+i)^{n-1} + A_2(1+i)^{n-2} + A_3(1+i)^{n-3} + ... + A_{n-1}(1+i) + A_n \qquad (12.2)$$

El valor actual P de la anualidad variable anterior viene dado por

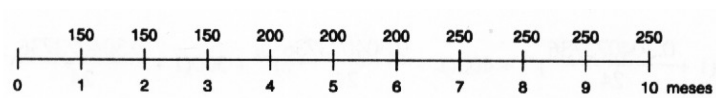
$$P = A_1(1+i)^{-1} + A_2(1+i)^{-2} + A_3(1+i)^{-3} + ... + A_n(1+i)_{-n} \qquad (12.3)$$

En este caso, la fecha focal se escogió en el momento actual.

EJEMPLO 12.9

El Banco Nacional ofrece un interés del 18% capitalizable cada mes en las cuentas de ahorros. Ricardo planea depositar \$ 150.00 cada fin de mes, durante 3 meses, en una cuenta de ahorros de dicho banco. Los siguientes tres meses piensa depositar \$ 200.00 y, posteriormente, depositar \$ 250.00 mensuales durante 4 meses. Hallar el monto de lo ahorrado.

SOLUCION



De acuerdo a la ecuación (12.2),

$$F = 150\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^9 + 150\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^8 + 150\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^7 + 200\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^6 +$$

$$200\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^5 + 200\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^4 + 250\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^3 + 250\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^2 + 250\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^1 + 250$$

$$F = 150(1.015^9 + 1.015^8 + 1.015^7) + 200(1.015^6 + 1.015^5 + 1.015^4)$$

$$+ 250(1.015^3 + 1.015^2 + 1.015 + 1)$$

$$F = 150(3.379727475) + 200(3.232090818) + 250(4.090903375)$$

$$F = \$\ 2,176.10$$

EJEMPLO 12.10

Rafael compró un horno de microondas a crédito. El pago se hará mediante 4 abonos quincenales vencidos, de la siguiente forma: $ 500 dentro de 15 días; $ 400 dentro de un mes; $ 300 dentro de un mes y medio y $ 200 dentro de dos mes. Si la tasa de interés cobrada es del 2.55% mensual capitalizable cada mes, obtenga el precio de contado.

SOLUCION

El periodo de capitalización no coincide con el periodo de pagos; por tanto, se debe calcular primero la tasa de interés equivalente.

j = 2.55% mensual = 30.6% anual

m=12

q=24

Por tanto:

$$j_{eq} = (100)\,(24)\left[(1 + \frac{30.6}{(100)\,(12)})^{12/24} - 1\right]$$

$$j_{eq} = 30.4073736\% \text{ capitalizable cada quincena}$$

Para obtener el valor presente (o precio de contado) de los pagos quincenales, se utiliza la ecuación (12.3).

$$P = 500\,(1 + \frac{0.304073736}{24})^{-1} + 400(1 + \frac{0.304073736}{24})^{-2} + 300(1 + \frac{0.304073736}{24})^{-3}$$

$$+ 200(1 + \frac{0.304073736}{24})^{-4}$$

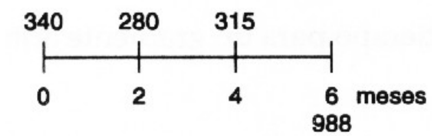
$$P = 500(0.987488775) + 400(0.9751340807) + 300(0.9629339587) + 200\,(0.9508864753)$$

$$P = \$\ 1,362.85$$

EJEMPLO 12.11

Susana abrió una cuenta de ahorros depositando $ 340. Dos meses después depositó $ 280 y dos meses más tarde hizo un depósito por $ 315. Pasados dos meses del último depósito, Susana retiró su dinero recibiendo $ 988 en total. Si la capitalización de los intereses es mensual, obtenga la tasa de interés que le pagó el banco.

SOLUCION



Si se toma como fecha focal la fecha de retiro del dinero, se puede formular la siguiente ecuación de valor:

$340(1 + i)^6 + 280(1 + i)^4 + 315(1 + i)^2 = 988$

donde i es la tasa mensual de interés, en forma decimal.

La ecuación de valor anterior se puede resolver mediante métodos analíticos; sin embargo, resulta más sencillo resolverla mediante prueba y error, o bien mediante una calculadora programable.

El valor de i que satisface a la ecuación de valor es:

$i = 0.013630996$

valor obtenido por medio de una calculadora programable.

Por tanto:

$j = 1.3630996\%$ mensual

$j = 16.357\%$ anual

La mayor parte de las anualidades variables son del tipo creciente o decreciente y los aumentos o disminuciones se llevan a cabo de una manera constante.

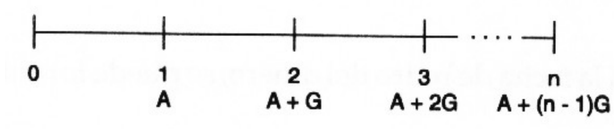
Una serie de gradiente es una serie de pagos hechos a iguales intervalos de tiempo y que aumentan o disminuyen de acuerdo a una regla establecida. La cantidad constante de aumento o disminución recibe el nombre de gradiente y la cantidad usada como inicio de la serie recibe el nombre de base.

Básicamente hay dos clases de gradientes: el gradiente aritmético o lineal y el gradiente geométrico.

Gradiente Aritmético

En este tipo de gradiente los pagos varían en progresión aritmética; esto es, cada pago es igual al anterior más o menos una cantidad constante. Si la cantidad constante es positiva, el gradiente es creciente; si la cantidad constante es negativa, el gradiente es decreciente.

A continuación se muestra la gráfica de tiempo para un gradiente aritmético creciente.



En este diagrama A es la base y G es el gradiente.

Sea P el valor presente de la serie de gradiente anterior. Si se toma como fecha focal el momento actual, se tiene:

$$P = A(1+i)^{-1} + (A+G)(1+i)^{-2} + (A+2G)(1+i)^{-3} + \dots + [A+(n-1)G](1+i)^{-n}$$

Donde i es la tasa de interés por periodo.

$$P = A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + G(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + 2G(1+i)^{-3} + \dots + A(1+i)^{-n} + (n-1)G(1+i)^{-n}$$

Reacomodando términos:

$$P = [A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + \dots + A(1+i)^{-n}] + [G(1+i)^{-2} + 2G(1+i)^{-3} + \dots + (n-1)G(1+i)^{-n}]$$

El primer corchete de la igualdad anterior es la serie de una anualidad ordinaria.

Por tanto:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + [G(1+i)^{-2} + 2G(1+i)^{-3} + \dots + (n-1)G(1+i)^{-n}]$$

Sacando a G como factor común:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + G[(1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3} + \dots + (n-1)(1+i)^{-n}] \qquad (1)$$

Sea:

$$L = (1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3} + \dots + (n-1)(1+i)^{-n}$$

Al resolver la suma anterior ser tiene:

$$L = \frac{(1+i)^n - ni - 1}{i^2(1+i)^n} \qquad (2)$$

Sustituyendo la expresión (2) en la ecuación (1) se tiene:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + G\left[\frac{(1+i)^n - ni - 1}{i^2(1+i)^n}\right] \qquad (12.4)$$

La ecuación (12.4) es la fórmula general para obtener el valor presente de una serie de gradiente aritmético.

Para calcular el valor futuro de la serie de gradiente aritmético, se utiliza la fórmula del interés compuesto:

$$F = P(1+i)^n$$

Donde P es sustituida por la ecuación (12.4).

$$F = \left[A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + G\left[\frac{(1+i)^{n}-ni-1}{i^{2}(1+i)^{n}}\right]\right](1+i)^{n}$$

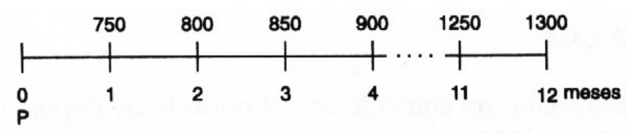
$$F = A(1+i)^{n}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + G(1+i)^{n}\left[\frac{(1+i)^{n}-ni-1}{i^{2}(1+i)^{n}}\right]$$

$$F = A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] + G\left[\frac{(1+i)^{n}-ni-1}{i^{2}}\right] \qquad (12.5)$$

EJEMPLO 12.12

Guillermo pide prestada una cierta cantidad de dinero y firma un contrato-pagaré mediante el cual se estipula la obligación de pagar \$ 750.00 cada final de mes, durante un año, aumentando sus pagos sucesivos en \$ 50.00 cada mes. Si la tasa de interés es del 32% anual con capitalización mensual, encuentre la cantidad de dinero que Guillermo pidió prestada.

SOLUCION



El valor del pago número 12 se obtiene utilizando la ecuación (3.1)

$a_{12} = 750 + (12-1)(50)$

$a_{12} = 1{,}300$

En este problema los pagos forman una progresión aritmética, donde la base es \$ 750.00 y el gradiente es igual a \$ 50.00.

Esto es:

$A = 750$

$G = 50$

$n = 12$

$i = 0.32/12$ por mes

Sustituyendo estos valores numéricos en la ecuación (12.4), se tiene:

$$P = 750\left[\frac{1-(1+0.32/12)^{-12}}{0.32/12}\right] + 50\left[\frac{(1+0.32/12)^{12}-(12)(0.32/12)-1}{(0.32/12)^{2}(1+0.32/12)^{12}}\right]$$

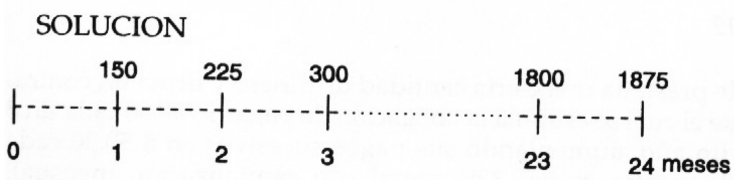
$$P = 750(10.155012679) + 50(52.6731276147)$$

$$P = \$\,10{,}249.90$$

EJEMPLO 12.13

Pablo desea ahorrar cada fin de mes \$ 150.00 durante 2 años, aumentando sus depósitos sucesivos en \$ 75.00 cada mes. Encuentre el monto al cabo de dos años, si la tasa de interés es del 21% capitalizable cada 3 meses.

SOLUCION



Depósito en el mes 24 = 15 + (24–1)(75)

Depósito en el mes 24 = $ 1,875

El periodo de capitalización no coincide con el periodo de depósito; por tanto, es necesario encontrar la tasa de interés equivalente.

Si

$j = 21\%$
$m = 4$
$q = 12$

Entonces, por la ecuación (12.1),

$j_{eq} = 20.642857476\%$ capitalizable cada mes

En este ejemplo:

$A = 150$
$G = 75$
$n = 24$
$i = 0.20642857476/12 = 0.01720238123$ por mes

Sustituyendo los datos en la ecuación (12.5), se tiene:

$$F = 150\left[\frac{(1+0.01720238123)^{24}-1}{0.01720238123}\right] +$$

$$75\left[\frac{(1+0.01720238123)^{24}-(24)\,(0.01720238123)-1}{(0.01720238123)^{2}}\right]$$

$$F = 150(29.4048296237) + 75(314.190782743)$$

$$F = \$\ 27{,}975.05$$

EJEMPLO 12.14

Encuentre el interés ganado en el ejemplo anterior.

SOLUCION

Para calcular la cantidad total depositada por Pablo, se emplea la ecuación (3.4):

$$S_{24} = \frac{24\,(150+1875)}{2} = 24{,}300$$

Si Pablo depositó un total de \$ 24,300.00 y el monto obtenido fue de \$ 27,975.05, entonces el interés ganado fue:

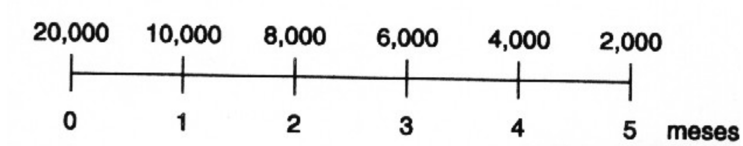
I = 27,975.05 - 24,300.00

I = \$ 3,675.05

EJEMPLO 12.15

La compañía ALFA-OMEGA, S.A., ha firmado un contrato según el cual tiene que hacer los siguientes pagos: \$ 20,000.00 de inmediato; \$ 10,000.00 al final del primer mes; \$ 8,000.00 al final del segundo; \$ 6,000.00 al final del tercero; \$ 4,000.00 al final del cuarto y \$ 2,000.00 al final del quinto mes. ¿Qué cantidad de dinero debe invertir la compañía en un fondo especial que gana el 22% capitalizable en forma mensual, para poder hacer los pagos indicados?

SOLUCION



En este caso la serie de gradiente es decreciente, donde:

A = 10,000

G = -2,000

n = 5

i = 0.22/12

Sustituyendo:

$$P = 10{,}000\left[\frac{1-(1+0.22/12)^{-5}}{0.22/12}\right] + (-2{,}000)\left[\frac{(1+0.22/12)^{5}-(5)(0.22/12)-1}{(0.22/12)^{2}(1+0.22/12)^{5}}\right]$$

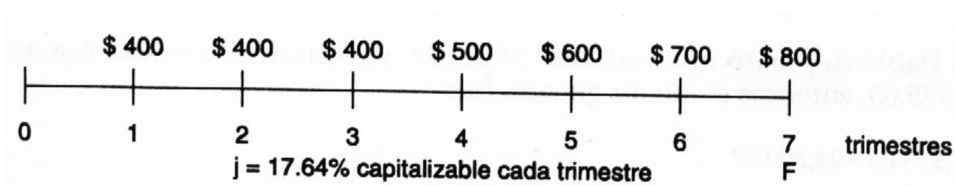
$$P = 10{,}000\,(4.73634635706) - 2{,}000(9.30062396575)$$

$$P = \$\,28{,}762.20$$

La cantidad de dinero que debe invertirse es de \$ 28,762.20. Esta cantidad no toma en cuenta el pago inmediato de \$ 20,000.00.

EJEMPLO 12.16

Hallar el valor futuro de la siguiente serie de gradiente:



SOLUCION

En este problema el inicio de la serie de gradiente se encuentra en el periodo 2 y los pagos de \$ 400 que se encuentran en los periodos 1 y 2 forman una anualidad vencida. Por tanto, el problema se resuelve manejándolo en dos partes.

1a. Parte.

Cálculo del valor futuro de la serie de gradiente.

$$F_1 = 400\left[\frac{(1+0.1764/4)^5 - 1}{0.1764/4}\right] + 100\left[\frac{(1+0.1764/\,4)^5 - 5\,(0.1764/\,4) - 1}{(0.1764/\,4)^2}\right]$$

$$F_1 = 400(5.46088071293) + 100(10.4508098169)$$

$$F_1 = \$\ 3{,}229.45$$

2a. Parte.

Cálculo del valor futuro de la anualidad ordinaria.

$$F_2 = 400\left[\frac{(1+0.1764/\,4)^2 - 1}{0.1764/\,4}\right](1+0.1764/4)^5$$

$$F_2 = 1{,}014.55$$

$$\text{Valor futuro} = F = F_1 + F_2$$

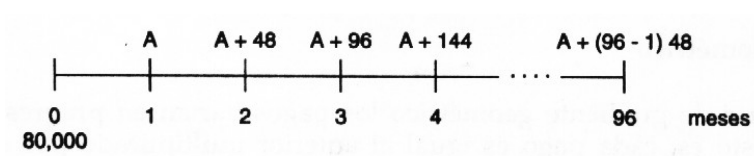
$$F = 3{,}229.45 + 1{,}014.55$$

$$F = \$\ 4{,}244$$

EJEMPLO 12.17

Sergio desea comprar un terreno que tiene un precio de contado de \$ 95,500.00. Si ofrece pagar de contado \$ 15,500.00 y el resto lo va a pagar mediante una amortización mensual durante 8 años, ¿cuál debe ser el valor del primer pago si cada uno de los pagos siguientes puede ser incrementado en \$ 48.00? La tasa de interés es del 27.6% capitalizable cada mes.

SOLUCION



Aplicando la ecuación (12.4):

$$80{,}000 = A\left[\frac{1-(1+0.276/\,12)^{-96}}{0.276/\,12}\right] + 48\left[\frac{(1+0.276/\,12)^{96} - 96\,(0.276/12\,) - 1}{(0.276/12\,)^2\,(1+0.276/12\,)^{96}}\right]$$

$$80{,}000 = A\,(38.57808883) + \ 57{,}930.80136$$

EJEMPLO 12.18

Una persona desea comprar un disco compacto interactivo cuyo precio de contado es de $ 4,000.00. Lo puede adquirir sin enganche a 6 meses de plazo. Si la tasa de interés es del 33% capitalizable mensualmente, ¿cuál debe ser el valor de su primera mensualidad, si cada uno de los siguientes pagos se incrementarán en $ 95.00? Elabórese la tabla de amortización.

SOLUCION

$$4{,}000 = A\left[\frac{1-(1+0.33/12)^{-6}}{0.33/12}\right] + 95\left[\frac{(1+0.33/12)^{6}-(6)\,(0.33/12)-1}{(0.33/12)^{2}\,(1+0.33/12)^{6}}\right]$$

$$4{,}000 = A(5.462366778) + 1{,}256.270659$$

$$A = \$\ 502.30$$

La primera mensualidad será de $502.30

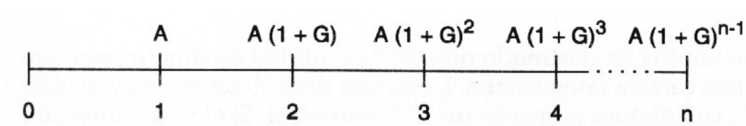
Mes	Saldo insoluto	Intereses sobre el saldo insoluto	Pago mensual	Amortización
0	4,000.00			
1	3,607.70	110.00	502.30	392.30
2	3,109.62	99.21	597.30	498.08
3	2,502.84	85.51	692.30	606.78
4	1,784.37	68.83	787.30	718.47
5	951.14	49.07	882.30	833.23
6	0	26.16	977.30	951.14

Gradiente Geométrico

En una serie de gradiente geométrico los pagos varían en progresión geométrica; esto es, cada pago es igual al anterior multiplicado por una constante G, llamada el gradiente geométrico. Si G > 0, la serie de gradiente será creciente, si G < 0, la serie de gradiente será decreciente.

En seguida se muestra la gráfica de tiempo para un gradiente geométrico.

La situación más común que se presenta en las series de gradiente geométrico es que el gradiente sea un porcentaje fijo. En este caso, cada pago es igual al anterior multiplicado por la constante (1 + G), donde G es el gradiente en porcentaje en forma decimal, es decir, dividido entre 100. Para esta situación el diagrama de tiempo es el siguiente:



Sea P el valor presente de la serie de gradiente con gradiente en porcentaje fijo y sea i la tasa de interés por periodo. Si se toma como fecha focal el momento actual, entonces:

$$P = A(1+i)^{-1} + A(1+G)(1+i)^{-2} + A(1+G)^2(1+i)^{-3} +$$

$$\ldots + A(1+G)^{n-1}(1+i)^{-n} \qquad (1)$$

Multiplicando la ecuación (1) por $(1 + G)(1 + i)^{-1}$, se tiene:

$$P(1+G)(1+i)^{-1} = A(1+G)(1+i)^{-2} + A(1+G)^2(1+i)^{-3} +$$

$$+ A(1+G)^3(1+i)^{-4} + \ldots + A(1+G)^n(1+i)^{-n-1} \qquad (2)$$

Restando la ecuación (1) de la ecuación (2) resulta:

$$P(1+G)(1+i)^{-1} - P = A(1+G)^n(1+i)^{-n-1} - A(1+i)^{-1}$$

Factorizando se tiene:

$$P[(1+G)(1+i)^{-1} - 1] = A(1+i)^{-1}[(1+G)^n(1+i)^{-n} - 1]$$

$$P = \frac{A(1+i)^{-1}[(1+G)^n(1+i)^{-n} - 1]}{(1+G)(1+i)^{-1} - 1}$$

$$P = \frac{A(1+i)^{-1}[(1+G)^n(1+i)^{-n} - 1]}{(1+i)^{-1}[(1+G) - (1+i)]}$$

$$P = \frac{A[(1+G)^n(1+i)^{-n} - 1]}{G - i} \qquad (12.6)$$

El valor futuro se obtiene sustituyendo la ecuación (12.6) en la fórmula del interés compuesto $F = P(1 + i)^n$:

$$F = \left[\frac{A[(1+G)^n(1+i)^{-n} - 1]}{G - i}\right](1+i)^n$$

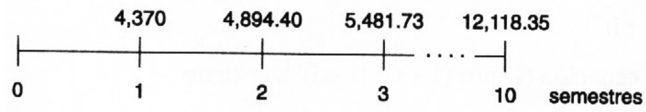
$$F = \frac{A[(1+G)^n(1+i)^0 - (1+i)^n]}{G - i}$$

$$F = \frac{A[(1+G)^n - (1+i)^n]}{G - i} \qquad (12.7)$$

EJEMPLO 12.19

Un padre de familia ha destinado una cierta cantidad de dinero para que su hijo estudie una carrera universitaria. La carrera dura 10 semestres y debido a la inflación, la colegiatura aumenta un 12% semestral. Si el padre deposita el dinero en una cuenta bancaria que paga el 18% capitalizable cada semestre, ¿qué cantidad de dinero se tendrá que depositar en la cuenta, si la colegiatura correspondiente al primer semestre es de $ 4,370.00?

SOLUCION



Los datos son los siguientes:

A = 4,370

G = 0.12

n=10

i = 0.18/2

Sustituyendo los datos en la ecuación (12.6), se tiene:

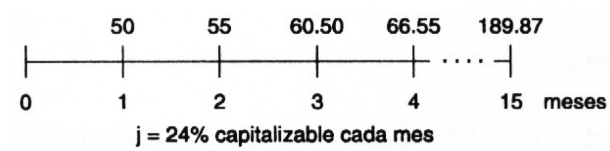
$$P = 4{,}370 \frac{[(1.12)^{10}(1+0.18/2)^{-10}-1]}{(0.12-0.18/2)}$$

$$P = \frac{4{,}370\ (0.311943847 78)}{0.03} = \$\ 45{,}439.80$$

El padre de familia tiene que depositar $ 45,439.80 en este momento; con ese dinero se pagará la colegiatura de los próximos 10 semestres.

EJEMPLO 12.20

Encuentre el monto de la siguiente serie de gradiente geométrico.



SOLUCION

Se identifica una serie de gradiente geométrico si el cociente entre dos pagos sucesivos cualesquiera es constante.

$$\frac{55}{50} = \frac{60.50}{55} = \frac{66.55}{60.50} = 1.1$$

Por lo tanto:

$$(1 + G) = 1.1$$

y

$$G = 0.10 = 10\%$$

Esto significa que cada pago es igual al anterior incrementado en un 10%.

En este ejemplo se tienen los siguientes datos:

A = 50

G = 0.10

n=15 i=0.24/12=0.02

Sustituyendo los datos en la ecuación (12.7), se tiene:

$$F = \frac{50\,[(1.10)^{15} - (1.02)^{15}]}{0.10 - 0.02}$$

$$F = \frac{50\,(2.8313798311)}{0.08}$$

$$F = \$\,1{,}769.60$$

EJEMPLO 12.21

Encuentre el interés ganado en el ejemplo anterior.

SOLUCION

Para obtener el interés ganado es necesario calcular la cantidad total depositada a lo largo de los 15 meses. Esto se lleva a cabo utilizando la ecuación (3.8):

$$S\,15 = \frac{50\,(1.10^{15} - 1)}{1.10 - 1} = \$\,1{,}588.60$$

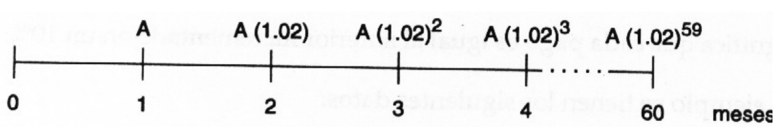
Si se depositó un total de $ 1,588.60 y el monto fue de $ 1,769.60, el interés ganado fue $1,769.60 - $ 1,588.60 = $ 181.00

EJEMPLO 12.22

Un banco le presta a un cliente $ 560,000.00 con un interés del 35% capitalizable cada mes. El deudor tiene un plazo de 5 años para amortizar la deuda. Si el primer pago vence dentro de un mes y de ahí en adelante cada pago se reajusta en un 2% más, ¿cuál debe ser el valor del primer pago mensual?

SOLUCION

Como G = 0.02, entonces (1 + G) = 1.02.



Por la ecuación (12.6) se tiene:

$$560{,}000 = \frac{A\,[(1.02)^{60}\,(1 + 0.35/12\,)^{-60} - 1]}{(0.02 - \frac{0.35}{12})}$$

$$560{,}000 = \frac{A\,(-\,0.4153881518)}{-\,0.009166666666}$$

Por tanto:

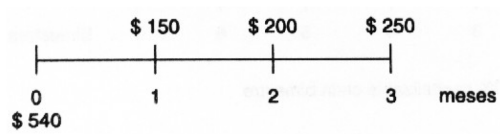
$$A = \$\,12{,}357.90$$

Ejercicios 12.2

1. Un comerciante renta por 5 años una bodega. El contrato de arrendamiento estipula que: "durante el primer año se pagará una renta semestral vencida de $ 24,000.00; el segundo año la renta semestral vencida será de $ 27,600.00; el tercer año será de $ 33,120.00 cada semestre vencido y en el cuarto y quinto años será de $ 41,400.00 semestrales. Si el costo promedio del dinero es del 2% mensual capitalizable cada semestre, encuentre el valor actual de la renta de la bodega.
2. Cada bimestre una persona deposita una cantidad diferente de dinero en una cuenta de ahorros que paga 20% anual capitalizable cada mes. ¿Qué cantidad habrá en la cuenta al cabo de un año sabiendo que los depósitos bimestrales serán los siguientes:

Número de bimestre	Cantidad a depositar
1	$ 235
2	$ 170
3	$ 210
4	$ 325
5	$ 370
6	$ 290

3. Utilice el siguiente diagrama de tiempo para calcular la tasa de interés anual capitalizable cada mes.



4. La compañía HT&T tiene establecido un fondo de jubilación para sus empleados. Si un empleado se jubila en este momento, la compañía le dará su fondo de jubilación en 6 pagos anuales anticipados, como sigue:

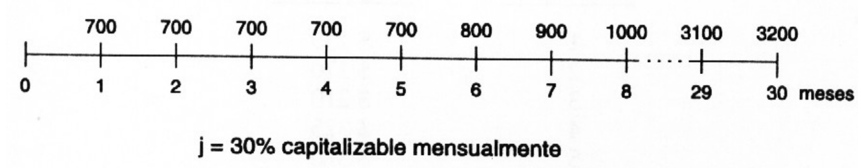
Número de pago	Cantidad a recibir
1	$ 30,000
2	$ 34,500
3	$ 39,675
4	$ 45,626
5	$ 52,470
6	$ 60,341

Si el fondo gana un 18.45% capitalizable cada mes, encuentre su valor presente.

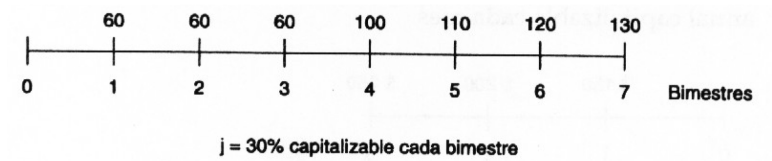
5. José acaba de abrir un minisuper yen el primer mes de operaciones tuvo ventas por $ 6,420.00, sin embargo, estima que sus ventas, a partir del segundo mes, se incrementarán con un gradiente de $ 3,000.00 mensuales, estabilizándose al cabo de 8 meses. Hallar el valor presente de sus ventas en los primeros 8 meses, suponiendo una tasa de interés del 24% capitalizable cada mes.
6. ¿Cuánto dinero deberá depositarse inicialmente en una cuenta de ahorros que paga el 23% anual con capitalización trimestral, para proporcionar suficiente

dinero para 20 retiros semestrales que comienzan con $ 10,000.00 y disminuyen $ 600.00 cada semestre?

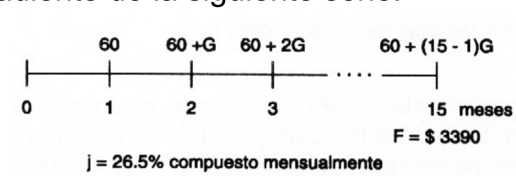
7. Hallar el valor futuro de la siguiente serie de gradiente.



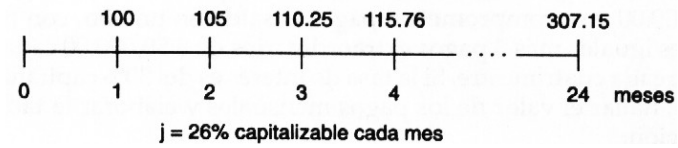
8. Hallar el valor presente de la siguiente serie de gradiente.



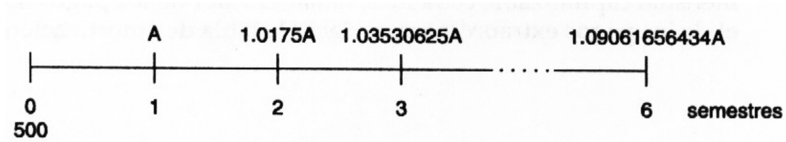
9. El gerente de producción de una aceitera está pensando en comprar una máquina que cuesta $ 187,000.00 y tiene una vida útil de 10 años. El mantenimiento de la máquina costará $ 10,000.00 los primeros dos semestres; $ 13,500.00 el tercer semestre; $ 17,000.00 el cuarto semestre; $ 20,500.00 el quinto semestre; etc. Si el costo promedio del dinero es de un 18% capitalizable cada mes, ¿cuánto dinero deberá invertir la compañía en un fondo de mantenimiento, al principio, para pagar los costos de mantenimiento?
10. Una persona desea comprar una casa a un costo de $ 270,000.00. Ofrece un pago inmediato de $ 70,000.00 y el resto lo va a pagar mediante una amortización mensual durante 12 años. ¿Cuál debe ser el valor del primer pago si cada uno de los pagos siguientes puede decrecer en $ 140.00? La tasa de interés es del 25% compuesto cada mes.
11. La señora Aguirre, mediante depósitos quincenales, desea acumular $ 85,000.00 al cabo de dos años. Si la tasa de interés es del 1.5% mensual compuesto cada mes, ¿cuál debe ser el valor del primer depósito si cada uno de los siguientes depósitos puede aumentar en $ 52.00?
12. Hallar el valor del gradiente de la siguiente serie.



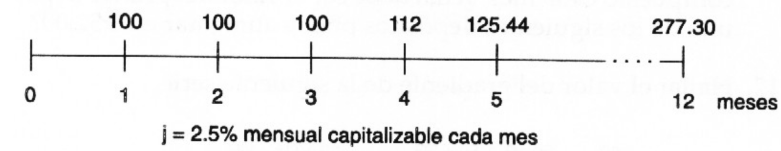
13. Resuelva el ejemplo 12.18 si la tasa de interés es del 18% capitalizable en forma mensual.
14. Guillermo planea jubilarse el próximo año. Debido a esto está planeando un fondo de retiro a 20 años. Con objeto de tener su pensión y compensar los efectos anticipados de la inflación piensa retirar $ 3,500.00 al final del primer mes y aumentar la cantidad que retira en un 1% cada uno de los siguientes meses. ¿Cuánto dinero deberá tener en el fondo de retiro al principio de su jubilación, si el dinero está invertido al 19% compuesto cada mes?
15. Encuentre el monto y el interés total ganado de la siguiente serie de gradiente.



16. Suponiendo una tasa de interés del 33% compuesto cada semestre, encuentre el valor del primer pago en la siguiente gráfica de tiempo.



17. Encuentre el monto de la siguiente serie de gradiente.



18. *Un banco le presta a un cliente \$ 11000,000.00 con un interés del 32% capitalizable cada mes. El deudor tiene un plazo de 10 años para amortizar la deuda mediante pagos mensuales. El primer pago vence dentro de un mes y de ahí en adelante cada pago se aumentará en un 2% mensual durante 10 meses, de tal manera que a partir del doceavo mes, y hasta la total liquidación de la deuda, los pagos se mantendrán del mismo valor que el pago número 11. Calcule la cantidad que se deberá pagar al final del primer mes.
19. Elaborar la tabla de amortización para una deuda de \$ 2,500.00 que se va a liquidaren 8 pagos mensuales, con el 28% de interés capitalizable cada mes, si los pagos se incrementan en \$ 40.00 cada mes.
20. Resuelva el ejercicio 19 si los pagos decrecen en \$ 40.00 de un mes a otro.
21. Elaborar una tabla para amortizar \$ 100,000.00 en 2 años y 6 meses mediante pagos semestrales vencidos y crecientes en un 10%. La tasa de interés es del 30% anual capitalizable semestralmente.
22. *Una imprenta se vende en \$ 385,000.00. El comprador da un enganche de \$ 80,000.00 y se compromete a pagar el saldo en un año, con pagos mensuales iguales más 3 pagos extraordinarios de \$ 50,000.00 cada uno al final de cada cuatrimestre. Si la tasa de interés es del 30% capitalizable cada mes, hallar el valor de los pagos mensuales y elaborar la tabla de amortización.
23. Se va a amortizar una deuda de \$ 2,500.00 en un año mediante pagos bimestrales vencidos de \$ A cada uno más 2 pagos extraordinarios de \$ 4A cada uno, al final de cada semestre. Si la tasa de interés es del 3% mensual capitalizable cada mes, hallar el valor de los pagos normales y el de los pagos extraordinarios. Hacer la tabla de amortización.