Unidad 12

- Anualidades Diferidas

Una anualidad diferida es aquella cuyo plazo no comienza sino hasta después de haber transcurrido cierto número de periodos de pago; este intervalo de aplazamiento puede estar dado en años, semestres, etc.

Supongamos por ejemplo, que se difiere 6 años el pago de una anualidad cierta ordinaria; en este caso los pagos comenzarán al final del sexto periodo de la anualidad vencida:

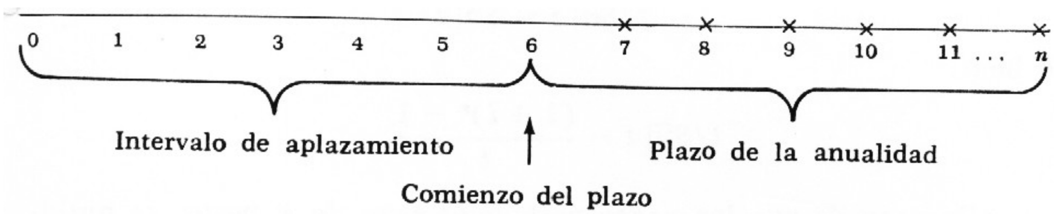

FIGURA 8.1. Diagrama de tiempo de una anualidad diferida

La duración de una anualidad diferida es el tiempo que transcurre entre el comienzo del intervalo de aplazamiento y el final del plazo de la anualidad diferida, es decir, comprende dos partes. La primera o preliminar se compone del tiempo comprendido entre el momento actual y el comienzo del plazo de la anualidad (intervalo de aplazamiento t) y la segunda por el plazo de la anualidad n.

Las anualidades diferidas pueden ser vencidas o anticipadas, dependiendo del momento en que tiene lugar el pago.

Monto de anualidades diferidas a una tasa efectiva de interés

El monto de una anualidad diferida, bien sea vencida o anticipada, se calcula con los mismos procedimientos que los de las anualidades vencidas o anticipadas (mismas tasas de interés, plazo, renta, etc.), ya que durante el intervalo de aplazamiento no se gana interés alguno, puesto que no se entrega ningún pago durante el mismo.

Una vez transcurrido el intervalo de aplazamiento, la anualidad diferida no se distingue de cualquier otra anualidad (vencida o anticipada) cuyo plazo ha comenzado; es decir, las fórmulas para anualidades diferidas serán las mismas que se emplearon para calcular anualidades. vencidas y anticipadas, debiéndose observar exclusivamente si el primer pago se efectúa al final o al inicio del plazo de la anualidad diferida.

A continuación se presentan las fórmulas de los montos de anualidades diferidas, destacando que para cada alternativa entre la frecuencia de pagos p y la convertibilidad de la tasa m existen fórmulas que permiten consultar las tablas financieras y obtener con más rapidez los resultados.

Cálculo del monto de una anualidad diferida durante t años, pagadera anualmente al final de cada año, durante n años, a una tasa efectiva de interés

$$t/S_{\overline{n}|}\, i = S_{\overline{n}|}\, i$$

o bien:

$$t/S_{\overline{n}|}\, i = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(En caso de que los pagos periódicos sean de R pesos, se multiplican las fórmulas anteriores por R.)

EJEMPLO:

Después de 5 años, y al final de cada año, pensamos invertir $10 000.00. ¿Qué cantidad tendremos dentro de 20 años si la tasa de interés efectiva que nos otorgan es del 8% anual?

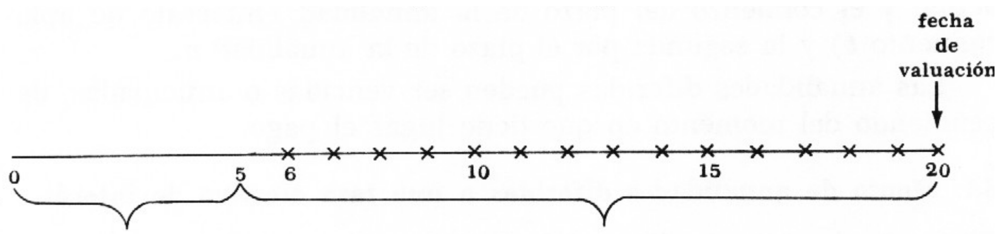

FIGURA 8.2. Diagrama de tiempo del monto de la anualidad diferida vencida anterior

DATOS	FÓRMULAS
$R = 10\,000$ $t = 5$ $n = 15$ $i = 0.08$	1) $S = R\, S_{\overline{n}|}\, i$ 2) $S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$

SUSTITUCIÓN

1) $S = 10\,000\, S_{\overline{15}|}0.08$

$S = 10\,000\,(27.1521139)$

$S = 271\,521.14$

2) $S = 10\,000\left[\frac{(1+0.08)^{15} - 1}{0.08}\right]$

$S = 10\,000\left[\frac{3.1721691 - 1}{0.08}\right]$

$S = 10\,000\,(27.1521138)$

$S = 271\,521.14$

Por tanto dentro de 20 años tendremos un monto de $271 521.14.

Cálculo del monto de una anualidad diferida durante t años, pagadera anualmente al comienzo de cada año, durante n años a una tasa efectiva de interés

$$t/\ddot{S}_{\overline{n}|}\, i = \ddot{S}_{\overline{n}|}\, i$$

es decir:

$$t/\ddot{S}_{\overline{n}|}\, i = (1 + i)\, S_{\overline{n}|}\, i$$

o bien:

$$t/\ddot{S}_{\overline{n}|}\, i = (1 + i)\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right]$$

En caso de que los pagos periódicos sean de R pesos, se multiplican las fórmulas anteriores por R.

EJEMPLO:

Una persona de 20 años desea invertir, desde que cumpla 30 años, una cantidad de $8 000.00 anuales al principio de cada año. ¿Qué cantidad habrá acumulado cuando cumpla 45 años, si el banco le otorga una tasa de interés efectiva del 12% anual?

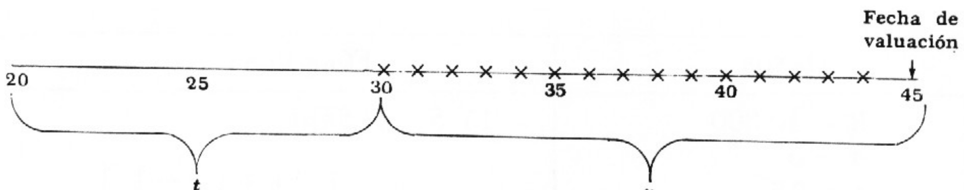

FIGURA 8.3. Diagrama de tiempo del monto de la anualidad diferida anticipada anterior

DATOS	FÓRMULAS
$R = 8\,000$ $t = 10$ $n = 15$ $i = 0.12$	1) $S = R\,(1 + i)\, S_{\overline{n}|}\, i$ 2) $S = R\,(1 + i)\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right]$

SUSTITUCIÓN
1) $S = 8\,000(1 + 0.12)S_{\overline{15}|}0.12$ $S = 8\,000\,(1.12)\,(37.2797147)$ $S = 334\,026.24$ 2) $S = 8\,000\,(1 + 0.12)\left[\frac{(1 + 0.12)^{15} - 1}{0.12}\right]$ $S = 8\,000\,(1.12)\left[\frac{5.4735658 - 1}{0.12}\right]$ $S = 8\,000\,(1.12)\,(37.279715)$ $S = 334\,026.24$

Por tanto, cuando cumpla 45 años habrá acumulado $335 026.24.

Monto de anualidades diferidas a una tasa nominal de interés capitalizable m veces al año

1.1 Cálculo del monto de una anualidad diferida durante t años, pagadera en forma vencida p veces por año, durante n años, a una tasa de interés nominal capitalizable m veces por año

$$t/S_{\overline{n|}}^{(p)}\, i' = S_{\overline{n|}}^{(p)}\, i'$$

es decir:

$$t/S_{\overline{n|}}^{(p)}\, i' = \frac{1}{p}\left[\frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m/p}-1}\right]$$

En caso de que los pagos anuales sean de Ra pesos, se multiplican las fórmulas anteriores por Ra.

EJEMPLO:

Cuando cumpla 22 años un niño que hoy tiene diez deberá recibir la suma de $2 500.00 al final de cada trimestre durante 15 años. Si esta cantidad se invierte a medida que se recibe, de manera que produzca el 5% de interés anual convertible trimestralmente, ¿qué cantidad tendrá este niño cuando cumpla 37 años?

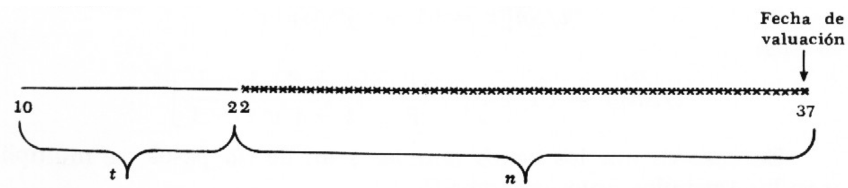

FIGURA 8.4. Diagrama de tiempo de la anualidad diferida vencida anterior

DATOS	FÓRMULA
$R = 2\,500$ $Ra = 10\,000$ $P = 4$ $n = 15$ $t = 12$ $i^{(m)} = 0.05$ $m = 4$ $i' = \frac{i^{(m)}}{m} = 0.0125$	$S = \frac{Ra}{p}\left[\frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m/p}-1}\right]$

SUSTITUCIÓN
$S = \frac{10\,000}{4}\left[\frac{(1+0.0125)^{4\times 15}-1}{(1+0.0125)^{4/4}-1}\right]$ $S = 2\,500\left[\frac{(1.0125)^{60}-1}{1.0125-1}\right]$ $S = 2\,500\left[\frac{2.1071813-1}{0.0125}\right]$ $S = 2\,500\,(88.574504)$ $S = 221\,436.26$

Por tanto, al cumplir 37 años este niño de diez años recibirá $221 436.27

1.2 Cálculo del monto de una anualidad diferida durante t años, pagadera en forma anticipada p veces por año, durante n años a una tasa de interés nominal capitalizable m veces por año

$$t/\ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|}\, i' = \ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|}\, i'$$

es decir:

$$t/\ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|}\, i' = (1+i')^{m/p} S^{(p)}_{\overline{n}|}\, i'$$

o bien

$$t/\ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|}\, i' = (1+i')^{m/p} \frac{1}{P}\left[\frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m/p}-1}\right]$$

En caso de que los pagos anuales sean de Ra pesos, se multiplican las fórmulas anteriores por Ra.

EJEMPLO

Un señor desea que su hija de 15 años reciba desde que cumpla 18 años en forma semestral, una cantidad de $6 000.00 durante 5 años. ¿Cuánto habrá acumulado la hija a los 23 años si decide invertirlos en un fondo que le proporciona el 18% anual convertible mensualmente?

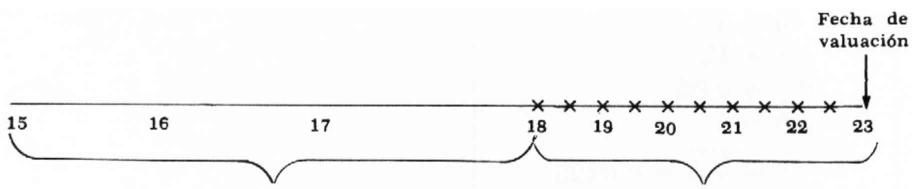

FIGURA 8.5. Diagrama de tiempo de la anualidad diferida anticipada anterior

DATOS	FÓRMULA
$R = 6\,000$ $Ra = 12\,000$ $P = 2$ $n = 5$ $t = 3$ $i^{(m)} = 0.18$ $m = 12$ $i' = \frac{i^{(m)}}{m} = 0.015$	$S = \frac{Ra}{P}(1+i')^{m/p}\left[\frac{(1+i')^{mn}-1}{(1+i')^{m/p}-1}\right]$

SUSTITUCIÓN

$$S = \frac{12\,000}{2}(1+0.015)^{12/2}\left[\frac{(1+0.015)^{12\times 5}-1}{(1+0.015)^{12/2}-1}\right]$$

$$S = 6\,000(1.015)^{6}\left[\frac{(1.015)^{60}-1}{(1.015)^{6}-1}\right]$$

$$S = 6\,000(1.0934433)(15.4448719)$$

$$S = 101\,328.55$$

Por tanto, cuando cumpla 23 años habrá acumulado $101 328.55.

El lector debe darse cuenta del hecho de que el cálculo se facilita con el empleo de las fórmulas simplificadas de cada una de las distintas alternativas presentadas entre la frecuencia de los pagos p y la convertibilidad de la tasa m, y por otra parte, que para obtener las respuestas de las diferentes incógnitas que en ellas aparecen, como renta, tiempo, tasa de interés, etc., sólo necesita despejarlas correctamente de la fórmula correspondiente.

Valor presente de anualidades diferidas a una tasa efectiva de interés

El valor presente de una anualidad diferida se calcula a partir de las fórmulas de valor presente para anualidades vencidas o anticipadas (según sea el caso) y traídas al momento actual, es decir, descontadas por el intervalo de diferimiento t. Para mejor comprensión del concepto anterior se presentan los desarrollos de sus fórmulas.

2.1. Cálculo del valor presente de una anualidad diferida durante t años, pagadera anualmente al final de cada año, durante n años, a una tasa efectiva de interés

Supóngase que se tiene una anualidad vencida de una unidad de moneda pagadera durante n años, pero diferida t años; es decir, el primer pago se efectuará en el año t + 1 y el último en el año t + n

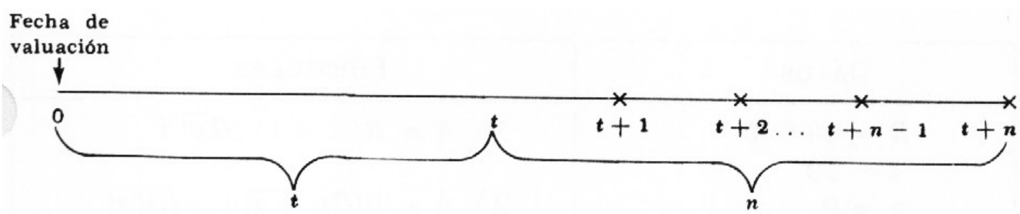

FIGURA 8.6. Diagrama de tiempo del valor presente de una anualidad diferida, vencida pagadera durante n años

Si se toma como punto de valuación el año 0, se tiene:

$$t/a_{\overline{n|}}\, i = (1+i)^{-(t+1)} + (1+i)^{-(t+2)} + \ldots + (1+i)^{-(t+n)}$$

Recordando que $v^t = (1+i)^{-t}$ se tiene:

$$t/a_{\overline{n|}}\, i = v^{t+1} + v^{t+2} + \ldots + v^{t+n}$$

factorizando el segundo miembro de la ecuación por v^t,

$$t/a_{\overline{n|}}\, i = v^t(v + v^2 + \ldots + v^n)$$

recordando que $v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n = a_{\overline{n|}}\, i$ se tiene:

$$t/a_{\overline{n|}}\, i = v^t a_{\overline{n|}}\, i = (1+i)^{-t} a_{\overline{n|}}\, i$$

Desarrollando el valor de $a_{\overline{n|}}\, i$ se obtiene

$$t/a_{\overline{n|}}\, i = (1+i)^{-t}\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

Es posible obtener otra fórmula para conocer el valor presente de anualidades diferidas vencidas, si se considera la diferencia del valor presente de una anualidad vencida pagadera durante n + t años y el valor presente de una anualidad vencida pagadera durante el intervalo de aplazamiento t, es decir:

$$t/a_{\overline{n}|}\, i = a_{\overline{n+t}|}\, i - a_{\overline{t}|}\, i$$

Si la renta no es unitaria, se necesitan multiplicar las expresiones anteriores por R.

EJEMPLO:

Un obrero desea que su hijo de cinco años reciba, después de que cumpla 15 años y en forma vencida, $18 000.00 anuales hasta que cumpla 24 años a fin de asegurar la terminación de sus estudios. ¿Cuánto debe depositar ahora, si el banco le otorga una tasa de interés efectiva del 12% anual?

DATOS	FÓRMULAS
$R = 18\,000$ $t = 10$ $n = 9$ $i = 0.12$	1) $A = R(1+i)^{-t} a_{\overline{n}|}\, i$ 2) $A = R[a_{\overline{n+t}|}\, i - a_{\overline{t}|}\, i]$

SUSTITUCIÓN
1) $A = 18\,000(1+0.12)^{-10}\, a_{\overline{9}|}\, 0.12$ $A = 18\,000(0.3219732)(5.3282498)$ $A = 30\,879.97$ 2) $A = 18\,000\,(a_{\overline{10+9}|}\, 0.12 - a_{\overline{10}|}\, 0.12)$ $A = 18\,000\,(a_{\overline{19}|}\, 0.12 - a_{\overline{10}|}\, 0.12)$ $A = 18\,000\,(7.3657769 - 5.6502230)$ $A = 30\,879.97$

Por tanto, el obrero debe depositar en este momento $30 879.97

2.1. Cálculo del valor presente de una anualidad diferida durante t años, pagadera anualmente al comienzo de cada año, durante n años a una tasa efectiva de interés

Supóngase que se tiene una anualidad anticipada de una unidad de moneda pagadera durante n años, pero diferida t años, es decir, el primer pago se efectuará en el año t y el último en el año t + n - 1:

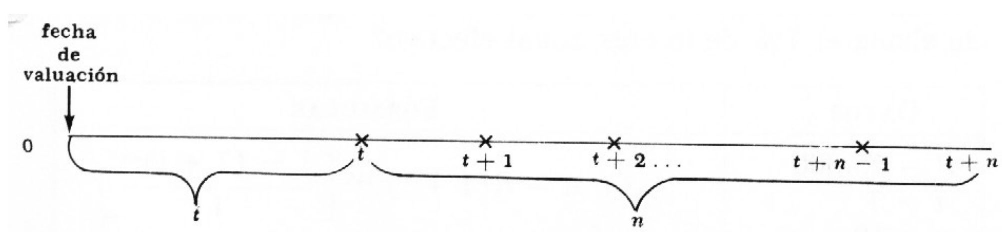

FIGURA 8.7. Diagrama de tiempo del valor presente de una anualidad diferida anticipada pagadera durante n años

Si se toma como punto de valuación el año 0, se tiene:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|}\, i = (1+i)^{-t} + (1+i)^{-(t+1)} + \cdots + (1+i)^{-(t+n-1)}$$

recordando que $v^t = (1+i)^{-t}$ se tiene:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|}\, i = v^t + v^{t+1} + \ldots + v^{t+n-1}$$

factorizando el segundo miembro de la ecuación por v^t = se tiene:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|}\, i = v^t(1 + v + \ldots + v^{n-1}) = v^t a_{\overline{n}|}\, i$$

Si por otra parte. se sabe que $v^t = (1+i)^{-t}$ y que $\ddot{a}_{\overline{n}|}\, i$ es igual a $(1+i)\, a_{\overline{n}|}\, i$ se obtiene:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|}\, i = (1+i)^{-t}(1+i)a_{\overline{n}|}\, i$$

por tanto se tiene:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|}\, i = (1+i)^{-t+1}a_{\overline{n}|}\, i$$

desarrollando el valor de $a_{\overline{n}|}\, i$ se obtiene:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|}\, i = (1+i)^{-t+1}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Es posible obtener otra fórmula para conocer el valor presente de anualidades diferidas anticipadas, si se considera la diferencia del valor presente de una anualidad pagadera durante n + t - 1 años y el valor presente de una anualidad pagadera durante t - 1 años, es decir:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|}\, i = a_{\overline{n+t-1}|}\, i - a_{\overline{t-1}|}\, i$$

Si la renta no es unitaria, se tienen que multiplicar las expresiones anteriores por R.

EJEMPLO:

¿Qué capital deberá depositar una empresa para que al cabo de 5 años pueda disponer de una renta anual de $25 000.00 para trabajos de investigación de operaciones, pagaderos al comienzo de cada año y durante los 10 años siguientes, si el banco le abona el 7% de interés anual efectivo?

DATOS	FÓRMULAS
$R = 25\,000$ $t = 5$ $n = 10$ $i = 0.07$	1) $A = R(1+i)^{-t+1}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$ 2) $A = R(a_{\overline{n+t-1}|}\, i - a_{\overline{t-1}|}\, i)$

Sustitución

$$1)\quad A = 25\,000(1+0.07)^{-5+1}\left[\frac{1-(1+.07)^{-10}}{0.07}\right]$$
$$A = 25\,000(0.7628952)(7.0235815)$$
$$A = 25\,000(5.3582566)$$
$$A = 133\,956.42$$
$$2)\quad A = 25\,000(a_{\overline{10+5-1}|}\,0.07 - a_{\overline{5-1}|}\,0.07)$$
$$A = 25\,000(a_{\overline{14}|}\,0.07 - a_{\overline{4}|}\,0.07)$$
$$A = 25\,000(8.7454680 - 3.3872113)$$
$$A = 25\,000(5.3582567)$$
$$A = 133\,956.42$$

Por tanto, se requieren **$133 956.42.**

Valor presente de una anualidad diferida pagadera a tasas nominales de interés capitalizables m veces al año

El valor presente de una anualidad diferida se calcula a partir de las fórmulas de valor presente para anualidades vencidas o anticipadas que trabajan a tasas nominales de interés, (según sea el caso), y traídas al momento actual, es decir, descontadas por el periodo de diferimiento t.

A continuación se presentan para mejor comprensión de lo expresado anteriormente los desarrollos de las fórmulas.

1.1 Cálculo del valor presente de una anualidad diferida durante t años, pagadera p veces al final de cada año durante n años, a una tasa nominal de interés capitalizable m veces al año

Supóngase el pago de una unidad de moneda al año, es decir, en cada p-ésimo de año se pagará 1/p. Puesto que el primer pago de 1/p se hace al cabo de (t + 1/p) años, su valor presente a la tasa de interés $i^{(m)}$ capitalizable m veces por año es:

$$\frac{1}{p}[(1+i')^m]^{-(t+1/p)} = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-m/p}$$

El segundo pago de 1/p se efectúa al cabo de (t + 2/p) y su valor presente es:

$$\frac{1}{p}[(1+i')^m]^{-(t+2/p)} = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-2m/p}$$

Se continúa el mismo procedimiento y se observa que el penúltimo pago de 1/p se efectúa dentro de (t + n - 1/p) años, y su valor presente es:

$$\frac{1}{p}[(1+i')^m]^{-(t+n-1/p)} = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-m(n-1/p)}$$

El último pago se efectúa dentro de (t + n) años y su valor presente es:

$$\frac{1}{p}\left[(1+i')^m\right]^{-(t+n)} = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn}$$

Si se suman los valores lpresentes anteriores, se obtiene el valor presente de toda la anualidad diferida cuyo símbolo es $t/\overset{(p)}{a_{\overline{n}|}}\, i'$.

Aplicando la fórmula de la suma de una progresión geométrica con razón (1 + i')$^{-m/p}$ se tiene:

$$t/\overset{(p)}{a_{\overline{n}|}}\, i' = \frac{\frac{1}{p}(1+i')^{-mt-m/p} - \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn}(1+i')^{-m/p}}{1-(1+i')^{-m/p}}$$

factorizando el numerador:

$$t/\overset{(p)}{a_{\overline{n}|}}\, i' = \frac{\frac{1}{p}(1+i')^{-mt}(1+i')^{-m/p}[1-(1+i')^{-mn}]}{1-(1+i')^{-m/p}}$$

multiplicando numerador y denominador por (1 + i)m P y conmutando los términos del segundo miembro:

$$t/\overset{(p)}{a_{\overline{n}|}}\, i' = \frac{(1+i')^{-mt}}{p}\left[\frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}\right]$$

es decir:

$$t/\overset{(p)}{a_{\overline{n}|}}\, i' = (1+i')^{-mt}\, \overset{(p)}{a_{\overline{n}|}}\, i'$$

Por tanto, para obtener valores presentes de este tipo de anualidades diferidas vencidas, es necesario multiplicar el valor presente de las anualidades vencidas (obtenidas por cualquiera de las fórmulas estudiadas en capítulos precedentes) por el factor de descuento (1 + i')$^{-mt}$

Si la renta anual no es unitaria, se tiene que multiplicar la fórmula de $t/\overset{(p)}{a_{\overline{n}|}}\, i'$ por Ra.

EJEMPLO:

El testamento de una persona, estipula que un asilo recibirá después de transcurridos 10 años, una renta trimestral de $2 500.00 durante 20 años a pagar al final de cada trimestre. Si el banco concede el 4% de interés capitalizable semestralmente, encuentre el depósito que debe hacerse en este momento.

Datos	Fórmula
$R = 2\,500$ $Ra = 10\,000$ $P = 4$ $t = 10$ $n = 20$ $i^{(m)} = 0.04$ $m = 2$ $i' = \frac{i^{(m)}}{m} = 0.02$	$A = \frac{Ra}{P}(1+i')^{-mt}\left[\frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}\right]$

Sustitución
$A = \frac{10\,000}{4}(1+0.02)^{-2\times10}\left[\frac{1-(1+0.02)^{-2\times20}}{(1+0.02)^{2/4}-1}\right]$ $A = 2\,500(1.02)^{-20}\left[\frac{1-(1.02)^{-40}}{(1.02)^{1/2}-1}\right]$ $A = 2\,500(0.6729713)\left[\frac{1-0.4528904}{1.0099505-1}\right]$ $A = 92\,505.17$

Por tanto, el depósito debe ser de $92 505.17.

Para encontrar el valor de alguna de las incógnitas que se pueden presentar en problemas de valor presente de anualidades diferidas, como la renta, el tiempo, el interés, etc., sólo es necesario despejarlas adecuadamente de la fórmula general.

Cálculo del valor presente de una anualidad diferida durante t años, pagadera p veces al comienzo de cada año durante n años, a una tasa de interés nominal capitalizable mm veces por año

Supongamos el pago de una unidad de moneda al año, es decir, en cada p-ésimo de año se pagará 1/p.

Puesto que el primer pago de 1/p se hace al cabo de t años, su valor presente a la tasa de interés nominal¡(-) capitalizable m veces por año es:

$$\frac{1}{p}[(1+i')^m]^{-t} = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt}$$

El segundo pago de 1/p se hace al cabo de (t + 1/p) años y su valor presente es:

$$\frac{1}{p}[(1+i')^m]^{-(t+1/p)} = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-m/p}$$

Se continúa el mismo procedimiento y se observa que el último pago de 1/p se efectúa dentro de (t + n - 1/p) años, y su valor presente es:

$$\frac{1}{p}[(1+i')^m]^{-(t+n-1/p)} = \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn+m/p}$$

Si se suman los valores presentes anteriores, se obtendría el valor presente de la anualidad diferida anticipada $t/\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} i'$.

Aplicando la fórmula de la suma de una progresión geométrica con razón $(1+i')^{-m/p}$ se tiene:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} i' = \frac{\frac{1}{p}(1+i')^{-mt} - \left[\frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn+m/p}\right](1+i')^{-m/p}}{1-(1+i')^{-m/p}}$$

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} i' = \frac{\frac{1}{p}(1+i')^{-mt} - \frac{1}{p}(1+i')^{-mt-mn}}{1-(1+i')^{-m/p}}$$

factorizando el numerador:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} i' = \frac{(1+i')^{-mt}}{p}\left[\frac{1-(1+i')^{-mn}}{1-(1+i')^{-m/p}}\right]$$

multiplicando numerador y denominador por $(1+i')^{m/p}$ y conmutando los términos del segundo miembro:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} i' = \frac{(1+i')^{-mt}(1+i')^{m/p}}{p}\left[\frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}\right]$$

Es decir:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} i' = (1+i')^{-mt} a_{\overline{n}|}^{(p)} i'$$

Por tanto, para obtener valores presentes de este tipo de anualidades diferidas anticipadas, es necesario multiplicar el valor presente de las anualidades anticipadas (obtenidas por cualquiera de las fórmulas estudiadas en capítulos precedentes) por el factor de descuento $(1 + i')^{-mt}$

Si la renta anual no es unitaria, se tiene que multiplicar la fórmula de $t/\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} i'$, por Ra.

EJEMPLO:

¿Qué capital deberá depositar una fundación científica er un banco para que al cabo de 20 años pueda disponer de una renta semestral de $125 000.00 para trabajos de investigación, pagadera al comienzo de cada semestre, durante los 25 años siguientes, si el banco le abona el 4% de interés capitalizable trimestralmente?

DATOS	FÓRMULA
$R = 125\ 000$ $Ra = 250\ 000$ $p = 2$ $t = 20$ $n = 25$ $i^{(m)} = 0.04$ $m = 4$ $i' = \frac{i^{(m)}}{m} = 0.01$	$A = \frac{Ra}{p}(1+i')^{-mt}(1+i')^{m/p}\left[\frac{1-(1+i')^{-mn}}{(1+i')^{m/p}-1}\right]$

SUSTITUCIÓN

$$A = \frac{250\ 000}{2}(1+0.01)^{-20\times4}(1+0.01)^{4/2}\left[\frac{1-(1+0.01)^{-4\times25}}{(1+0.01)^{4/2}-1}\right]$$

$$A = 125\ 000(1+0.01)^{-80}(1+0.01)^{2}\left[\frac{1-(1+0.01)^{-100}}{(1+0.01)^{2}-1}\right]$$

$$A = 125\ 000(0.4511179)(1.0201)\left[\frac{1-0.3697112}{1.0201-1}\right]$$

$$A = 125\ 000(0.4601854)(31.3576517)$$

$$A = 1\ 803\ 791.69$$

Por tanto, se requieren \$1 803 791.69 como depósito.

Es importante destacar cómo se facilita el cálculo con el empleo de las fórmulas simplificadas de cada una de las distintas alternativas presentadas entre la frecuencia de los pagos p y la convertibilidad de la tasa m, por otra parte, es posible obtener la fórmula de cualquier incógnita como la renta, el tiempo, la tasa de interés, etc., despejando correctamente sus valores de la fórmula correspondiente.

Ejercicios:

1) ¿Qué renta semestral se recibirá durante 6 años, habiéndose invertido un capital de \$120 000.00 con una tasa del 8% convertible semestralmente, si se desea recibir el primer pago dentro de 8 años?
2) ¿Qué cantidad habrá que invertir para asegurar una renta de \$150000.00 al comienzo de cada año durante 5 años, debiéndose recibir el primer pago dentro de 7 años? Supóngase que el interés es del 6% capitalizable anualmente.
3) Si se ha hecho una inversión de \$104 293.70 al 7% convertible semestralmente, para recibir \$16 000.00 al principio de cada semestre durante 7 años, ¿cuál es el tiempo de aplazamiento de la anualidad para recibir la renta semestral deseada?