

Unidad 11

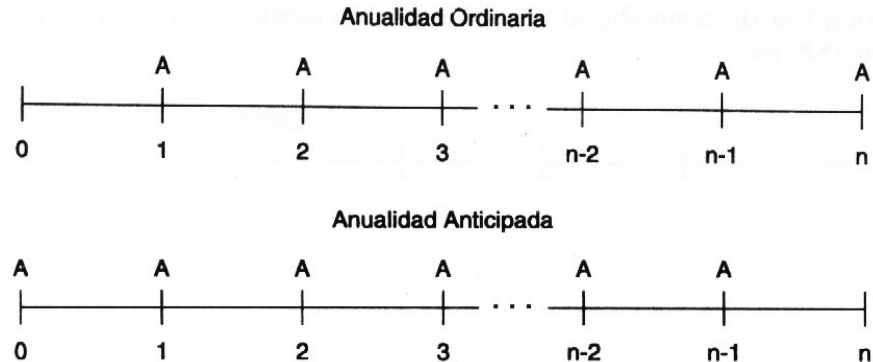
- Anualidades Simples Anticipadas

INTRODUCCION

Una anualidad anticipada es aquella en la cual los pagos se llevan a cabo al inicio del periodo de renta. Son ejemplos de anualidades anticipadas los pagos anuales (primas) de un seguro de vida, la renta de una casa u oficina; algunos planes de crédito estipulan que los pagos deben realizarse al comienzo de los periodos convenidos, etcétera.

En este capítulo se estudiarán las anualidades anticipadas simples y ciertas. Se recuerda al lector que una anualidad es simple cuando el periodo de capitalización coincide con el periodo de pago, razón por la cual no es necesario especificar explícitamente el periodo de capitalización en un problema dado. La anualidad es cierta cuando los pagos comienzan y terminan en fechas determinadas.

La diferencia entre una anualidad ordinaria y una anticipada se puede ver gráficamente en los siguientes diagramas de tiempo:

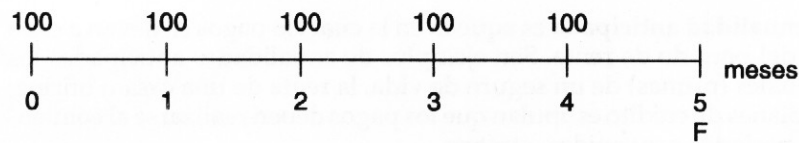


Obsérvese que la anualidad anticipada comienza con un pago y concluye un periodo después de que se haya cubierto el último pago. Por tal motivo, el n -ésimo pago gana intereses por un periodo debido a que fue depositado al inicio del último periodo.

MONTO Y VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

A través de un ejemplo se verá la forma en que se acumula el dinero en una anualidad simple, cierta y anticipada.

Se depositan \$ 100.00 al inicio de cada mes en un banco que paga el 2% mensual capitalizable en forma mensual. ¿Cuál será el monto después de 5 depósitos?



Si F representa el monto de la anualidad, se puede formar la siguiente ecuación de valor:

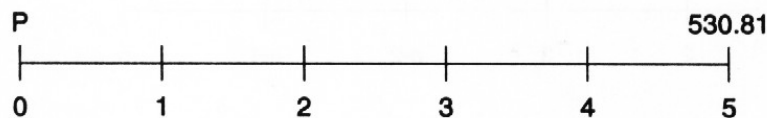
$$100 (1.02)^5 + 100 (1.02)^4 + 100 (1.02)^3 + 100 (1.02)^2 + 100 (1.02) = F$$

$$F = 100 (1.02^5 + 1.02^4 + 1.02^3 + 1.02^2 + 1.02)$$

$$F = 100 (5.308120963)$$

$$F = 530.81$$

El valor actual de la anualidad se puede obtener calculando el valor actual del monto, esto es:



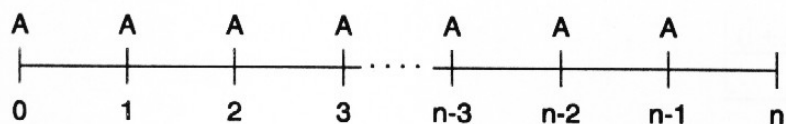
$$P = \frac{530.81}{1.02^5} = \frac{530.81}{1.104080803}$$

$$P = 480.77$$

El valor presente de una anualidad anticipada tiene las mismas interpretaciones que el valor presente de una anualidad ordinaria.

La deducción de la fórmula para obtener el monto de una anualidad anticipada se lleva a cabo generalizando el ejemplo anterior.

Sea A el pago hecho al principio de cada uno de n periodos y $j\%$ la tasa de interés por periodo (i , en forma decimal).



El primer pago se realiza al inicio del primer periodo, por tal motivo ganará intereses por n periodos; el segundo pago ganará intereses por $(n - 1)$ periodos, etc. El último pago genera intereses por un periodo. Si la fecha focal se escoge en el periodo n , entonces el monto o valor futuro de la anualidad anticipada viene dado por:

$$F = A(1 + i)^n + A(1 + i)^{n-1} + A(1 + i)^{n-2} + \dots + A(1 + i)^3 + A(1 + i)^2 + A(1 + i)$$

$$F = A(1+i) + A(1+i)^2 + A(1+i)^3 + \dots + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^n$$

Factorizando:

$$F = A [(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n]$$

La expresión que se encuentra entre los corchetes es una progresión geométrica, donde:

$$a_1 = (1+i)$$

$$r = (1+i)$$

Por tanto:

$$s_n = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{(1+i) [(1+i)^n - 1]}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}$$

Sustituyendo la expresión anterior por la expresión que se encuentra entre los corchetes se tiene:

$$F = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right] \quad (9.1)$$

La fórmula general para obtener el valor actual de una anualidad anticipada se puede obtener al calcular el valor actual del monto, usando la ecuación (7.2):

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right]}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{\frac{A [(1+i)^{n+1} - (1+i)]}{i}}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{A [(1+i)^{n+1} - (1+i)]}{i (1+i)^n} = \frac{A (1+i)^{-n} [(1+i)^{n+1} - (1+i)]}{i}$$

$$P = \frac{A [(1+i)^{n+1-n} - (1+i)^{1-n}]}{i}$$

$$P = A \left[\frac{(1+i) - (1+i)^{1-n}}{i} \right] \quad (9.2)$$

EJEMPLO 9.1

Un profesionista deposita \$ 470.00 al principio de cada mes, en una cuenta de inversión. Si la tasa de interés es del 23.64% capitalizable cada mes,

- Obtenga el monto al cabo de 4 años.
- ¿Cuál es el interés ganado en los 4 años?
- Calcule el valor presente de la anualidad.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} a) \quad A &= 470 \\ n &= 48 \text{ meses} \\ i &= 0.2364/12 = 0.0197 \end{aligned}$$

Sustituyendo valores en la ecuación (9.1):

$$F = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right] = 470 \left[\frac{(1.0197)^{48+1} - (1.0197)}{0.0197} \right]$$

$$F = 470 \left[\frac{2.601049072 - 0.0197}{0.0197} \right] = 470 (80.2715265)$$

$$F = \$ 37,727.62$$

$$\begin{aligned} b) \quad \text{Interés} &= 37,727.62 - (470/\text{mes}) (48 \text{ meses}) \\ \text{Interés} &= \$ 15,167.62 \end{aligned}$$

c) El valor actual se obtiene mediante la ecuación (9.2):

$$P = 470 \left[\frac{1.0197 - (1.0197)^{1-48}}{0.0197} \right] = 470 \left[\frac{1.0197 - 0.3997571984}{0.0197} \right]$$

$$P = 470 (31.4691777475)$$

$$P = \$ 14,790.51$$

EJEMPLO 9.2

Una compañía constructora debe invertir durante los próximos 5 años, al comienzo de cada mes, \$ 15,000.00 en un fondo para la depreciación de su maquinaria. ¿Cuál será el monto de este fondo de depreciación al cabo de 5 años, si ha estado produciendo el 27% capitalizable cada mes? Si los depósitos mensuales se hicieran al final de cada mes, ¿cuál sería el monto?

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} A &= 15,000 \\ n &= 60 \text{ meses} \\ i &= 0.27/12 = 0.0225 \end{aligned}$$

$$F = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right] = 15,000 \left[\frac{(1.0225)^{61} - (1.0225)}{0.0225} \right]$$

$$F = 15,000 (127.250569717)$$

$$F = \$ 1'908,758.55$$

Si se tratara de una anualidad vencida, el monto sería:

$$F = 15,000 \left[\frac{(1.0225)^{60} - 1}{0.0225} \right] = \$ 1'866.756.52$$

¡Hay una diferencia de \$ 42,002.02!

EJEMPLO 9.3

La póliza de un seguro de vida estipula que se entregue al beneficiario de éste un pago de \$ 5,000.00 al comienzo de cada mes durante 12 años. ¿Cuál es el valor presente de esta anualidad, si la tasa de interés es del 2.35% mensual?

SOLUCION

$$A = 5,000$$

$$n = 144 \text{ meses}$$

$$i = 0.0235$$

$$P = A \left[\frac{(1+i) - (1+i)^{1-n}}{i} \right] = 5,000 \left[\frac{1.0235 - (1.0235)^{1-144}}{0.0235} \right]$$

$$P = 5,000 (42.0172664627)$$

$$P = \$ 210,086.33$$

EJEMPLO 9.4

Utilice el problema anterior y compare el valor actual de la anualidad anticipada con el valor actual si fuera anualidad ordinaria.

SOLUCION

Si la anualidad fuera ordinaria, entonces:

$$P = 5,000 \left[\frac{1 - (1.0235)^{-144}}{0.0235} \right]$$

$$P = 5,000 (41.05253196)$$

$$P = \$ 205,262.66$$

El valor presente de la anualidad anticipada es \$ 4,823.67 (\$ 210,086.33 - \$ 205,262.66) más que el valor presente de la anualidad vencida. Otra forma de llevar a cabo la comparación es:

$$\frac{210,086.33}{205,262.66} = 1.0235$$

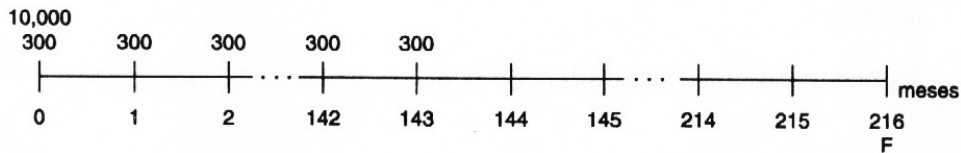
El valor actual de la anualidad anticipada es 1.0235 veces más que el de la anualidad vencida.

EJEMPLO 9.5

Una niña recién nacida recibió, por parte de sus abuelos maternos, \$ 10,000.00 para que sean utilizados en su educación universitaria. El mismo día en que nació la niña su padre le abrió una cuenta de inversión a su nombre, donde depositó el regalo de los abuelos junto con \$ 300.00 que piensa depositar, a partir de ese momento, cada mes, durante 12 años. Después de transcurrido ese tiempo, los depósitos serán suspendidos, pero el dinero se mantendrá en la cuenta hasta que la niña cumpla 18 años, edad en que estará por ingresar a la universidad. ¿Qué cantidad de dinero habrá en la cuenta dentro de 18 años? supóngase que la tasa de interés es del 18.6% capitalizable cada mes.

SOLUCION

A continuación se muestra el diagrama de tiempo.

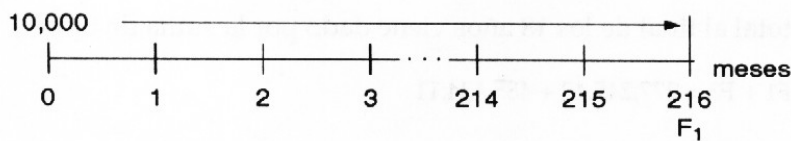


F representa el monto total al final de 18 años.

El problema se debe resolver en 3 etapas.

1a. Parte

Obtener el monto (F_1) de \$ 10,000 durante 18 años.

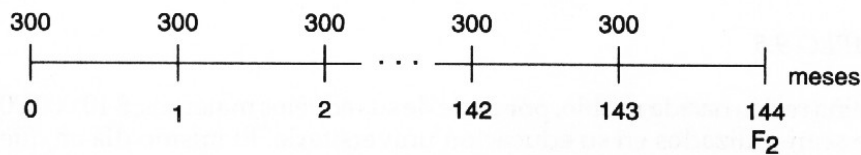


$$F_1 = 10,000 \left(1 + \frac{0.186}{12}\right)^{216}$$

$$F_1 = \$ 277,245.43$$

2a. Parte

Se obtiene el monto (F_2) de la mensualidad anticipada, durante 12 años.



$$F_2 = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right]$$

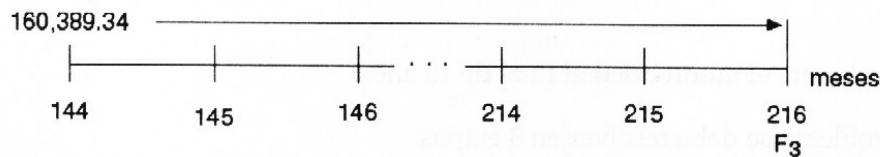
$$F_2 = 300 \left[\frac{(1 + 0.186/12)^{145} - (1 + 0.186/12)}{(0.186/12)} \right]$$

$$F_2 = 300 (534.6311263)$$

$$F_2 = \$ 160,389.34$$

3a. Parte

Se obtiene el monto (F_3) de \$ 160,389.34 invertidos de los 12 a los 18 años.



$$F_3 = 16,389.34 \left(1 + \frac{0.186}{12} \right)^{72}$$

$$F_3 = \$ 485,434.11$$

El monto total al final de los 18 años viene dado por la suma de F_1 y F_3 .

$$\text{Monto total} = F_1 + F_3 = 277,245.43 + 485,434.11$$

$$\text{Monto total} = \$ 762,679.54$$

Ejercicios 9.1

1. Una mediana empresa deposita \$ 250,000.00 al principio de cada semestre en un fondo de depreciación cuya tasa de interés es del 30% capitalizable semestralmente.
 - a) ¿A cuánto ascenderá el monto al cabo de 6 años?
 - b) ¿Cuál sería el monto si los depósitos se llevaran a cabo al final del semestre?
 - c) ¿Cuál es la diferencia entre ambos montos?
 - d) ¿Cuál es la diferencia de intereses?

2. Obtenga el precio de contado de una máquina por la que se hicieron 10 pagos mensuales de \$ 2,135.34 cada uno. El primer pago fue de inmediato y la tasa de interés de la operación fue del 3.7% mensual. ¿Cuánto se pagó de intereses?
3. ¿Cuál será el monto al cabo de 8 años si al inicio de cada bimestre se depositan 750 dólares en una cuenta de ahorros, si la tasa de interés es del 7.35% anual capitalizable cada dos meses? Calcule el total de intereses ganados.
4. Una persona renta un departamento por \$ 970.00 al mes durante un año. La renta se debe pagar por adelantado cada mes. ¿Cuál es el valor actual de las rentas de un año, tomando como base una tasa de interés del 215 anual? Interprete el resultado.
5. Un equipo de sonido puede comprarse pagando \$ 170.00 de pago inicial y 24 pagos mensuales de \$ 170.00 cada uno. ¿Cuál es el precio de contado si el interés cobrado es un 32% capitalizable mensualmente? ¿Qué cantidad de intereses se está pagando?
6. José Luis renta su casa en \$ 840.00 mensuales anticipados e invierte este dinero a una tasa de interés del 15% capitalizable en forma mensual. Si el arrendatario pagó la renta por mes vencido, ¿qué pérdida le significó a José Luis en un año?
7. Margarita depositó \$ 210.00 al principio de cada mes en un fondo que paga 16% de interés convertible mensualmente. Después de 2 años ella no hizo más depósitos, pero dejó el dinero en depósito por otros dos y medio años a la misma tasa de interés. ¿De cuánto fue el fondo al final de ese tiempo?
8. La prima a pagar de un seguro de incendio es de \$ 2,735.50 por trimestre anticipado. ¿Cuál será el precio de contado del seguro, si la compañía cobra el 20% de interés capitalizable trimestralmente cuando el seguro se paga en abonos trimestrales? La prima cubre el inmueble y sus contenidos por un año.
9. Cuando alcanzara la edad de 60 años el Sr. Toledo tendría derecho a recibir \$ 735,000.00 por concepto de un seguro de vida capitalizable que había adquirido muchos años antes. No obstante, la compañía aseguradora le ofreció en lugar de los \$ 735,000.00, pagarle \$ 8,900.00 al comienzo de cada mes durante los próximos veinte años, y si él falleciera, a sus herederos. Suponiendo un interés del 1.25% mensual, ¿es esta oferta ventajosa para el Sr. Toledo, o le convendría más aceptar los \$ 735,000.00 al momento?
10. El dueño de un automóvil antiguo, valuado en \$ 500,000.00, piensa venderlo y recibe por él las siguientes ofertas:
 - I. \$ 50,000.00 al contado y el saldo en 6 pagos bimestrales vencidos de \$ 81,697.50 cada uno.
 - II. 12 pagos mensuales de \$ 48,972.00 cada uno, efectuando el primer pago de inmediato.

Si la tasa de interés promedio del dinero es un 15% anual, ¿qué oferta le conviene más?

CALCULO DE LA ANUALIDAD, PLAZO Y TASA

Para obtener la anualidad (A) o el plazo (n) se despeja la variable en cuestión de la ecuación (9.1) o (9.2), dependiendo de si la incógnita es función del monto o del valor actual, respectivamente. El cálculo de la tasa (i) se obtiene, al igual que en las anualidades vencidas, mediante prueba y error.

EJEMPLO 9.6

Dentro de 6 años la compañía fabricante de armas de fuego El Tiro Perfecto, S.A., necesitará \$ 7'000,000.00 para reemplazar maquinaria depreciada- ¿Cuál será el importe del depósito trimestral que tendrá que hacer la compañía, a partir de este momento, en un fondo de depreciación que paga el 17.3% convertible cada trimestre, para acumular dicha cantidad de dinero?

SOLUCION

En este caso es necesario despejar A de la ecuación (9.1)

$$F = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right]$$

$$F i = A [(1+i)^{n+1} - (1+i)]$$

$$A = \frac{F i}{[(1+i)^{n+1} - (1+i)]}$$

$$\begin{aligned} F &= 7'000,000 \\ n &= 24 \text{ trimestres} \\ i &= 0.173/4 \end{aligned}$$

$$A = \frac{(7'000,000) (0.173/4)}{[(1+0.173/4)^{25} - (1+0.173/4)]}$$

$$A = \frac{302,750}{2.882105237 - 1.04325}$$

$$A = \$ 164,640.50$$

EJEMPLO 9.7

El beneficiario de una herencia puede optar por recibir \$ 380,500.00 de inmediato o recibir 20 pagos cada cuatro meses, el primero de ellos se hace de inmediato. ¿Cuál será el valor del pago cuatrimestral si el dinero está invertido al 16% anual?

SOLUCION

Se despeja A de la ecuación (9.2).

$$P = A \left[\frac{(1+i) - (1+i)^{1-n}}{i} \right]$$

$$P i = A [(1 + i) - (1 + i)^{1-n}]$$

$$A = \frac{P i}{[(1 + i) - (1 + i)^{1-n}]}$$

$$P = 380,500$$

$$n = 20 \text{ pagos cuatrimestrales}$$

$$i = 0.16/3$$

$$A = \frac{(380,500) (0.16/3)}{[(1 + 0.16/3) - (1 + 0.16/3)^{1-20}]}$$

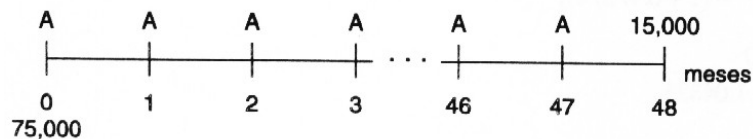
$$A = \frac{20,293.333333}{0.6807278255}$$

$$A = \$ 29,811.23$$

EJEMPLO 9.8

Un auto nuevo con valor de \$ 75,000.00 será arrendado por 4 años, con la opción de comprarlo al precio de \$ 15,000.00 al final del periodo de arrendamiento. Si el arrendador desea tener un rendimiento anual del 19.5% convertible cada mes, ¿de qué cantidad deben ser los pagos mensuales, hechos al inicio del mes?

SOLUCION



Basándose en el diagrama de tiempo y tomando el mes número 48 como fecha focal, se forma la siguiente ecuación de valor:

$$75,000 \left(1 + \frac{0.195}{12}\right)^{48} = A \left[\frac{\left(1 + \frac{0.195}{12}\right)^{49} - \left(1 + \frac{0.195}{12}\right)}{\left(\frac{0.195}{12}\right)} \right] + 15,000$$

$$162,587.8456 = A \left[\frac{2.203065307 - 1.01625}{0.01625} \right] + 15,000$$

$$162,587.8456 = 73.03478812 A + 15,000$$

$$A = \$ 2,020.80$$

EJEMPLO 9.9

¿Cuántos depósitos semestrales anticipados de \$ 1,447.42 cada uno, se deben hacer para acumular un monto de \$ 10,000.00? La tasa de interés es del 10.98% semestral.

SOLUCION

Se despejan de la ecuación (9.1).

$$F = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right]$$

$$\frac{Fi}{A} = (1+i)^{n+1} - (1+i)$$

$$\frac{Fi}{A} + (1+i) = (1+i)^{n+1}$$

Utilizando logaritmos

$$(n+1) \log (1+i) = \log \left[\frac{Fi}{A} + (1+i) \right]$$

$$(n+1) = \frac{\log \left[\frac{Fi}{A} + 1+i \right]}{\log (1+i)}$$

$$n = \frac{\log \left[\frac{Fi}{A} + 1+i \right]}{\log (1+i)} - 1$$

$$A = 1,447.42$$

$$F = 10,000$$

$$i = 0.1098$$

$$n = \frac{\log \left[\frac{(10,000)(0.1098)}{1,447.42} + 1 + 0.1098 \right]}{\log 1.1098} - 1$$

$$n = \frac{\log 1.868393245}{\log 1.1098} - 1 = 6 - 1 = 5 \text{ depósitos semestrales}$$

EJEMPLO 9.10

¿Cuántos pagos mensuales anticipados de \$ 650.20 cada uno, deben hacerse para amortizar una deuda de \$ 6,000.00 si hay que pagar intereses al 22% capitalizable cada mes?

SOLUCION

Se despeja n de la ecuación (9.2).

$$P = A \left[\frac{(1+i) - (1+i)^{1-n}}{i} \right]$$

$$\frac{Pi}{A} = (1+i) - (1+i)^{1-n}$$

$$(1+i)^{1-n} = (1+i) - \frac{Pi}{A}$$

$$(1-n) \log(1+i) = \log \left[1+i - \frac{Pi}{A} \right]$$

$$-n = \frac{\log \left[1+i - \frac{Pi}{A} \right]}{\log(1+i)} - 1$$

$$n = 1 - \frac{\log \left[1+i - \frac{Pi}{A} \right]}{\log(1+i)}$$

$$P = 6,000$$

$$A = 650.20$$

$$i = 0.22/12$$

$$n = 1 - \frac{\log \left[1 + \frac{0.22}{12} - \frac{(6,000)(0.22/12)}{650.20} \right]}{\log \left(1 + \frac{0.22}{12} \right)} = 1 - \frac{\log 0.849154619}{\log 1.018333333}$$

$$n = 1 - (-9) = 1 + 9 = 10 \text{ meses}$$

EJEMPLO 9.11

Una tienda de artículos electrónicos ofrece una videocámara, cuyo precio de contado es de \$ 4,785.00, en mensualidades anticipadas de \$ 187.40 cada una. Encuentre el número de pagos mensuales, si se carga el 24.6% de interés compuesto cada mes.

SOLUCION

$$P = 4,785$$

$$a = 187.40$$

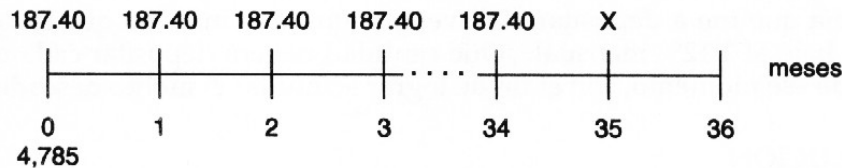
$$i = 0.246/12 = 0.0205$$

$$n = 1 - \frac{\log \left(1+i - \frac{Pi}{A} \right)}{\log(1+i)} = 1 - \frac{\log \left[1 + 0.0205 - \frac{(4785)(0.0205)}{187.40} \right]}{\log(1 + 0.0205)}$$

$$n = 1 - \frac{\log 0.497060832444}{\log 1.0205} = 35.44799 \text{ meses}$$

Teóricamente se necesitan 35.44799 meses. En la práctica el resultado se debe ajustar a un número entero. El ajuste se lleva a cabo de una manera semejante a los ajustes hechos en las anualidades ordinarias.

Se pagan 35 mensualidades de \$ 187.40 cada una y al principio del mes número 36 se da un pago final que amortice totalmente la deuda.



Si X representa el valor del pago efectuado al inicio del mes número 36 y se toma como fecha focal el momento actual, entonces se forma la siguiente ecuación de valor:

$$4,785 = 187.40 \left[\frac{(1.0205) - (1.0205)^{-34}}{0.0205} \right] + X(1.0205)^{-35}$$

$$4,785 = 187.40 (25.3121858593) + 0.491523948932X$$

$$4,785 = 4,743.50363003 + 0.491523948932X$$

$$X = \$ 84.40$$

Al inicio del mes 36 se pagan únicamente \$ 84.40.

EJEMPLO 9.12

El ingeniero Uribe deposita \$ 450.00 a principios de cada mes en una cuenta de ahorros. Si la cuenta le paga un interés del 21.2% capitalizable cada mes, ¿en cuánto tiempo logrará ahorrar \$ 77,000.00?

SOLUCION

$$n = \frac{\log \left[\frac{F_i}{A} + i + 1 \right]}{\log (1 + i)} - 1 = \frac{\log \left[\frac{(77,000) (0.212/12)}{450} + \frac{0.212}{12} + 1 \right]}{\log \left(1 + \frac{0.212}{12} \right)} - 1$$

$$n = \frac{\log 4.040629631}{\log 1.017666667} - 1 = 78.7377 \text{ meses}$$

El dinero lo reúne en, prácticamente, 79 meses.

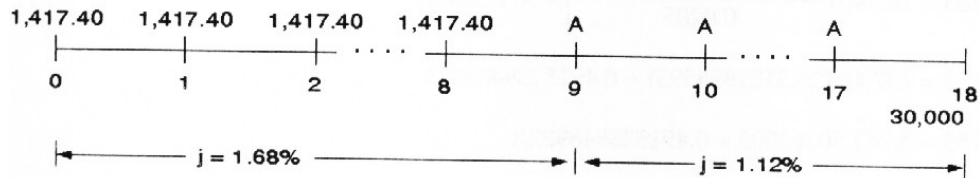
EJEMPLO 9.13

El Dr. Silva desea reunir \$ 30,000.00 con el propósito de realizar un viaje en compañía de su familia a Disney World, dentro de un año y medio. Con este fin invierte \$ 1,417.40 cada mes, empezando de inmediato, en una cuenta de ahorros que le paga una tasa de interés del 1.68%, mensual.

El día que fue a depositar el noveno pago, se le informó que la tasa de interés bajó al 1.12% mensual. ¿Qué cantidad deberá depositar cada mes, a partir de ese momento, con el fin de lograr acumular el monto deseado?

SOLUCION

Si la tasa de interés no hubiera cambiado, el Dr. Silva hubiera seguido depositando \$ 1,417.40 cada mes; pero debido a la baja en la tasa de interés, el Dr. Silva deberá incrementar la cantidad a depositar. A continuación se muestra el diagrama de tiempo-valor.

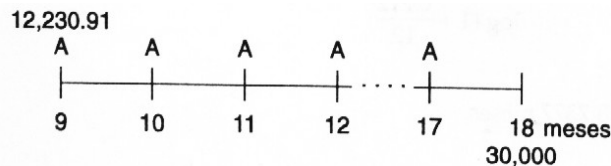


A representa la nueva cantidad que deberá ser depositada.

En primer lugar se calcula la cantidad que se tiene acumulada al inicio del noveno mes. Esta cantidad se representará como F_1 .

$$F_1 = 1,417.40 \left[\frac{(1.0168)^9 - (1.0168)}{0.0168} \right] = \$ 12,230.91$$

El siguiente diagrama de tiempo-valor muestra la situación que se tendría en el noveno mes.



Tomando el mes número 18 como fecha focal, se forma la siguiente ecuación de valor:

$$12,230.91 (1.0112)^9 + A \left[\frac{(1.0112)^{10} - (1.0112)}{0.0112} \right] = 30,000$$

$$13,520.4865 + A(9.519351875) = 30,000$$

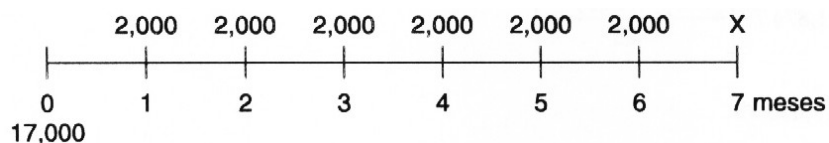
$$A = \$ 1,731.16$$

El Dr. Silva deberá depositar \$ 1,731.16 cada mes.

EJEMPLO 9.14

Un automóvil se vende en \$ 22,000.00 pidiendo \$ 5,000.00 de enganche y 6 pagos de \$ 2,000.00 al mes, así como un séptimo pago global final. Si la tasa de interés es del 28% capitalizable cada mes, ¿cuál será el valor del pago global final?

SOLUCION



Colocando la fecha focal en el séptimo mes, se observa que ésta se encuentra en un periodo posterior al último pago normal. Se trata, por tanto, de una anualidad anticipada. La ecuación de valor es:

$$17,000 \left(1 + \frac{0.28}{12}\right)^7 = 2,000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.28}{12}\right)^7 - \left(1 + \frac{0.28}{12}\right)}{\frac{0.28}{12}} \right] + X$$

$$19,978.77 = 13,019.01 + X$$

$$X = \$ 6,959.80$$

EJEMPLO 9.15

Una tienda vende un equipo completo de cómputo en \$ 17,600.00, precio de contado. Se puede adquirir a crédito dando un pago inmediato de \$ 1,874.70 y 11 mensualidades de \$ 1,874.70. Calcule la tasa de interés si la capitalización es mensual.

SOLUCION

Observe el lector que al dar un pago inmediato por \$1,874.70 y enseguida 11 pagos mensuales por la misma cantidad, entonces se trata de un problema de anualidad anticipada formada de 12 pagos mensuales.

La tasa de interés se obtiene utilizando el método de prueba y error; o bien utilizando una calculadora programable.

Al sustituir los datos en la ecuación (9.2) se tiene:

$$17,600 = 1,874.70 \left[\frac{(1+i) - (1+i)^{1-12}}{i} \right]$$

$$17,600 = 1,874.70 \left[\frac{(1+i) - (1+i)^{-11}}{i} \right]$$

Si se supone una tasa de interés del 5% mensual, entonces:

$$17,600 \stackrel{?}{=} 1,874.70 \left[\frac{(1.05) - (1.05)^{-11}}{0.05} \right]$$

$$17,600 \neq 17,446.73$$

La diferencia entre ambos valores es pequeña, por tanto, la tasa de interés es un valor cercano al 5%. Suponiendo que la tasa es del 4.5% mensual, entonces:

$$17,600 \stackrel{?}{=} 1,874.70 \left[\frac{(1.045) - (1.045)^{-11}}{0.045} \right]$$

$$17,600 \neq 17,863.86$$

El resultado anterior muestra que la tasa de interés está entre 4.5% y 5% mensual. Si se utiliza el valor 4.8%,

$$17,600 \stackrel{?}{=} 1,874.70 \frac{(1.048) - (1.048)^{-11}}{0.048}$$

$$17,600 \neq 17,611.60$$

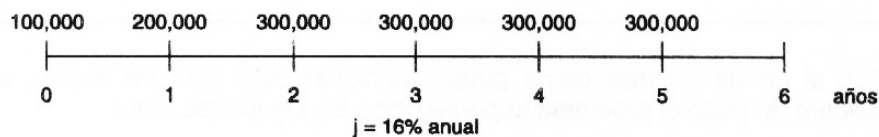
Debido a que la diferencia entre ambos valores es muy pequeña (11.60), se puede considerar que la tasa de interés es del 4.8% mensual y al utilizar una calculadora programable, el valor que se obtiene es 4.813969% mensual.

EJERCICIO 9.2

1. ¿Qué cantidad se debe depositar al inicio de cada mes para acumular en dos años y medio \$ 50,000.00, si la tasa de interés es del 1.57% mensual? ¿Qué cantidad de intereses se gana?
2. Se compra una agenda electrónica cuyo precio de contado es de \$ 785.00 y se va a liquidar en 4 pagos quincenales iguales. El primer pago es de inmediato y la tasa de interés es del 27% compuesto cada quincena. Calcule el valor del pago quincenal. ¿Qué cantidad de intereses se paga?
3. En una tienda de deporte se vende una casa de campaña por \$ 3,800.00, al contado. Se puede comprar a crédito en 6 mensualidades anticipadas. Si la tasa de interés es del 23% compuesto cada mes, calcúlese el valor del pago mensual.
4. Calcular el valor del pago trimestral anticipado que debemos hacer para amortizar un adeudo de \$ 12,230.00. La tasa de interés es del 29.25% capitalizable cada trimestre y son 22 pagos los que se van a realizar.
5. ¿Qué cantidad se debe depositar al inicio de cada semestre durante 5 años para acumular 18,000 dólares? La tasa de interés es del 8.57% anual.
6. ¿Cuántos depósitos mensuales anticipados de \$1,000.80 cada uno deben hacerse con el fin de acumular \$ 100,000.00? La tasa de interés es del 2.5% mensual.
7. Una familia ha heredado \$ 500,000.00. Si eligen invertir el dinero al 15% anual capitalizable cada mes, ¿cuántos retiros mensuales de \$ 7,967.15 se pueden hacer? El primer retiro se efectúa de inmediato.
8. S. Con referencia al problema anterior, diga ¿cuántos retiros de \$ 6,000.00 cada uno se pueden hacer?
9. ¿A qué tasa de interés anual capitalizable cada semestre, 6 depósitos semestrales anticipados de \$ 3,500.00 equivalen a un valor actual de \$ 14,990.00?
10. ¿Cuántos pagos trimestrales anticipados de 5,480 dólares cada uno deben hacerse para amortizar una deuda de 50,000 dólares, si hay que pagar intereses del 8.2% anual capitalizable en forma trimestral?
11. Para pagar un artículo con valor de contado de \$ 1,350.00 nos pidieron 25 pagos bimestrales de \$ 110.00. Si el primer pago es de inmediato, obtenga la tasa de interés anual capitalizable cada dos meses.
12. El Sr. Corona tiene actualmente 30 años de edad y posee una empresa familiar. Piensa jubilarse al reunir \$ 3'000,000.00 mediante depósitos mensuales de \$ 3,000.00. Si el dinero se invierte al 21% e inicia los depósitos a partir de hoy, ¿a

qué edad se jubilará?

13. Una empresa necesitará \$1'000,000.00 para el mes de noviembre de 1996. En noviembre de 1992 la empresa efectúa el primero de 8 depósitos semestrales iguales en una inversión que gana el 6% trimestral capitalizable cada semestre. ¿Cuál será el monto de cada depósito de manera que se acumule \$1'000,000.00?
14. ¿A qué tasa nominal, 30 depósitos cuatrimestrales de \$ 250.00 por cuatrimestre anticipado, darán un monto de \$ 29,113.70 cuatro meses después de efectuado el último depósito?
15. Un equipo de sonido cuyo valor de contado es de \$ 5,125.00 puede comprarse con 12 pagos mensuales anticipados de \$ 510.30 cada uno. Calcular la tasa de interés que se carga.
16. Un padre de familia ha destinado una cierta cantidad de dinero para que su hija estudie una carrera universitaria. La carrera dura 10 cuatrimestres y el dinero depositado en una cuenta bancaria gana el 7.33% cuatrimestral. ¿Qué cantidad de dinero debe depositarse en la cuenta si la colegiatura cuatrimestral es de \$ 4,700.00?
17. *Con referencia al problema anterior, supóngase que la tasa de interés subió al 8% cuatrimestral el mismo día que retira el pago correspondiente al sexto cuatrimestre. ¿Qué cantidad de dinero podrá retirarse de la cuenta en los siguientes cuatrimestres?
18. El párroco de la iglesia El Divino Redentor desea comprar un órgano electrónico que cuesta \$ 14,580.00. Con el fin de comprarlo de contado, deposita \$ 658.50 al inicio de cada quincena en una cuenta de inversión, durante 10 meses. Calcule la tasa de interés mensual que le paga la cuenta de inversión.
19. *El diagrama de tiempo de la siguiente página representa un problema con una serie de pagos hechos cada uno de ellos al inicio de cada año, durante 6 años. Sustituir esta serie de pagos por el equivalente a una serie de pagos anuales iguales anticipados.



20. *Los padres de una joven que cumplirá 13 años próximamente desean depositar en una cuenta de ahorros una cierta cantidad de dinero al principio de cada mes, comenzando el día en que ella cumpla los 13 años, durante 3 años. El monto obtenido en el momento en que la hija cumpla 18 años será utilizado para generar una serie de pagos cuatrimestrales de \$ 6,000.00 anticipados durante 3 años y 4 meses con el fin de pagar las colegiaturas de la universidad. Si la hija ingresará a la universidad justo cuando cumpla 18 años, ¿qué cantidad se debe depositar en la cuenta de ahorros con el fin de cumplir este objetivo? La tasa de interés se mantiene constante durante todo este tiempo en un 22% anual capitalizable cada mes mientras se deposita el dinero y capitalizable cada cuatrimestre al efectuar los retiros.

TEMA ESPECIAL

EL PATRONATO DEL AHORRO NACIONAL

Algunas corporaciones financieras, como el Patronato del Ahorro Nacional, (Pahnal) con el fin de atraer ahorradores a sus planes de ahorro, ofrecen premios en efectivo mediante sorteos públicos, durante todo el tiempo de su vigencia. Los premios son una ganancia adicional y, en consecuencia, no se consideran como un pago anticipado del valor de vencimiento de los planes de ahorro.

El Patronato del Ahorro Nacional es un organismo descentralizado del Gobierno Federal, con personalidad y patrimonio propios. Se trata de una entidad que forma parte del Sistema Financiero Mexicano y tiene como objetivo fomentar el ahorro nacional, en beneficio del desarrollo económico del país.

Para el cumplimiento de su objetivo el Patronato del Ahorro Nacional podrá, entre otros, emitir Bonos del Ahorro Nacional, establecer planes de ahorro para la formación de capitales pagaderos a plazo y otorgar préstamos a los titulares de los bonos y planes de ahorro hasta por el valor de rescate de los mismos.

Uno de los planes de ahorro con que cuenta el Patronato del Ahorro Nacional es el TANDAHORRO, un plan que tiene las siguientes características:

- Apertura y depósitos desde \$ 50.00.
- Plazos de 12, 24 y 36 meses, a elegir.
- Rendimientos con garantía contra la inflación.
- Sorteos mensuales en donde se tiene derecho a participar por cada \$ 250.00 de saldo si el plazo es de 12 meses con un número, si es de 24 meses con dos números, y en plazos de 36 meses con tres números.
- Los sorteos mensuales son por un monto total de \$ 150,000.00.

Con el fin de mostrar cómo puede funcionar este plan de ahorro, se simplificará un poco el problema suponiéndose los siguientes datos:

1. Se forma un grupo inicial de 1,000 ahorradores, cada uno de ellos abre la cuenta con \$ 250.00.
2. Cada ahorrador deposita \$ 250.00 mensuales, durante 3 años.
3. La tasa de interés de la cuenta de ahorros es del 11.5% anual capitalizable cada mes.
4. El Patronato del Ahorro Nacional puede invertir el dinero que recibe de los ahorradores, ganando un 26% anual capitalizable cada mes.

Bajo estas condiciones, el Patronato del Ahorro Nacional recibe cada mes \$ 2'500,000.00 por concepto de depósitos de los ahorradores, los cuales son invertidos al 26% anual capitalizable cada mes, formándose un monto total de:

$$F_1 = 2'500,000 \left(1 + \frac{0.26}{12}\right) \left[\frac{\left(1 + \frac{0.26}{12}\right)^{36} - 1}{\left(\frac{0.26}{12}\right)} \right] = \$ 137'144,168.40$$

Nótese que los depósitos forman una anualidad anticipada.

Por otro lado, el Patronato del Ahorro Nacional tendrá que entregar, dentro de 3 años, el monto acumulado de los depósitos a cada uno de los ahorradores. El valor total de dicho monto es:

$$F_2 = 2'500,000 \left(1 + \frac{0.115}{12}\right) \left[\frac{\left(1 + \frac{0.115}{12}\right)^{36} - 1}{\left(\frac{0.115}{12}\right)} \right] = \$ 107'895,250.86$$

El Patronato del Ahorro Nacional reparte cada mes \$ 150,000.00. El monto de estos premios es de:

$$F_3 = 150,000 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.26}{12}\right)^{36} - 1}{\frac{0.26}{12}} \right] = \$ 8'054,143.66$$

La ganancia que obtiene el Patronato del Ahorro Nacional, al cabo de 3 años, es:

$$\text{Ganancia} = F_1 - F_2 - F_3$$

$$\text{Ganancia} = \$ 21'194,773.88$$