Unidad 10

- Anualidades Simples Vencidas

INTRODUCCIÓN

Una anualidad es una serie de pagos, por lo general iguales, efectuados a intervalos iguales de tiempo. El término anualidad parece implicar que los pagos se efectúan anualmente; sin embargo, esto no es necesariamente así. En matemática financiera, anualidad significa pagos hechos a intervalos iguales de tiempo. Son ejemplos de anualidad el cobro quincenal del sueldo, el pago mensual de la renta de la casa, los pagos mensuales hechos a la tarjeta de crédito, el pago anual de la prima del seguro de vida, los dividendos semestrales sobre acciones, los fondos de amortización, etcétera.

El concepto de anualidad es de gran importancia ya que es muy frecuente que las transacciones comerciales impliquen una serie de pagos hechos a intervalos iguales de tiempo, en vez de un pago final único.

Los términos de renta, pago periódico, u otros pueden ser utilizados en lugar de anualidad.

El intervalo de tiempo entre dos pagos sucesivos se llama periodo de renta. El periodo de renta puede ser anual, semestral, mensual, etcétera.

El intervalo de tiempo que transcurre entre el comienzo del primer periodo de renta y el final del último periodo se llama plazo de una anualidad.

Las anualidades pueden ser de dos clases: **anualidades ciertas y anualidades contingentes o eventuales.**

Una **anualidad cierta** es aquella en la cual los pagos comienzan y terminan en fechas determinadas. Por ejemplo, al comprar un departamento a crédito, se establecen perfectamente las fechas en que se deben realizar los pagos.

Una **anualidad contingente** es aquella en la cual el primer pago, el último o ambos dependen de algún suceso que se sabe que ocurrirá, pero cuya fecha de realización no se puede fijar. Por ejemplo, el contrato de un seguro de vida establece que la suma asegurada se entregue al beneficiario en 24 pagos mensuales. Se sabe que los pagos se deben de efectuar al morir el asegurado, pero ¿cuándo va a morir? Las anualidades contingentes no serán estudiadas en este libro.

Una variante de las anualidades ciertas son las **rentas perpetuas o anualidades perpetuas**; aquellas en las que la duración de los pagos es por tiempo ilimitado.

Las anualidades ciertas se dividen en 3 clases de acuerdo al tiempo en que el pago tiene lugar:

Anualidades Ordinarias o Vencidas: aquellas en la cual cada uno de los pagos se hace al final de cada periodo de renta.

Anualidades Anticipadas: aquellas en la cual los pagos se realizan al principio de cada periodo de renta.

Anualidades Diferidas: aquellas en la cual se aplazan los pagos por un cierto tiempo. Pueden ser vencidas o anticipadas.

Las anualidades ciertas se dividen en 2 clases, de acuerdo a la capitalización de intereses:

Simples: aquellas anualidades cuyo periodo de renta coincide con el periodo de capitalización. Por ejemplo, realizar depósitos mensuales en una cuenta de ahorros que paga un interés capitalizable cada mes.

Generales: aquellas cuyo periodo de renta no coincide con el periodo de capitalización. Por ejemplo, cuando se realizan depósitos semanales en una cuenta cuyos intereses se capitalizan cada mes.

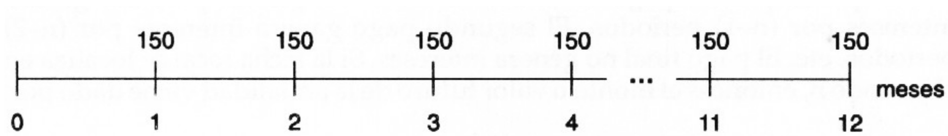
El tipo de anualidad que se estudiará en este capítulo será la anualidad cierta, simple y vencida. Este tipo de anualidad es el de uso más común.

MONTO Y VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD

A continuación se presenta un ejemplo de cómo se acumula el dinero en una anualidad cierta, simple y vencida.

Se depositan $ 150.00 al final de cada mes en un banco que paga el 3%% mensual capitalizable cada mes, ¿cuál será el monto al finalizar un año?

El diagrama de tiempo es el siguiente:



Debido a que los depósitos se realizan al final de cada mes, los primeros $ 150.00 ganarán intereses por 11 meses, los segundos $ 150.00 ganarán intereses por 10 meses, etc. El último depósito no gana intereses. El monto de la anualidad es la suma de todos los depósitos mensuales y su correspondiente interés compuesto, acumulado hasta el término del plazo. Si la fecha focal se localiza en el doceavo mes, el monto de la anualidad viene dado por la siguiente ecuación de valor:

$$F = 150\,(1.03)^{11} + 150\,(1.03)^{10} + 150\,(1.03)^{9} + \ldots + 150\,(1.03) + 150$$

Al resolver resulta:

$$F = \$\ 2{,}128.80$$

El interés compuesto ganado por la anualidad es la diferencia entre el monto y el total depositado.

Esto es:

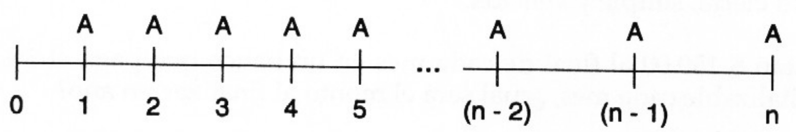
Interés ganado = 2,128.80 – (150) (12)

Interés ganado = $ 328.80

La anualidad ganó $ 328.80 de interés en el año.

Cuando el número de pagos o depósitos es muy grande, el método anterior para obtener el monto resulta muy laborioso. A continuación se deducirá la fórmula general para obtener el monto o valor futuro de una anualidad cierta, simple y vencida.

Considérese una anualidad ordinaria en donde A es el pago hecho al final de cada uno de n periodos y j es la tasa de interés por periodo (i, en forma decimal). El diagrama de tiempo es:



Ya que el primer pago se realiza al final del primer periodo, ganará intereses por (n-1) periodos. El segundo pago ganará intereses por (n-2) periodos, etc. El pago final no genera intereses. Si la fecha focal se localiza en el periodo n, entonces el monto o valor futuro de la anualidad viene dado por:

$$F = A (1 + i)^{n-1} + A(1 + i)^{n-2} + A(1 + i)^{n-3} +... + A(1 +i)^2 + A(1 + i) + A$$

Factorizando:

$$F=A[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-3}+...+(1+i)^2+(1+i)+1]$$

O bien:

$$F=A[1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{n-3}+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-1}]$$

Los términos de la expresión entre corchetes forman una progresión geométrica,

donde:

$a_1 =1$

$r = (1 + i)$

Aplicando la ecuación (3.8) para la suma den términos de una progresión geométrica, se obtiene:

$$S = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S = \frac{1 [(1 + i)^n - 1]}{(1 + i) - 1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Como:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + ... + (1 + i)^{n-3} + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1}$$

Entonces:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \tag{8.1}$$

La ecuación (8.1) es la fórmula general para obtener el monto o valor futuro de una anualidad vencida.

EJEMPLO 8.1

Resuelva el ejemplo dado al principio de la presente sección usando la ecuación (8.1).

SOLUCIÓN

$A = 150$

$i = 0.03$

$n = 12$ meses

$$F = 150\left[\frac{(1.03)^{12} - 1}{0.03}\right] = 150\left[\frac{1.425760887 - 1}{0.03}\right]$$

$$F = 150\ (14.19202957)$$

$$F = \$\ 2{,}128.80$$

Como se puede comprobar, el resultado obtenido es igual al calculado anteriormente.

EJEMPLO 8.2

El papá de un niño de 10 años empieza a ahorrar para que su hijo pueda estudiar una carrera universitaria. Planea depositar $ 200.00 en una cuenta de ahorros al final de cada mes durante los próximos 8 años. Si la tasa de interés es del 27% ¿cuál será el monto de la cuenta al cabo de 8 años?, ¿cuánto se percibe por concepto de intereses?

SOLUCION

Debido a que en el presente capítulo se manejan únicamente problemas de anualidades simples, no es requisito fundamental mencionar el periodo de capitalización; se sobreentiende que éste coincide con el periodo de renta. En por tanto, el periodo de capitalización es mensual.

$A = 200$

$i = 0.27/12$

$n = (8 \text{ años})\ (12 \text{ meses/año}) = 96 \text{ meses}$

$$F = 200\left[\frac{(1+\frac{0.27}{12})^{96}-1}{\frac{0.27}{12}}\right] = 200{,}000\left[\frac{1.0225^{96}-1}{0.0225}\right]$$

$F = 200\ (331.822341)$

$F = \$\ 66{,}364.47$

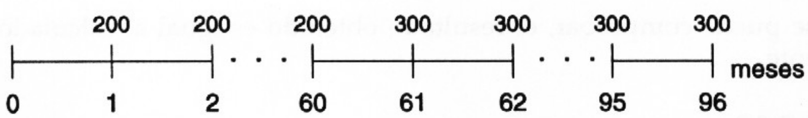
En 8 años el papá deposita un total de ($ 200/mes) (96 meses) = $ 19,200.00. Los intereses ganados en el periodo serán:

66,364.47 – 19,200 = $ 47,164.47

EJEMPLO 8.3

Con referencia al ejemplo anterior, suponga que el depósito de $ 200.00 mensuales se efectúa únicamente por 5 años y el resto del tiempo se depositan $ 300.00 mensuales. Obtenga el monto final.

SOLUCION



Este problema se resuelve en 3 partes.

1o. Parte

Se calcula el monto de $ 200.00 mensuales al final de los 5 años.

Anualidades Simples Vencidas

$A = 200$

$i = 0.27/12$

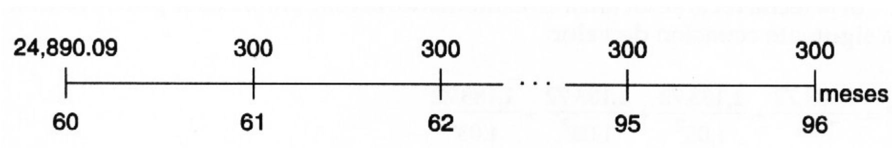
$n = 60 \text{ meses}$

$$F_1 = 200\left[\frac{(1+0.27/12)^{60}-1}{(0.27/12)}\right] = 200\ (124.4504349)$$

$F_1 = \$\ 24{,}890.09$

2o. Parte

Al final de los 5 años se tiene un monto por $ 24,890.09. Este hecho se muestra en el siguiente diagrama de tiempo.



A continuación se obtiene el monto de $ 24,890.09 al final del periodo, trasladando esta cantidad única mediante la fórmula del interés compuesto.

$F_2 = 24{,}890.09\ (1 + 0.27/12)^{36} = \$\ 55{,}450{,}55$

3o. Parte

Se calcula el monto de la anualidad por $ 300.00 mensuales durante 3 años.

$$F_3 = 300\left[\frac{(1+0.27/\ 12)^{36}-1}{(0.27/\ 12)}\right]$$

$$F_3 = \$\ 16{,}370.89$$

El total acumulado al final de los 8 años será la suma de F_2 y F_3:

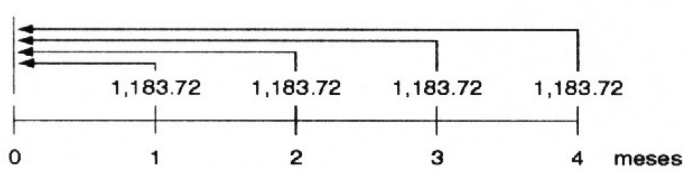
monto total = $F_2 + F_3 = 55{,}450.55 + 16{,}370.89$

monto total = $ 71,821.44

Hasta ahora se ha determinado el valor futuro de una anualidad. Ahora se abordará el problema de determinar el valor presente o valor actual de una anualidad; esto es el valor al comienzo del plazo.

El valor actual de una anualidad se define como la suma de los valores actuales de todos los pagos. Veamos un ejemplo: supóngase que una persona va a liquidar una deuda mediante 4 pagos mensuales de $ 1,183.72 cada uno, que incluyen intereses al 3% mensual con capitalización cada mes. Se desea obtener el valor actual de los pagos.

El diagrama de tiempo es:



Si la fecha focal se localiza en el momento actual, entonces se puede formar la siguiente ecuación de valor:

$$P = \frac{1{,}183.72}{1.03} + \frac{1{,}183.72}{1.03^2} + \frac{1{,}183.72}{1.03^3} + \frac{1{,}183.72}{1.03^4}$$

donde P representa el valor actual de los pagos. La expresión anterior se puede escribir:

$P = 1{,}183.72(1.03)^{-1} + 1{,}183.72(1.03)^{-2} + 1{,}183.72(1.03)^{-3} + 1{,}18372(1.03)$

Al resolver se tiene:

P = $ 4,400

$ 4,400.00 es el valor actual de 4 pagos mensuales de $ 1,183.72 cada uno, y representa la cantidad de dinero pedida en préstamo por el deudor.

Si en lugar de saldar una deuda el dinero se deposita en una cuenta que paga el 3% mensual capitalizable cada mes, entonces el valor actual se interpreta de la siguiente forma: $ 4,400.00 depositados al 3% mensual capitalizable cada mes producirán un monto exactamente igual que el obtenido al depositar $ 1,183.72 cada mes, durante 4 meses:

$$F = 4{,}400\ (1 + 0.03)^4 = \$\ 4{,}952.24$$

$$F = 1{,}183.72 \left[\frac{(1+0.03)^4 - 1}{0.03} \right] = \$\ 4{,}952.24$$

Lo anterior indica que el valor actual de una anualidad se puede obtener mediante la fórmula del interés compuesto, calculando el valor actual del monto de la anualidad.

El valor actual de una anualidad se puede interpretar, también, como la cantidad que se debe invertir en este momento para poder efectuar cierto número de retiros en el futuro. Esto es, si una persona invierte en este momento $ 4,400.00 al 3% mensual capitalizable cada mes, entonces podrá retirar $ 1,183.72 cada mes, durante 4 meses, al final de los cuales la cuenta estará en ceros. La siguiente tabla muestra lo afirmado:

Inversión original	$	4,400.00
Interés del 3% mensual = (4'400,000) (0.03) (1) =	$	132.00
Retiro al final del primer mes	$	1,183.72
Monto al principio del segundo mes	$	3,348.29
Interés del 3% mensual = (3'348,281) (0.03) (1) =	$	100.45
Retiro al final del segundo mes	$	1,183.72
Monto al principio del tercer mes	$	2,265.01
Interés del 3% mensual = (2'265,010.43) (0.03) (1) =	$	67.95
Retiro al final del tercer mes	$	1,183.72
Monto al principio del cuarto mes	$	1,149.24
Interés del 3% mensual = (1'149,241.74) (0.03) (1) =	$	34.48
Retiro al final del cuarto mes	$	1,183.72
Monto al final del cuarto mes	$	0.00

Existen muchos tipos de anualidades que se manejan de la forma mostrada en la tabla anterior; por ejemplo, los planes de jubilación como el SAR*, ya que durante la vida productiva del trabajador se realizan depósitos a un fondo creado para este propósito. Al momento de la jubilación, el monto obtenido paga una cantidad fija a intervalos regulares, generalmente cada mes. Después de pasado cierto tiempo el

---

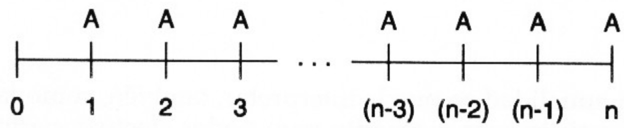
* *Sistema de Ahorro para el Retiro*

fondo se agota. La suma obtenida por el trabajador al inicio de la jubilación es el valor actual de la anualidad.

En seguida se deducirá la fórmula general para obtener el valor actual de una anualidad.

Considérese una anualidad vencida en donde A es el pago hecho al final de cada uno de n periodos y j es la tasa de interés por periodo (i, en forma decimal).

El diagrama de tiempo es:



Si la fecha focal se localiza en el momento actual y P representa el valor actual de la anualidad A, entonces:

$$P = A(1 + i)^{-1} + A(1 + i)^{-2} + A(1 + i)^{-3} + ... + A(1+i)^{-(n-2)} + A(1 + i)^{-(n-1)} + A(1 + i)^{-n}$$

$$P = A\ [(1+ i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + (1 + i)^{-3} + ... + (1 + i)^{-n+2} + (1 + i)^{-n+1} + (1 + i)^{-n}]$$

$$P = A\ [(1 + i)^{-n} + (1 + i)^{-n+1} + (1 + i)^{-n+2} + ... + (1 + i)^{-3} + (1 + i)^{-2} + (1 + i)^{-1}]$$

La última expresión entre corchetes constituye una progresión geométrica en la cual el primer término es (1 + i)-", la razón común es (1 + i) y el número de términos es igual a n. Sustituyendo estos valores en la ecuación (3.8), se obtiene:

$$S = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S = \frac{(1+i)^{-n}\left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^{-n+n} - (1+i)^{-n}}{1 + i - 1}$$

$$S = \frac{(1+i)^0 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Como:

$$\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = (1 + i)^{-n} + (1 + i)^{-n+1} + (1 + i)^{-n+2} + ... + (1 + i)^{-3} + (1 + i\ )^{-2} + (1 + i)^{-1}$$

Entonces:

$$P = A\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}\right] \tag{8.2}$$

La ecuación (8.2) es la fórmula para obtener el valor actual de una anualidad vencida.

EJEMPLO 8.4

¿Cuál es el valor presente de $ 350.00 depositados en una cuenta al final de cada trimestre durante 4 años, si la tasa de interés es del 28% capitalizable en forma trimestral?

SOLUCIÓN

$A = 350$

$i = 0.28/4$

$n = (4 \text{ años})\ (4 \text{ trimestres/año}) = 16 \text{ trimestres}$

$$P = 350\left[\frac{1-(1+0.28/4)^{-16}}{(0.28/4)}\right] = 350\left[\frac{1-(1.07)^{-16}}{0.07}\right]$$

$$P = 350\left[\frac{1-0.3387345978}{0.07}\right] = 350\ (9.4466486029)$$

$P = \$\ 3{,}306.33$

El valor actual de la anualidad es $ 3,306.33. Esto significa que si se depositan $ 3,306.33 en este momento, se tendrá un monto, al final de cuatro años, igual al que se obtendrá depositando $ 350.00 cada trimestre durante 4 años, siendo la tasa de interes del 28% capitalizable cada trimestre, en ambos casos. La otra interpretación es la siguiente: Si se depositan $ 3,306.33 a una tasa de interés del 28% capitalizable cada trimestre, entonces se pueden retirar $ 350 cada trimestre, durante 4 años.

EJEMPLO 8.5

Raquel desea jubilarse en este año, y cree que necesitará $ 5,000.00 cada mes durante los siguientes 15 años*. Su banco le paga el 22% compuesto mensualmente. ¿Cuánto dinero debe tener depositado para poder retirar la cantidad especificada cada mes?

SOLUCIÓN

$A = 5{,}000$

$i = 0.22/12$

$n = (15 \text{ años})\ (12 \text{ meses/año}) = 180 \text{ meses}$

$$P = 5{,}000\left[\frac{1-(1+0.22/12)^{-180}}{(0.22/12)}\right]$$

---

* *Para que una persona pueda vivir cómodamente con esta mensualidad durante 15 años, la inflación debe ser prácticamente nula.*

$$P = 5{,}000\left[\frac{1-(1.01833333333)^{-180}}{0.01833333333}\right] = 5{,}000\left[\frac{1-0.038002070}{0.0183333333}\right]$$

$$P = \$\ 262{,}363.07$$

$ 262,363.07 depositados al 22% capitalizable cada mes producirán 180 pagos mensuales de $ 5,000 cada uno; es decir, un total de $ 900,000. La diferencia entre el valor actual y la cantidad total recibida es el interés compuesto ganado.

Interés compuesto = 900,000 – 262,363.07

Interés compuesto = $ 637,636.93

EJEMPLO 8.6

Un distribuidor de automóviles ofreció a un cliente un coche nuevo mediante un pago inicial de $ 8,000 y 30 pagos mensuales de $ 2,866.66 cada uno. Si se carga una tasa de interés del 30% capitalizable mensualmente, encuentre el valor de contado del automóvil.

SOLUCIÓN

Valor de contado = Pago inicial + Valor actual de las mensualidades

Como:

A = 2,866.66

i = 0.30/12

n = 30 meses

Entonces:

Valor actual de las mensualidades:

$$P = 2{,}866.66\left[\frac{1-(1+0.30/\ 12)^{-30}}{(0.30/\ 12)}\right]$$

$$P = 2{,}866.66\left[\frac{1-(1.025)^{-30}}{0.025}\right]$$

$$P = 60{,}000$$

Por tanto:

Valor de contado = 8,000 + 60,000 = 68,000

EJEMPLO 8.7

El Sr. Jiménez recibió 3 ofertas para la compra de su propiedad, ubicada en Los Angeles, Cal. La primera consistía en 350,000 dólares de contado. La segunda consistía en 100,000 dólares al contado y 10,200 dólares al mes durante 30 meses. La tercera oferta era 10,498 dólares al mes durante 3 años, sin enganche.

Tomando como base una tasa de interés del 0.6% mensual convertible cada mes, ¿cuál de estas ofertas es la más ventajosa para el Sr. Jiménez?

SOLUCION

Para poder comparar las ofertar recibidas es necesario determinar los valores de contado equivalentes. Esto es, el valor actual de la anualidad más el pago inicial, si lo hubiera.

Oferta no. 1

Precio de contado = 350,000 dólares

Oferta no. 2

$$\text{Precio de contado} = 100{,}000 + 10{,}200\left[\frac{1-(1+0.006)^{-30}}{0.006}\right]$$

Precio de contado = 379,276.71 dólares

Oferta no. 3

$$\text{Precio de contado} = 10{,}498\left[\frac{1-(1+0.006)^{-36}}{0.006}\right]$$

Precio de contado = 338,988.28 dólares

Sobre la base de los precios de contado a los planes de pagos en abonos, la segunda oferta es la mejor.

TEMA ESPECIAL

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL CREDITO

Las principales ventajas del crédito son:

- Se puede disfrutar inmediatamente de un bien sin tener todo el dinero necesario para comprado de contado.
- Sirve como referencia para solicitar otro crédito.
- Deja dinero disponible en caso de emergencia.

Las principales desventajas del crédito son:

- El precio de los bienes es mayor por los intereses que se le agregan.
- No se obtienen, por lo general, descuentos o rebajas.
- Limita el presupuesto de gastos hasta haber cancelado el crédito.
- Se pierde lo comprado o se va a juicio legal, si no termina de cancelar lo adquirido.

Ejercicios 8.1

1. ¿Cuál es el monto de $ 500.00 depositados cada mes durante 5 años en una cuenta bancaria que da el 21% capitalizable mensualmente?
2. Una familia desea empezar a ahorrar para hacer un viaje a Hawaii. Se tiene pensado realizarlo dentro de 2, años con este fin se depositan $ 2,500.00 cada mes en una cuenta que genera intereses a una tasa del 31%. Obtenga el monto.
3. Santiago depositó $ 560.00 al final de cada trimestre durante 3 años. Si no retiró ninguna cantidad durante ese tiempo y su banco le abonaba el 4% mensual capitalizable cada trimestre, ¿cuál fue el monto de su anualidad al cabo de los 3 años? ¿Qué tanto de esa cantidad son intereses?
4. Se depositan 3,500 dólares en una cuenta de ahorros al final de cada semestre, durante ocho y medio años. Si no se realiza ningún retiro de la cuenta, ¿cuánto dinero hay en la cuenta? La tasa de interés es del 21% capitalizable cada semestre.
5. Crispín Romo está pagando una deuda mediante abonos mensuales de $ 430.00 cada uno. Si no efectúa 6 pagos, ¿cuánto debe pagar al vencer el séptimo pago para poner al día su deuda? La tasa de interés moratorio es del 45% con capitalización mensual.
6. *Se tienen quinientos mil pesos que se van a invertir de inmediato al 29.75% capitalizable cada mes y, además, a la misma tasa se van a efectuar depósitos mensuales de $ 400.00 cada uno. El primer depósito se hará dentro de un mes. ¿Cuánto se tendrá acumulado dentro de dos y medio años?
7. Se depositan $ 540.00 en una cuenta de ahorros, al final de cada trimestre, durante4 años. Sino se realizan más depósitos posteriormente, ¿cuánto dinero hay en la cuenta después de 7 años? ¿Qué tanto de esa cantidad corresponde a intereses? La cuenta paga el 33% capitalizable cada trimestre.
8. Cada bimestre Cristina deposita $ 600.00 en su cuenta de ahorros, que paga el 2.6% bimestral. Después de 2 años Cristina suspende los depósitos y el monto obtenido en ese momento pasa a un fondo de inversión que da el 20.85% capitalizable cada mes. Si el dinero permaneció en el fondo de inversión 2 años, obtenga el monto final.
9. Lolita desea comprar un automóvil nuevo de contado dentro de 5 años. Para cumplir con su deseo decide ahorrar $ 500.00 cada mes en una cuenta que le da un 2.5% mensual. Dos y medio años después, la tasa de interés baja al 2% mensual y Lolita decide incrementar su mensualidad a $ 700.00. Obtenga el monto total al cabo de 5 años.
10. Obtenga el valor actual de $ 3,000.00 semestrales durante cinco y medio años a una tasa del 38% capitalizable en forma semestral.
11. Si se calculan los intereses a una tasa del 34% convertible cada trimestre, ¿qué pago único de inmediato es equivalente a 20 pagos trimestrales de $ 2,000.00 cada uno, si el primero de ellos se realiza dentro de 3 meses?
12. Se puede comprar un departamento por 10,000 dólares como pago inicial y pagos cuatrimestrales de 4,000 dólares durante 10 años. Encuentre su valor en efectivo considerando que los pagos incluyen un interés del 9% convertible cada

cuatrimestre.

13. Una tienda vende hemos de microondas sin enganche y 18 pagos mensuales de $ 95.00 cada uno. Si se carga el 35% de interés, hallar el valor de contado.
14. Las primas de una póliza de incendio y explosión son de $ 574.00, pagaderas al final de cada trimestre. Si el asegurado desea pagar por adelantado las primas de un año, ¿cuánto debe pagar si el interés es del 34% capitalizable cada trimestre?
15. Alfonso debe pagar durante un año y medio 1,300 dólares cada bimestre pactados al 9% capitalizable cada bimestre. Al efectuar el cuarto pago, desea liquidar el saldo con un pago único. ¿Cuánto debe pagar en la fecha del cuarto pago?
16. Ramiro compró una computadora a crédito. Debe pagar $ 437.78 cada mes durante 3 años. La tasa de interés es del 3.3%. mensual capitalizable cada mes. Al efectuar el pago número veinte, desea liquidar el saldo. ¿Cuánto debe pagar en la fecha del pago número veinte para saldar la deuda?
17. Una mueblería vende archiveros sin enganche pagando $ 80.00 cada quincena, durante 4 meses. Si se carga el 30% con capitalización quincenal, halle el valor de contado.
18. Ricardo consiguió una beca para estudiar, por 2 años, ingeniería nuclear en Estados Unidos. Por tal motivo renta su casa por 2 años en $ 1,800.00 por mes vencido. Si una persona desea rentarla pagando por adelantado el alquiler de los 2 años, ¿cuánto tendrá que pagar suponiendo que el valor del dinero es del 18%?
19. *¿Cuál es el valor de contado de un equipo industrial que se compró de la siguiente forma:

    200,000 dólares de pago inicial.

    70,000 dólares mensuales durante 15 meses, y un último pago de 450,000 dólares en el mes 18, si se carga el 11% capitalizable cada mes?

20. Obtenga el valor de contado de una tienda de abarrotes que se vendió en las siguientes condiciones:

    $ 5,000.00 de enganche; $ 2,000.00 mensuales durante un año y un último pago de $ 10,000.00 un mes después de pagada la última mensualidad. Suponga que el rendimiento del dinero es 21.75% capitalizable cada mes.

21. Un aparato de rayos X se compró a crédito sin enganche pagando $ 20,000.00 bimestrales durante los dos primeros años y $ 30,000.00 mensuales durante el tercer año. Si la tasa de interés cargada fue del 29% capitalizable cada bimestre en los dos primeros años y, posteriormente capitalizable cada mes, encuentre el precio de contado del aparato de rayos X.
22. Laura está por jubilarse y desea recibir $ 4,000.00 cada mes durante 12 años. Si el valor promedio del dinero es del 16% capitalizable cada mes, ¿cuánto tiene que haber en el fondo de pensiones de ella, al momento de la jubilación para

brindarle esta mensualidad?

23. ¿Qué cantidad se requiere que tenga un fondo de pensiones para pagar 30,000 dólares anuales durante 20 años si la tasa de interés es del 8.55% anual?
24. Dos almacenes ofrecen una videocámara a crédito. En el almacén El Norte se requiere dar un pago inicial de $ 600.00 y 15 mensualidades de $ 287.50 cada una. En el almacén El Sur se requiere un pago inicial de $ 400.00 y 20 mensualidades de $ 214.42 cada una. ¿Cuál de las tiendas tiene mejor plan de crédito si ambas incluyen un interés del 37.64% capitalizable en forma mensual?
25. Un matrimonio estima que puede pagar una hipoteca mensual de $ 1,200.00. Las tasas actuales de interés hipotecario forman un promedio del 26.5%. Si consigue una hipoteca a 15 años, ¿cuál será el máximo préstamo hipotecario que puede pagar ese matrimonio?
26. Una compañía le ofrece al ingeniero Alvarez $ 27,500.00 mensuales durante los próximos 3 años y $ 41,650.00 mensuales durante los siguientes dos años por los derechos de uso exclusivo de su invento. Si el ingeniero Alvarez desea que el derecho de uso de su invento le sea pagado totalmente en este momento, ¿cuál es la cantidad que debe recibir si el valor promedio del dinero es del 20% capitalizable cada mes?
27. *Felipe le debe a Víctor la cantidad de $ 5,000.00 y acuerda pagarle $ 1,000.00 al final de cada uno de los siguientes 5 bimestres y un último pago al término del sexto bimestre. ¿De cuánto debe ser el pago final si el interés es del 26% compuesto cada bimestre?
28. ¿Cuál es el precio de contado de una impresora que se paga mediante un enganche del 25% del precio de contado y 10 pagos quincenales de $ 438.50 cada uno? La tasa de interés es del 34% anual.

CALCULO DE LA ANUALIDAD, PLAZO Y TASA

En esta sección se verán problemas que involucran el despeje de A, n o 1 de las ecuaciones (8.1) y (8.2).

Comenzaremos con algunos problemas donde será necesario conocer el valor de la anualidad. La anualidad, llamada también renta, es el pago periódico que se realiza a intervalos iguales de tiempo.

EJEMPLO 8.8

¿Cuánto se tiene que depositar cada mes en una inversión que gana el 19%, capitalizable mensualmente, para tener $ 75,000.00 al final de 4 años?

SOLUCION

Debido a que $ 75,000.00 son un valor futuro, es necesario despejar A de la fórmula del monto de una anualidad.

$F = 75{,}000$

$i = 0.19/12$

$n = (4 \text{ años}) (12 \text{ meses/año}) = 48 \text{ meses}$

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Por tanto:

$$F\,i = A\left[(1+i)^n - 1\right]$$

$$A = \frac{F\,i}{(1+i)^n - 1}$$

$$A = \frac{(75{,}000)\,(0.19/12)}{(1+0.19/12)^{48} - 1}$$

$$A = \frac{1{,}187.50}{1.125582924}$$

$$A = \$\,1{,}055$$

Se tiene que depositar $ 1,055.00 cada mes con el fin de tener $ 75,000.00 al final de 4 años.

Conocido el valor de la anualidad se puede calcular la cantidad ganada por concepto de intereses.

Intereses ganados = 75,000 – (1,055/mes) (48 meses)

Intereses ganados = $ 24,360

EJEMPLO 8.9

Una práctica común en las empresas es la de establecer, a través de pagos periódicos, un fondo de reserva para obtener en cierta fecha una determinada cantidad de dinero. A este fondo se le denomina fondo de amortización. Son fondos de amortización los fondos creados para jubilación y para reponer maquinaria y equipo al final del periodo de depreciación.

Una compañía necesitará reponer una máquina dentro de 6 años, la cual, en ese momento tendrá un valor de desecho de 1,000 dólares. De acuerdo a los estudios realizados, se espera que la máquina cueste alrededor de 20,000 dólares y se decide establecer un fondo de amortización para cubrir el costo. Si se puede obtener el 8% capitalizable cada semestre, ¿cuánto se tiene que depositar cada 6 meses para tener el dinero para reponer la máquina al final de su vida útil?

SOLUCIÓN

El monto del fondo debe ser la diferencia entre el costo de remplazo y el valor de desecho. Esto es, la cantidad que se necesita después de 6 años es 20,000 - 1,000 = 19,000 dólares.

Por tanto:

$F = 19{,}000$

$i = 0.08/2 = 0.04$

$n = 12$ semestres

$$A = \frac{F \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(19{,}000)\,(0.04)}{1.04^{12} - 1} = \frac{760}{0.601032219}$$

$A = 1{,}264.49$ dólares

EJEMPLO 8.10

La señora Aguilar es la beneficiaria de un seguro de vida por 650 mil pesos. Ella escogió no tomar la cantidad de contado, sino recibir un ingreso mensual fijo durante los próximos 12 años. Si el dinero se encuentra invertido al 22% anual capitalizable cada mes, ¿qué cantidad recibirá cada mes la señora Aguilar?

SOLUCIÓN

En este problema se conoce el valor presente de la anualidad y se pide el cálculo del pago mensual que agote el valor presente al cabo de 12 años. De la ecuación (8.2) se tiene:

$$A = \frac{P\,i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$P = 650{,}000$

$i = 0.22/12$

$n = 144$ meses

$$A = \frac{(650{,}000)\,(0.22/12)}{1 - (1 + 0.22/12)^{-144}} = \frac{11{,}916.66666}{0.9269120466}$$

$A = \$\ 12{,}856.31$

La señora Aguilar recibirá $ 12,856.31 al mes durante 12 años, en lugar de $ 650,000.00 al contado.

EJEMPLO 8.11

Una familia compra un terreno que cuesta $ 80,000.00. Pagan un enganche del 10% del precio de contado y obtienen una hipoteca a 5 años para pagar el resto al 27% convertible mensualmente. ¿Cuál es el valor de los pagos mensuales? ¿A cuánto asciende el total de los intereses que pagarán?

SOLUCIÓN

Enganche = 10% de 80,000 = $ 8,000

Valor presente de la deuda P = 80,000 - 8,000

$i = 0.27/12$

$n = 60$ meses

$$A = \frac{(72{,}000)\,(0.27/12)}{1-(1+0.27/12)^{-60}} = \$\,2{,}198.54$$

El valor del pago mensual es de $ 2,198.54

Interés total a pagar = (2,198.54/mes) (60 meses) – 72,000 = $ 59,912.40

EJEMPLO 8.12

¿Cuántos depósitos mensuales de $ 145.00 cada uno se deben hacer para acumular un total de $ 3,464.00 si se ganan intereses del 1.83% mensual capitalizable cada mes?

SOLUCIÓN

En este problema nos están pidiendo calcular el valor de n; esto es el número de capitalizaciones que debe haber para que $ 145.00 mensuales se transformen en $ 3,464.00 que incluyen el interés compuesto ganado. Para esto es necesario despejar n de la ecuación (8.1).

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$F = \frac{A\,[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$\frac{F\,i}{A} = (1+i)^n - 1$$

$$\frac{F\,i}{A} + 1 = (1+i)^n$$

Aplicando logaritmos a ambos lados de la igualdad:

$$\log\left[\frac{F\,i}{A} + 1\right] = n \log(1+i)$$

$$n = \frac{\log(Fi/A + 1)}{\log(1+i)}$$

Como:

$$F = 3,464.00$$

$$i = 0.0183$$

$$A = 145$$

Entonces:

$$n = \frac{\log [(3,464.00)\ (0.0183)/\ 145) + 1]}{\log\ (1 + 0.0183)}$$

$$n = \frac{\log 1.437192048}{\log 1.0183} = 20 \text{ meses}$$

EJEMPLO 8.13

Se desea formar un monto de $ 17,450.26 mediante depósitos cada dos meses vencidos de $ 430.23 cada uno. Calcular cuántos depósitos se deben hacer si se ganan intereses del 18.3% capitalizable cada bimestre.

SOLUCIÓN

$$F = 17,450.26$$

$$A = 430.23$$

$$i = 0.183/6$$

$$n = \frac{\log \left[\frac{(17,450.26)\ (0.183/6)}{430.23} + 1 \right]}{\log\ (1 + \frac{0.183}{6})} = \frac{\log 2.237089301}{\log 1.0305}$$

$$n = 26.79977199 \text{ bimestre}$$

Desde el punto de vista teórico deberán transcurrir 26.79977199 bimestres, pero en la realidad esto no es posible debido a que las capitalizaciones y los depósitos se realizan al final de cada bimestre. Cuando el número de pagos no es un número entero, se pueden llevar a cabo diferentes formas de ajuste.

A continuación se verán dos alternativas

1a. Alternativa

Se redondea a un entero el resultado obtenido y se ajusta la anualidad a dicho resultado.

Esto es:

$F = 17{,}450.26$

$i = 0.183/6$

$n = 27$ (valor redondeado)

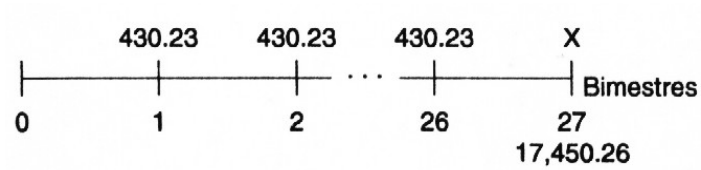
$A = ?$

$$A = \frac{Fi}{(1+i)^n - 1} = \frac{(17{,}450.26)\,(0.183/6)}{(1+\frac{0.183}{6})^{27} - 1} = \$\ 425{,}59$$

Se deben realizar 27 depósitos bimestrales de $ 425.59 cada uno para acumular $ 17,450.26.

2a. Alternativa

Se realizan 26 depósitos bimestrales por $ 430,23 cada uno y al final del bimestre número 27 se efectúa un depósito complementario. Para calcular el valor del depósito complementario se plantea una ecuación de valor.



X es el valor del depósito complementario. Tomando el momento actual como fecha focal, entonces:

$$430.23\left[\frac{1-(1+\frac{0.183}{6})^{-26}}{\frac{0.183}{6}}\right] + \frac{X}{(1+\frac{0.183}{6})^{27}} = \frac{17{,}450.26}{(1+\frac{0.183}{6})^{27}}$$

$$7{,}647.08505 + \frac{X}{2.250587462} = 7{,}753.64668$$

$$X = \$\ 239.83$$

Si se depositan $ 430.23 al final de cada bimestre durante 26 bimestres y $ 239.83 al final del bimestre número 27, se tendrá un monto de $ 17,450.26.

EJEMPLO 8.14

¿Cuántos pagos quincenales de $ 391.95 deberán hacerse para cancelar una deuda de $ 8,500, con el 27% de interés convertible cada quincena?

SOLUCIÓN

$ 8,500 son el valor actual de la deuda; por tanto, para calcular el número de pagos se despeja n de la ecuación (8.2).

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] = \frac{A\,[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$\frac{Pi}{A} = 1-(1+i)^{-n}$$

$$(1+i)^{-n} = 1-\frac{Pi}{A}$$

Aplicando logaritmos a ambos lados de la igualdad:

$$-n \log (1+i) = \log\left[1-\frac{Pi}{A}\right]$$

$$n = \frac{-\log\left[1-\frac{Pi}{A}\right]}{\log (1+i)}$$

Si:

$P = 8{,}500$

$A = 391.95$

$i = 0.27/24$

Entonces:

$$n = \frac{-\log\left[1-\frac{(8{,}500)\,(0.27/24)}{391.95}\right]}{\log (1+0.27/24)} = \frac{-\log 0.7560275545}{\log 1.01125}$$

$$n = \frac{-(-0.1214634484)}{0.00485853462} = \frac{0.1214634484}{0.00485853462}$$

$n = 25$ quincenas

EJEMPLO 8.15

¿Cuántos pagos mensuales de \$ 105.00 cada uno debemos realizar para amortizar una deuda por \$ 830.00 si se pagan intereses al 2.15% mensual capitalizable cada mes?

SOLUCIÓN

$P = 830$

$A = 105$

$i = 0.0215$

$$n = \frac{-\log\left[1-\frac{Pi}{A}\right]}{\log (1+i)} = \frac{-\log\left[1-\frac{(830)\,(0.0215)}{105}\right]}{\log (1+0.0215)}$$

$$n = \frac{-\log 0.83004761905}{\log 1.0215} = 8.7566295 \text{ meses}$$

En este ejemplo ocurre algo semejante a lo del ejemplo 8.13. Se necesitan, teóricamente, 8.7566295 meses para saldar la deuda. Sin embargo, en la práctica tenemos, entre otras, las siguientes alternativas.

1a. Alternativa

El resultado se redondea a un entero y con este valor se vuelve a calcular el valor de la mensualidad.

P = 830

i = 0.0215

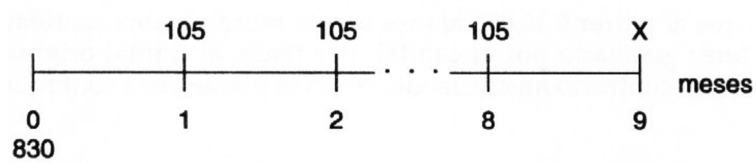
n = 9 meses (valor redondeado)

$$A = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{(830)\,(0.0215)}{1-(1.0215)^{-9}} = \$\,102.42$$

Con el fin de amortizar la deuda se deben realizar 9 pagos mensuales de $102.42.

2a. Alternativa

Se pagan 8 mensualidades de $ 105.00 cada una y al final del noveno mes se da un pago final que amortice totalmente la deuda. El valor del pago final se obtiene mediante una ecuación de valor.



Si X representa el valor del pago final y se toma como fecha focal el momento actual, entonces:

$$830 = 105\left[\frac{1-(1.0215)^{-8}}{0.0215}\right] + \frac{X}{1.0215^{9}}$$

$$830 = 764.226960986 + \frac{X}{1.21100333378}$$

$$X = \$\,79.65$$

EJEMPLO 8.16

Tomás se ganó 950,000.00 pesos en la lotería. Piensa depositar este dinero en una inversión bancaria que le da el 24% compuesto cada mes e ir retirando $ 16,000.00 mensuales, con el fin de vivir un tiempo sin trabajar, hasta que el dinero se agote. ¿Cuántos retiros podrá efectuar?

SOLUCIÓN

P = 950,000

A = 16,000

$i = 0.24/12 = 0.02$

$$n = \frac{-\log\left[1 - \frac{(950{,}000)\,(0.02)}{16{,}000}\right]}{\log(1+0.02)} = \frac{-\log -0.1875}{\log 1.02}$$

Al intentar obtener log -0.1875 la calculadora marca error. El lector recordará que el logaritmo de un número negativo no existe; por tanto, el problema no tiene solución.

Al calcular el interés generado por los $ 950,000.00 al final del primer mes, se obtiene:

I = (950,000) (0.02) (1 mes) = 19,000

Esto significa que al retirar $ 16,000 al mes se está retirando una cantidad menor que el interés generado por el capital. Por tanto, el capital original nunca se terminará; al contrario irá creciendo, como se puede ver a continuación:

Mes	Capital	Intereses	Retiro	Monto
0	950,000			950,000
1	950,000	19,000	16,000	953,000
2	953,000	19,000	16,000	956,060
3	956,000	19,121.20	16,000	959,181.20
		etcétera		
		etcétera		

Si Tomás retira justamente $ 19,000.00 cada mes, el capital inicial permanece constante todo el tiempo. Si Tomás desea agotar el dinero, deberá retirar más de $ 19,000.00 mensuales. Por ejemplo, si retira $ 20,000.00 cada mes el dinero se agota en aproximadamente 12 años.

EJEMPLO 8.17

Laser Motors vende un automóvil modelo 1995, cuyo precio de contado es de $ 67,000.00, mediante un pago inicial de $ 8,700.00 y 24 mensualidades de $ 3,411.65 cada una. Obtenga la tasa nominal de interés que Laser Motors está cobrando, así como el interés total cobrado.

SOLUCIÓN

Si el lector intenta despejar i de la ecuación (8.2) se dará cuenta de que es imposible tal cosa. Por tanto, para calcular la tasa de interés se debe utilizar el método de prueba y error, o bien emplear una calculadora programable.

El método de prueba y error consiste en ensayar valores dei en la ecuación (8.2), hasta que lleguemos a un valor aceptable.

$A = 3{,}411.65$

$P = 58{,}300$

$n = 24$ meses

Sustituyendo en la ecuación (8.2):

$$58{,}300 = 3{,}411.65\left[\frac{1-(1+i)^{-24}}{i}\right]$$

$$\frac{58{,}300}{3{,}411.65} = \frac{1-(1+i)^{-24}}{i}$$

$$17.088505562 = \frac{1-(1+i)^{-24}}{i}$$

A partir de este momento se deben ensayar valores de i hasta que el lado derecho de la igualdad anterior sea igual o muy cercano a 17.088505562.

Supóngase, para empezar, una tasa del 2.5% mensual; esto es:

$i = 0.025.$

$$17.088505562 = \frac{1-(1+0.025)^{-24}}{0.025}$$

$$17.088505562 \neq 17.88498583$$

El resultado es superior a 17.088505562. Esto significa que la tasa es más alta. Si suponemos ahora una tasa del 3.5% mensual (i = 0.035), entonces:

$$17.088505562 = \frac{1-(1+0.035)^{-24}}{0.035}$$

$$17.088505562 \neq 16.0583676$$

El resultado es inferior a 17.088505562. Por tanto, la tasa se encuentra entre 2.5% y 35% mensual. Probemos con 3% mensual, que es la media entre 2.5% y 3.5%.

$$17.088505562 = \frac{1-(1+0.03)^{-24}}{0.03}$$

$$17.088505562 \neq 16.93554212$$

La diferencia entre los valores anteriores es 17.088505562 - 16.93554212 = 0.152963442; esto quiere decir que la tasa de interés está muy cercana al 3%. Ensayando los siguientes valores de i, se tiene:

$$i = 0.0290 \quad 17.088505562 = \frac{1 - (1.0290)^{-24}}{0.0290} \neq 17.11942908$$

$$i = 0.0292 \quad 17.088505562 = \frac{1 - (1.0292)^{-24}}{0.0292} \neq 17.08241798$$

$$i = 0.0294 \quad 17.088505562 = \frac{1 - (1.0294)^{-24}}{0.0294} \neq 17.04552417$$

$$i = 0.02916 \quad 17.088505562 = \frac{1 - (1.02916)^{-24}}{0.02916} \neq = 17.0898108$$

Este último valor presenta una diferencia de 0.001305238; por tanto, es una aproximación aceptable. La tasa de interés nominal es aproximadamente 2.916% mensual.

La tasa de interés que se obtiene utilizando una calculadora programable es 35% anual, que corresponde a un 2.91666...% mensual. Si utilizamos esta tasa se tendrá:

$$i = 0.0291666... \quad 17.088505562 = \frac{1 - (1.029166..)^{-24}}{0.029166..} \neq 17.08857833$$

¡Una diferencia de 0.00007277!

El interés total cobrado es fácil de obtener.

interés total = (3,411.65/ mes) (24 meses) – 58'300,000

interés total = $ 23,579.60

EJEMPLO 8.18

Roberto ha depositado al final de cada mes $ 250.00 en una cuenta de ahorros. Al cabo de 2 años se tiene un monto de $ 7,801.84. ¿Qué tasa nominal, capitalizable mensualmente, ha ganado?

SOLUCIÓN

A = 250

F = 7,801.84

n = 24 meses

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación (8.1)

$$7{,}801.84 = 250\left[\frac{(1+i)^{24} - 1}{i}\right]$$

$$\frac{7{,}801.84}{250} = \frac{(1 + i^{24} - 1}{i}$$

$$31.207344 = \frac{(1+i)^{24} - 1}{i}$$

El despeje dei es imposible; por tanto, se debe proceder por prueba y error. Al ensayar diferentes valores de i, se llega al siguiente resultado:

$i = 0.0221$

el cual es una buena aproximación. El lector debe comprobar este resultado y verificar que la diferencia es de 0.0063844.

Si $i = 0.0221$, entonces $j = 2.21\%$ mensual = 26.52% anual.

Al utilizar una calculadora programable se obtiene una $j = 26.5\%$ anual.

EJEMPLO 8.19

Obtenga la tasa efectiva para el ejemplo anterior.

SOLUCIÓN

La tasa efectiva se obtiene mediante la ecuación (7.3). .265 12

$$e = \left(1 + \frac{.265}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i_e = 1.2996777317 - 1$$

$$i_e = 0.2996777317$$

Por tanto:

$j_e = 29.968\%$ anual

Uso de la Calculadora HP

Para resolver problemas de anualidades, anticipadas o vencidas, se utiliza el menú VDT.

EJEMPLO

¿Qué cantidad se obtendrá al cabo de dos años si se depositan $ 200.00 al final de cada mes en una cuenta de ahorros que rinde un 22% capitalizable cada mes?

SOLUCIÓN

$\boxed{\text{CLEAR DATA}}$

12 $\boxed{\text{P/AÑO}}$

$\boxed{\text{FINAL}}$

200 $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{PAGO}}$

22 $\boxed{\text{\%IA}}$

24 $\boxed{\text{N}}$

$\boxed{\text{V.F.}}$ → *5,962.17*

EJEMPLO

Jorge planea construir una cabaña en un terreno que posee para pasar en ella las vacaciones. El banco le otorga un préstamo por $ 115,000.00 a pagar en 10 años, mediante abonos mensuales. Calcule el valor del abono, si la tasa de interés es del 30% capitalizable cada mes.

SOLUCIÓN

CLEAR DATA

12 P/AÑO

FINAL

115000 V.A.

120 N

30 %IA

PAGO → *–3,031.61*

EJEMPLO

Adriana abre hoy una cuenta de ahorros con un depósito inicial de $1,000.00. La cuenta rinde un interés del 18% capitalizable cada quincena. Si ella efectúa depósitos quincenales de $ 100.00 a partir de la próxima quincena, ¿cuánto tiempo le llevará para que su cuenta alcance un monto de $ 5,284.28?

SOLUCION

CLEAR DATA

24 P/AÑO

FINAL

1000 +/– V.A.

18 %IA

100 +/– PAGO

5,284.28 V.F.

N → *35 quincenas*

Ejercicio 8.2

1. ¿Cuánto se tiene que depositar cada trimestre en una cuenta que paga el 28% con capitalización trimestral para acumular 790,000.00 pesos al término de 7 años?
2. Un hospital desea establecer un fondo de amortización para comprar un equipo de Topografía Computarizada Tridimensional en un término de 3 años. Para esto se deberá destinar cierta cantidad cuatrimestralmente hasta completar la cantidad de un millón de dólares. Si los depósitos producen un 10% capitalizable cada cuatrimestre, determínese el valor del depósito cuatrimestral.
3. Si el interés del dinero es del 7.8% trimestral convertible cada trimestre, ¿cuánto deberá ahorrar cada 3 meses una persona que desea tener $ 100,000.00 pesos en 3 años?
4. Una persona paga $ 130,000.00 por un departamento. Da un anticipo de $ 15,000.00 y deja una hipoteca de $ 115,000.00 con intereses calculados al 23.4% capitalizable cada mes. Determine el pago de la hipoteca mensual, si el préstamo se va a liquidar en 18 años. Calcule el interés total a pagar.
5. El beneficiario de un seguro de vida tiene la opción de recibir un pago único de $ 400,000.00 o bien pagos trimestrales iguales durante 5 años. Si el interés es del 18% compuesto cada trimestre, determine el pago trimestral.
6. El Sr. Villa piensa financiar la compra de una camioneta con un préstamo a 3 años y a una tasa de interés del 20% compuesto cada mes. El precio de la camioneta es de $ 85,730.00. ¿De qué cantidad serían los pagos mensuales?
7. Un granjero pagó al contado por una nueva mezcladora y desea tener suficiente dinero a la mano para comprar otra al final de la vida útil de la que acaba de comprar, que es de 5 años. Estima que el costo de la nueva mezcladora será de $ 70,000.00, menos $ 5,000.00 que obtendrá de la otra al venderla. Planea depositar dinero cada mes, a una tasa del 16% capitalizable cada mes. ¿De cuánto será cada depósito mensual?
8. El plan de jubilación de Carlos López consiste de un retiro mensual de un fondo de inversión. El saldo de la cuenta es de $ 815,700.00 al inicio del periodo de jubilación y la tasa de interés es de 2.13% mensual. Al momento de jubilarse, Carlos tiene una esperanza de vida de 15 años. ¿Cuánto puede retirar cada mes?
9. Una compañía de bienes raíces vendió una casa en $ 600,000.00 pesos. Se realizó un pago inicial de $ 150,000.00 pesos y el resto a pagar en abonos mensuales iguales. La tasa de interés será 24% capitalizable cada mes y la deuda se debe cancelar en 10 años.
    a) ¿Cuál es el pago mensual requerido?
    b) ¿Cuál será el importe total de los pagos?
    c) ¿Cuánto se pagará por intereses? d) ¿Cuál es el costo total de la casa?
10. Una persona retirada tiene $ 300,000.00 en una inversión que paga el 20% capitalizable cada 6 meses. Si desea que el fondo brinde pagos semestrales por 13 años, ¿cuánto puede retirar cada vez?

11. ¿Cuánto se tiene que depositar cada trimestre durante 3 años 9 meses, al 2.3% mensual capitalizable en forma trimestral, para tener un monto de $ 8,000.00?
12. El Sr. Andrade queda incapacitado de por vida a consecuencia de un accidente laboral. La compañía donde trabaja le concede una indemnización que unida a sus ahorros personales forma un capital de $ 327,000.00 pesos, con el cual desea asegurarse una renta mensual para los próximos 25 años. Si el Sr. Andrade puede invertir ese dinero al 2.75% mensual:
    a) ¿Cuál será su renta mensual si desea conservar intacto su capital?
    b) ¿Cuál será su renta mensual si gasta su capital al mismo tiempo que el interés sobre su dinero?
13. Una pareja que está por casarse compra un refrigerador cuyo precio de contado es de $ 2,310.00. Pagan el 12% del precio de contado como enganche y el resto en 18 mensualidades iguales. Si la tienda carga el 32% convertible cada mes, ¿cuál será el valor de las mensualidades? ¿Cuánto se paga por el refrigerador?
14. *Un automóvil nuevo, cotizado en 15,300 dólares, se renta por 3 años. El arrendatario tiene la opción de comprar el coche por 5,000 dólares al final del periodo de arrendamiento. ¿De qué valor deben ser los pagos mensuales para que el interés devengado al arrendador sea el 12% anual?
15. *Una empresa deberá saldar una deuda con valor de vencimiento por 1 millón de pesos, después de transcurridos 5 años. Para pagar esta deuda se decidió crear un fondo de amortización con depósitos mensuales iguales y una tasa de interés del 23% capitalizable cada mes. ¿Qué cantidad se tiene acumulada al cabo de 3 años?
16. Una deuda debe saldarse en dos años con pagos de 6,000 dólares cada bimestre. El deudor acuerda con su acreedor en reestructurar la deuda, liquidándola en tres y medio años, con pagos mensuales. Encuentre el valor de los nuevos pagos, si la tasa de interés es 9.7%. La capitalización de los intereses se ajusta en cada caso.
17. Un cierto fondo de amortización debe acumular dentro de 4 años un total de $ 670,000.00. En este momento el fondo cuenta con $ 87,500.00. Obtenga la cantidad que se debe depositar al fin de cada mes para formar el monto estipulado, si la inversión se efectúa al 2.715% mensual.
18. *Rubén tiene actualmente 30 años y piensa jubilarse a los 65. La empresa donde trabaja acaba de establecer un fondo de jubilación para sus empleados y Rubén decide entrar depositando cantidades iguales cada mes durante los próximos 35 años, de tal manera que al momento de jubilarse tenga un monto tal que le permita efectuar retiros mensuales de $ 4,750.00 durante 12 años. ¿Qué cantidad debe abonar al fondo si éste paga una tasa de interés del 2.3% mensual?
19. Hace 9 meses una persona compró una secadora de ropa en abonos, a un plazo de un año y medio, dando abonos mensuales iguales y pagando un interés del 31% capitalizable mensualmente. El precio de contado de la secadora era de $ 2,700.00. En este momento el comprador acaba de recibir una cierta cantidad de dinero y desea saldar su deuda. ¿Qué cantidad deberá pagar?

20. *Una fábrica necesitará reponer un equipo dentro de 8 años y la administración de la empresa decide establecer un fondo de amortización. El equipo cuesta actualmente 95,000 dólares. Tomando en cuenta una tasa de inflación del 3% anual, ¿cuánto tiene que depositar la empresa cada mes en una cuenta que paga un interés del 0.85% mensual capitalizable mensualmente? ¿Cuántos intereses ganará el fondo de amortización?
21. ¿Cuántos depósitos semestrales vencidos de$ 750.00 se deben hacer para acumular $ 4,578.83, si la tasa de interés es del 10% semestral capitalizable cada semestre?
22. ¿Cuántos pagos de $136.42 hechos al final de cada mes tendría quehacer el comprador de una sala que cuesta $ 2,150.00, si da $ 300.00 de enganche y acuerda pagar 38% de interés capitalizable en forma mensual?
23. Una persona muere y deja a su familia una herencia con valor de $ 460,000.00. El testamento especifica que la familia debe recibir pagos mensuales de $ 12,844.88. ¿Qué cantidad de pagos mensuales obtendrá la familia, si la tasa de interés es del 29% anual?
24. Leticia desea acumular 15,000 dólares mediante pagos trimestrales de 1,095.32 dólares. Si recibe un interés del 0.79% mensual capitalizable cada trimestre por su dinero, ¿cuántos pagos deberá hacer?
25. Karla puede ahorrar $ 190.00 mensuales. Si los invierte en una cuenta de ahorros que paga el 15% capitalizable mensualmente, ¿en cuánto tiempo logrará ahorrar $ 6,400.00?
26. ¿Cuántos pagos mensuales de $ 145.00 cada uno serían necesarios para salda- una deuda de $ 50,000.00 contraída hoy con intereses del 41% convertible cada mes?
27. Una pareja próxima a contraer matrimonio está planeando pasar su luna de miel en Australia. Según sus cálculos, el costo total del viaje sería de $ 75,000.00. Con este objetivo en mente comienzan a depositar cada mes $ 1,650.00 en una cuenta que produce el 18.8%. Obtenga el número de depósitos necesarios para reunir el costo del viaje.
28. Una casa está en venta por $ 425,000.00, precio de contado. Una familia la compra a crédito dando el 40% de enganche y el resto en mensualidades de $ 8,300.00 pagando un interés del 2% mensual. ¿Cuántos pagos completos deberán hacer y cuál será el valor del pago complementario?
29. El Sr. Arteaga se piensa jubilar dentro de 2 meses. Tiene un fondo de pensiones por $ 238,765.00 y desea retirar $ 4,700.00 cada mes. Si el dinero esta invertido al 21.3% capitalizable cada mes, ¿cuántos pagos mensuales recibirá?
30. Si Bertha ahorra $100.00 quincenales en una cuenta de ahorros que paga 1.2% mensual capitalizable cada quincena, ¿en cuánto tiempo reunirá $ 12,000.00?
31. ¿Cuántos retiros mensuales de $ 1,975.00 podemos hacer si tenemos depositados $ 77,530.00 y nos pagan intereses al 3.85% mensual?
32. *32. El Sr. Long desea tener 310,000 dólares en el banco dentro de 12 años efectuando depósitos mensuales. El banco paga el 8% anual capitalizable cada mes. Después de 7 años, la tasa de interés aumenta al 9% anual capitalizable en

forma mensual. Si el Sr. Long continúa haciendo los mismos depósitos, ¿en qué tiempo tendrá los 310,000 dólares?

33. Con 15 depósitos trimestrales vencidos de $ 350.00 cada uno se formó un monto de $ 6,790.50. Obtenga la tasa nominal capitalizable cada trimestre, así como los intereses ganados.
34. Una máquina de escribir eléctrica puede ser comprada con $ 1,705.00 al contado o mediante 30 mensualidades de $ 90.78. Calcule la tasa nominal de interés cargado y la tasa de interés efectiva.
35. Una persona ha depositado, al final de cada mes, $ 230.00 en una cuenta de inversión. Al cabo de 5 años tiene en su cuenta la cantidad de $ 36,371.47. ¿Qué tasa nominal capitalizable cada mes ha ganado?
36. Un fondo de jubilación ofrece por 155,000.00 pesos disponibles en este momento, una renta bimestral de $ 5,269.69 pagadera durante 20 años. ¿Qué tasa de interés capitalizable cada bimestre gana el dinero?
37. Encuentre la tasa nominal convertible cada 3 meses mediante la cual, pagos de 625 dólares cada 3 meses acumularán un monto de 25,329.39 dólares en 7 años. ¿Cuál es la tasa efectiva?
38. Una escuela que ofrece cursos por correspondencia muestra los siguientes planes de pago para cubrir el costo total del curso de Electrónica Digital.

	PLAN ECONOMICO		PLAN NORMAL	
Plan de Contado	Núm. de cuotas	Cuotas mensuales de	Núm. de Cuotas	Cuotas mensuales de
$ 1,490	34	$ 80.50	24	$ 95.00

¿Qué tasa nominal de interés carga la escuela en los planes normal y económico?

39. Un telescopio tiene un precio de lista de $ 5,000.00. Puede ser comprado dando un enganche de $ 500.00 y $ 167.24 quincenales durante un año y medio. Se puede comprar en efectivo con un 10% de descuento. ¿Qué tasa nominal de interés, capitalizable cada quincena, se está cargando al cliente que compra a crédito?
40. *Javier es un prestamista que presta el dinero aplicando una tasa de descuento del 30% anual. El valor del pago mensual se obtiene dividiendo el valor de vencimiento de la deuda entre el número de pagos. Encuentre la tasa de interés nominal capitalizable cada mes y la tasa efectiva pagadas por una persona que pide $ 3,000.00 a este prestamista, a pagar en 10 meses.

TEMA ESPECIAL

UDI

En el tema especial sobre la inflación se mencionó que si al vencimiento de una inversión la tasa de inflación resulta mayor que la anticipada por el inversionista, entonces el rendimiento real obtenido será menor que el esperado. Esto hace que las tasas de interés nominales tengan una prima de riesgo debido a la incertidumbre sobre cual será la tasa de inflación durante el plazo de la inversión.

Al no saber el inversionista cuánto poder adquisitivo le restará la inflación a su dinero, exige una tasa superior para que cubra el riesgo que se toma de que la inflación pueda ser mayor a la tasa de interés que se está pactando y se tengan, por tanto, tasas reales negativas. Por lo anterior, la inflación contribuye a incrementar las tasas de interés, tanto activas como pasivas, al incorporar la prima de riesgo.

Un inversionista espera que la tasa de interés que recibe por su inversión sea lo suficientemente alta con el fin de que se pueda compensar la pérdida que la inflación causa en el valor del capital invertido y, además, recibir una ganancia.

Las Unidades de Inversión (UDI) se crearon con el objetivo de tener en cuenta el efecto inflacionario en las operaciones financieras; es decir, se aplican para conocer el valor real de una inversión, un crédito o una transacción comercial.

Las Unidades de Inversión son una unidad de cuenta o de referencia que se utilizan a partir del 4 de abril de 1995 como sistema de referencia para realizar operaciones bancarias, financieras y comerciales. Las UDI no son una moneda, ni sustituyen al peso, pero se venden y se compran por su valor en pesos.

El valor de las UDI sube en la misma proporción que el índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), por ello las inversiones en UDI siempre están protegidas de la inflación, a diferencia de las inversiones tradicionales cuyas tasas de interés nominales, que aun siendo muy altas, pueden quedar por abajo de la tasa de inflación, generándose tasas reales negativas.

Las UDI iniciaron su cotización el día 4 de abril de 1995. Su valor ese día fue de $ 1.00 por cada UDI. A partir de ese momento su valor se ha incrementado diariamente de acuerdo a la tasa de inflación. Este valor es oficial y lo publica, todos los días, el Banco de México en el Diario Oficial de la Federación. Por ejemplo, si después de transcurridos 90 días de su lanzamiento, el INPC crece 12%, una UDI valdrá 12% más de lo que costaba el 4 de abril; esto es $ 1.12. Si el 4 de abril de 1996 la inflación acumulada es del 50%, cada UDI valdrá $ 1.50 en esa fecha, y así sucesivamente. En la siguiente tabla se muestra el valor de las UDI del 4 de abril al 25 de abril de 1995.

Fecha	Valor en $
4 de abril de 1995	1.000000
5 de abril de 1995	1.001918
6 de abril de 1995	1.003840
7 de abril de 1995	1.005766
8 de abril de 1995	1.007695
9 de abril de 1995	1.009628
10 de abril de 1995	1.011564
11 de abril de 1995	1.013882
12 de abril de 1995	1.016205
13 de abril de 1995	1.018534
14 de abril de 1995	1.020868
15 de abril de 1995	1.023207
16 de abril de 1995	1.025552
17 de abril de 1995	1.027902
18 de abril de 1995	1.030257
19 de abril de 1995	1.032618
20 de abril de 1995	1.034984
21 de abril de 1995	1.037355
22 de abril de 1995	1.039732
23 de abril de 1995	1.042115
24 de abril de 1995	1.044503
25 de abril de 1995	1.046896

El Banco de México es el organismo encargado de calcular y publicar el valor en moneda nacional de las UDI para cada día, conforme con lo siguiente: A más tardar el día 10 de cada mes se publicará el valor correspondiente a los días 11 a 25 de dicho mes, y a más tardar el día 25 de cada mes se publicará el valor correspondiente a los días 26 de ese mes a 10 del mes inmediato siguiente.

La variación porcentual del valor de la UDI del 10 al 25 de cada mes será igual a la variación del INPC en la segunda quincena del mes inmediato anterior. La variación del valor de la UDI del 25 de un mes al 10 del mes inmediato siguiente será igual a la variación del INPC en la primera quincena del mes referido en primer término. La variación será uniforme a través de los días, para garantizar que quienes requieran hacer operaciones tengan un mínimo de certidumbre y un esquema de máxima facilidad para hacer los cálculos correspondientes.

EJEMPLO 1

Si se invierten $ 10,000.00 a un año y a una tasa de interés del 45%, para que la inversión resulte redituable en el plazo escogido la inflación deberá ser menor que 45%. Si la tasa de inflación resulta mayor, la tasa de interés no dará ningún rendimiento real positivo y, por el contrario, se estará perdiendo parte del capital ya que los $ 10,000.00 invertidos originalmente ya no tendrán el mismo poder de compra al vencer el plazo estipulado.

Si la inflación en el año es del 53%, calcule cuánto se habrá perdido en términos reales.

SOLUCION

Empleando la fórmula de Fisher vista en el tema sobre la inflación, se tiene:

$$r = \frac{0.45 - 0.53}{1.53}\,100 = -5.229\%$$

Hubo una pérdida del 5.229% en términos reales.

EJEMPLO 2

Usted le vende hoy un automóvil a su hermano en $ 37,800.00 y él se compromete a pagárselo dentro de 6 meses. ¿De qué manera se podría garantizar que lo que usted recibirá al cabo de 6 meses tendrá el mismo poder adquisitivo que los $ 37,800.00 pactados el día de hoy?

SOLUCION

Este problema se puede solucionar utilizando Unidades de Inversión. Si su automóvil vale $ 37,800.00 el día de hoy, y hoy la UDI está cotizada en $ 1.1476, entonces su coche valdrá:

$$\frac{37{,}800 \text{ pesos}}{1.1476 \text{ pesos/UDI}} = 32{,}938.31 \text{ UDI}$$

Si la inflación acumulada en los próximos 6 meses es del 14%, cada UDI valdrá entonces (1.1476)(1.14) = $ 1.3083. Al cobrar, usted recibirá en pesos . el equivalente a 32,938.31 UDI o sea:

(32,938.31 UDI) (1.3083 pesos/UDI) = $ 43,093.19

Con esto usted conserva su poder de compra.

EJEMPLO 3

Sandra invierte su dinero, $ 23,000, en un pagaré en UDI con rendimiento liquidable al vencimiento. El plazo de la inversión es de 6 meses y gana un interés real del 5% anual. Obtenga el monto en pesos al final del plazo establecido. Supóngase que al momento de la inversión la UDI vale 1.151643 pesos y al cabo de 6 meses se tiene una inflación acumulada del 15.6%.

SOLUCION

$$\text{Valor del capital en UDI} = \frac{23{,}000 \text{ pesos}}{1.151643 \text{ pesos/UDI}} = 19{,}971.47 \text{ UDI}$$

El monto de la inversión es:

M = 19,971.47 [1 + (0.05/12) (6)]= 20,470.75 UDI

El valor de la UDI al cabo de 6 meses por efecto de la inflación es:

$(1.151643)(1.156) = 1.331299$

Por tanto, el monto en pesos es:

M = (20,470.75 UDI)(1.331299 pesos/UDI) = $ 27,252.69

Utilizando la fórmula de Fisher se puede calcular cuál sería la tasa nominal equivalente a la tasa real, para el periodo de la inversión.

$$i = r(1 + \lambda) + \lambda = 0.025\,(1.156) + 0.156$$

$$i = 18.49\%\text{ semestral} = 36.98\%\text{ anual}$$

El monto obtenido es equivalente a haber contratado la inversión, en forma tradicional, a una tasa de interés nominal del 36.98% anual:

M = 23,000 [1 + (0.3698/12) (6)] = $ 27,252.70

La ventaja de invertir en UDI es que, sin importar la inflación que se tenga, siempre se obtendrá un rendimiento mayor a la inflación.

EJEMPLO 4

Una persona adquiere hoy a crédito una computadora. La computadora cuesta $ 8,900.00 de contado y conviene en pagarla en 6 mensualidades vencidas. ¿Cuánto tendrá que pagar cada mes si la operación mercantil está pactada en UDI y se cobra una tasa de interés real del 10% anual capitalizable cada mes? En el momento en que se celebra la operación el valor de la UDI es de 1.164989. Supóngase una inflación mensual constante del 1 %.

SOLUCION

$$\text{Valor del capital en UDI} = \frac{8{,}900\text{ pesos}}{1.164989\text{ pesos/UDI}} = 7{,}639.56\text{ UDI}$$

El valor del pago mensual, en UDI, será:

$$A = \frac{(7{,}639.56)\,(0.10/12)}{[1 - (1 + 0.10/12)^{-6}]}$$

$$A = 1{,}310.65\text{ UDI}$$

Como la inflación es del 1 % mensual, el valor de cada pago, en pesos, será de acuerdo a la siguiente tabla:

Mes	Pago en UDI	Valor de la UDI	Pago en pesos
1	1,310.65	1.176639	1,542.16
2	1,310.65	1.188405	1,557.58
3	1,310.65	1.200289	1,573.16
4	1,310.65	1.212292	1,588.89
5	1,310.65	1.224415	1,604.78
6	1,310.65	1.236659	1,620.83

EJEMPLO 5

Una empresa obtiene un préstamo por $ 100,000.00 que debe liquidar al cabo de 8 años, mediante 8 pagos anuales. El pago anual estará formado por 1/8 del capital más los intereses generados por el saldo insoluto. La empresa puede escoger entre dos opciones de pago:

a) Crédito tradicional, con una tasa de interés del 37.5% anual*.

b) Crédito denominado en UDI, con una tasa real anual del 10% y se supone una tasa de inflación constante del 25% anual.

Elabore la tabla de amortización para cada opción.

SOLUCION

a) Amortización al capital = 100,000/8 = $ 12,500 mensuales

Año	Saldo insoluto	Amortización al capital	Intereses	Pago total
1	100,000	12,500	37,500.00	50,000.00
2	87,500	12,500	32,812.50	45,312.50
3	75,000	12,500	28,125.00	40,625.00
4	62,500	12,500	23,437.50	35,937.50
5	50,000	12,500	18,750.00	31,250.00
6	37,500	12,500	14,062.50	26,562.50
7	25,000	12,500	9,375.00	21,875.00
8	12,500	12,500	4,687.50	17,187.50
	TOTAL	100,000	168,750.00	268,750.00

b) Se supondrá que el valor de la UDI al inicio del préstamo es de 1.167676 pesos/UDI. Por tanto, el capital prestado tiene un valor de:

100,000/1.167676 = 85,640.19 UDI

amortización al capital = 85,640.19/8 = 10.705.02 UDI mensuales.

---

* *Esta tasa de interés nominal es la correspondiente a una inflación del 25% anual y a una tasa real del 10% anual, según la fórmula de Fisher.*

Año	Valor de una UDI al final del año	Saldo insoluto en UDI	Saldo insoluto en pesos	Amortización en UDI	Amortización en pesos	Intereses en UDI	Intereses en pesos	Pago total en UDI	Pago total en pesos
1	1.459595	85,640.19	100,000.00	10,705.02	15,624.99	8,564.02	12,500.00	19,269.04	28,124.99
2	1.824494	74,935.17	109,375.00	10,705.02	19,531.24	7,493.52	13,671.88	18,198.54	33,203.12
3	2.280617	64,230.14	117,187.50	10,705.02	24,414.05	6,423.01	14,648.43	17,128.03	39,062.48
4	2.850771	53,525.12	122,070.29	10,705.02	30,517.56	5,352.51	15,258.79	16,057.53	45,776.35
5	3.563464	42,820.09	122,070.27	10,705.02	38,146.95	4,282.01	15,258.78	14,987.03	53,405.73
6	4.454330	32,115.07	114,440.89	10,705.02	47,683.69	3,211.51	14,305.11	13,916.53	61,988.80
7	5.567913	21,410.04	95,367.38	10,705.02	59,604.62	2,141.00	11,920.92	12,846.02	71,525.54
8	6.959891	10,705.02	59,604.62	10,705.02	74,505.77	1,070.50	7,450.58	11,775.52	81,956.35
			TOTAL		**310,028.87**		**105,014.49**		**415,043.36**

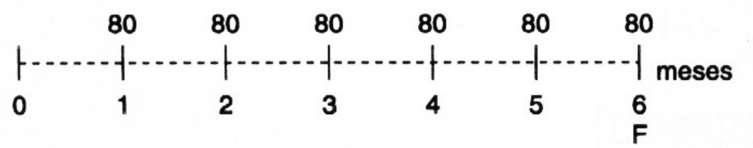
TEMA ESPECIAL

ANUALIDADES Y CAPITALIZACIÓN CONTINUA

Cuando se tiene una anualidad cuyos intereses se capitalizan continuamente, el cálculo del valor futuro se puede obtener formando una ecuación de valor, utilizando la ecuación (7.5).

Por ejemplo: Suponga que se depositan $ 80.00 cada mes en una cuenta de ahorros que produce un 18% de interés capitalizable en forma continua. ¿Cuál será el monto al cabo de 6 meses?

El diagrama de tiempo que representa esta situación es el siguiente:



Si se escoge la fecha focal en el mes sexto, entonces se forma la siguiente ecuación de valor:

$$80e^{(0.18/12)\,(5)} + 80e^{(0.18/12)\,(4)} + 80e^{(.18/12)\,(3)} +$$

$$80e^{(0.18/12)\,(2)} + 80e^{(0.18/12)\,(1)} + 80e^{(.18/12)\,(0)} = F$$

Sacando el factor común:

$$80\,[e^{(0.18/12)\,(5)} + e^{(0.18/12)\,(4)} + e^{(0.18/12)\,(3)} + e^{(0.18/12)\,(2)} + e^{(0.18/12)\,(1)} + e^{(0.18/12)\,(0)}] = F$$

$$80\,(6.231316156) = F$$

$$F = 498.51$$

El lector comprenderá que si el número de pagos periódicos, sean éstos depósitos o retiros, es muy grande, el uso de una ecuación de valor resulta impráctico debido al gran número de operaciones que se tendrán que realizar. En este caso es mejor utilizar una fórmula. A continuación se darán, sin demostración, las fórmulas para obtener el monto o valor futuro (F) y el valor presente (P) de una anualidad capitalizable continuamente.

$$F = A\left[\frac{e^{in} - 1}{e^{i} - 1}\right]$$

$$P = A\left[\frac{1 - e^{-in}}{e^{i} - 1}\right]$$

Donde i es la tasa de interés, expresada en forma decimal y n es el tiempo.

Utilizando el ejemplo mencionado al principio, se tiene que:

$A = 80$

$i = 0.18 \text{ por año} = \frac{0.18}{12} \text{ por mes}$

$n = 6 \text{ meses}$

$$F = 80\left[\frac{e^{\left(\frac{0.18}{12}\right)(6)} - 1}{e^{\left(\frac{.18}{12}\right)} - 1}\right]$$

$$F = 80\left[\frac{1.094174284 - 1}{1.015113065 - 1}\right]$$

$F = \$\ 498.51$

EJEMPLO 1

Un millonario desea donar $ 10,000.00 mensuales a una universidad con el fin de llevar a cabo investigaciones en matemáticas puras y aplicadas. El donativo se entregará al final de cada mes durante los próximos 2 años. Si el dinero se manejará a través de un fideicomiso, ¿que cantidad deberá dar el millonario en este momento con el fin de establecer el fideicomiso, sabiendo que el dinero paga un 20% capitalizable en forma continua?

SOLUCION

$A = 10{,}000$

$i = 0.20 \text{ por año } \frac{0.20}{12} \text{ por mes}$

$n = 24 \text{ meses}$

$$P = 10{,}000\left[\frac{1 - e^{-\left(\frac{.20}{12}\right)(24)}}{e^{\left(\frac{0.20}{12}\right)} - 1}\right]$$

$$P = 10{,}000\left[\frac{1 - 0.670320046}{1.01680633 - 1}\right]$$

$P = \$\ 196{,}164.16$

EJEMPLO 2

Un trabajador empieza a crear un fondo con miras a tener un ingreso al jubilarse. En este momento el trabajador tiene 32 años cumplidos y piensa depositar $ 200.00 cada bimestre hasta que cumpla los 60 años. Si el fondo produce un interés del 25% anual capitalizable continuamente, calcule el monto que tendrá al momento de retirarse.

SOLUCION

$$A = \$\ 200$$

$$i = 0.25 \text{ por año} = \frac{0.25}{6} \text{ por bimestre}$$

$$n = 168 \text{ bimestres}$$

$$F = 200\left[\frac{e^{\left(\frac{0.25}{6}\right)(168)} - 1}{e^{\left(\frac{.25}{6}\right)} - 1}\right] = 200\ (25{,}751.18339)$$

$$F = 5'150{,}236.70$$

EJEMPLO 3

Una persona compra una camioneta cuyo precio de contado es de $ 85,000.00. Da un enganche de $ 15,000.00 y el resto a pagar en 36 mensualidades. Si la tasa de interés es del 28% capitalizable en forma continua, ¿cuál es el valor de los pagos mensuales?

SOLUCION

Despejando A de la fórmula de valor actual y sustituyendo las variables por los valores numéricos, se tiene:

$$A = \frac{P\,(e^{i} - 1)}{(1 - e^{-in})}$$

$$A = \frac{70{,}000\left[e^{\left(\frac{0.28}{12}\right)} - 1\right]}{\left[1 - e^{-\left(\frac{0.28}{12}\right)(36)}\right]}$$

$$A = 2{,}907.92$$