Unidad 9

- Interés Compuesto

INTRODUCCION

En los problemas de interés simple, el capital que genera los intereses permanece constante todo el tiempo de duración del préstamo. En cambio, cuando el interés es compuesto, el interés generado en un periodo se convierte en capital en el siguiente periodo. Esto es, el interés simple generado al final del primer periodo se suma al capital original, formándose un nuevo capital. A partir de este nuevo capital se calcula el interés simple generado en el segundo periodo y este interés se suma al capital; y así sucesivamente. La suma total obtenida al final del proceso se conoce como monto compuesto. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le llama interés compuesto. En forma simbólica:

$$I = F - P \tag{7.1}$$

Donde I representa el interés compuesto; F, el monto compuesto y P, el capital original.

Como se ve, el interés compuesto es la operación financiera en la cual el capital aumenta al final de cada periodo por adición de los intereses vencidos.

El periodo convenido para convertir el interés en capital se llama periodo de capitalización o periodo de conversión. Así, por ejemplo, la expresión "periodo de capitalización semestral" (o bien, "periodo de conversión semestral) significa que el interés generado se capitaliza, es decir, se suma al capital, al término de cada 6 meses. De igual forma, al decir periodo de capitalización mensual se está indicando que al final de cada mes se capitaliza (se suma) el interés ganado a lo largo del mes. El periodo de capitalización se puede definir como el intervalo de tiempo al final del cual se capitalizan los intereses generados en dicho intervalo de tiempo.

El periodo de capitalización es la unidad básica de tiempo en todos los problemas de interés compuesto. Por tanto, al efectuar un cálculo de interés compuesto la tasa de interés y el tiempo deberán expresarse en la misma unidad de tiempo que el periodo de capitalización.

Por ejemplo, si en un determinado problema el periodo de capitalización es trimestral, entonces la tasa de interés y el tiempo se deberán expresar en trimestres a fin de realizar los cálculos.

Al igual que en el interés simple, la tasa de interés dada en un problema de interés compuesto será una tasa anual, excepto que se diga lo contrario.

Es práctica común que al dar la tasa de interés se mencione en seguida el periodo de capitalización. De esta manera se diría, por ejemplo:

- 48% anual capitalizable semestralmente o, simplemente, 48% capitalizable semestralmente.
- 31% capitalizable mensualmente. (Se entiende que se trata de una tasa anual),
- 3.5% mensual convertible cada mes.
- 12.3% trimestral con capitalización semestral.

EJEMPLO 7.1

En cierta institución bancaria la tasa de interés en cuentas de ahorros, para el caso de las personas físicas, es del 20% capitalizable cada semestre.

Una persona abre una cuenta de ahorros depositando $ 2,000 y no lleva a cabo depósitos o retiros posteriores a la apertura de la cuenta. Si se deja capitalizar los intereses, calcule:

a) El monto compuesto al final de 2 años.

b) El interés compuesto ganado al final de 2 años.

c) Compare el monto compuesto con el monto simple.

SOLUCION

a) Debido a que el periodo de capitalización es semestral, el semestre es la unidad básica de tiempo en este problema. Por tanto, la tasa de interés, que está dada en forma anual, y el tiempo se deben de expresar en semestres.

Como la tasa es por año y en un año se llevan a cabo 2 capitalizaciones, se tiene que:

j = 20% anual = 20 = 10% semestral

t= 2 años = (2 años) (2 semestres/año) = 4 semestres

En los 2 años habrá 4 periodos de capitalización.

Capital original	$ 2,000.00
Interés del primer semestre = (2000) (0.10) (1) =	$ 200.00
Capital al final del primer semestre	$ 2,200.00
Interés del segundo semestre = (2,2000) (0.10) (1) =	$ 220.00
Capital al final del segundo semestre	$ 2,420.00
Interés del tercer semestre = (2,420) (0.10) (1) =	$ 242.00
Capital al final del tercer semestre	$ 2,662.00
Interés del cuarto semestre = (2,662) (0.10) (1) =	$ 266.20
Capital al final del cuarto semestre	$ 2,928.20

El monto compuesto obtenido al final de 2 años es $ 2,928.20.

b) Mediante la ecuación (7.1) se obtiene el interés compuesto ganado en los 2 años.

$$I = F - P = 2{,}928.20 - 2{,}000 = 928.20$$

c) Si la inversión fuese a interés simple, el monto al final de los 2 años sería:

$$M = 2{,}000\,[1 + (0.20)\,(2)] = 2{,}800$$

Comparando los resultados se observa que el interés compuesto es mayor que el interés simple, para un mismo capital, tasa y tiempo. Esto es así debido a que en el interés compuesto se ganan intereses sobre los intereses capitalizados. Debido a la capitalización de los intereses, el monto compuesto crece en progresión geométrica; mientras que el monto simple crece en progresión aritmética.

CALCULO DEL MONTO COMPUESTO

El ejemplo anterior mostró la forma como se calcula el monto compuesto, efectuando cálculos de interés simple periodo por periodo. Esta forma de calcular el monto compuesto es bastante laboriosa y tardada, sobre todo si se tienen muchos periodos de capitalización. Imagine el lector el tiempo que se tardaría en calcular el monto compuesto del ejemplo anterior si el tiempo fuera de 20 años (¡40 periodos de capitalización!). A fin de evitar pérdida de tiempo, a continuación se deduce una fórmula que permitirá obtener el monto compuesto de una manera directa.

Sea P un capital invertido ala tasa de interés compuesto de j% por periodo de capitalización[*]. Se desea obtener el monto compuesto F obtenido al final de n periodos de capitalización o conversión.

Núm. de periodo de capitalización	Capital al principio del periodo	Interés en el periodo	Monto compuesto al final del periodo
1	P	$I = (P)\,(i)$[**] $(1 \text{ periodo}) = Pi$	$P + Pi = P(1 + i)$
2	$P(1 + i)$	$I = [P\,(1+i)\,]\,(i)\,(1 \text{ periodo})$ $= P(1 + i)\,i$	$P\,(1+i) + P\,(1 + i)\,i =$ $P(1 + i)\,(1 + i)$[***] $= P(1 + i)^2$
3	$P(1 + i)^2$	$I = [P(1 + i)^2\,]\,(i)\,(1 \text{ periodo})$ $= P(1 + i)^2\,i$	$P(1 + i)^2 + P(1+i)^2\,i =$ $P(1 + i)^2\,(1 + i) = P(1 + i)^3$
4	$P(1 + i)^3$	$I = [P(1 + i)^3]\,(i)\,(1 \text{ periodo})$ $= P(1 + i)^3\,i$	$P(1 + i)^3 + P(1 + i)^3\,i =$ $P(1 + i)^3\,(1 + i) = P(1 + i)^4$
- - -	- - -	- - -	- - -
n	$p(1 + i)^{n-1}$	$I = P\,(1 + i)^{n-1}\,(i)\,(1 \text{ periodo})$ $= P(1 + i)^{n-1}\,i$	$P(1 + i)^{n-1} + P(1+i)^{n-1}\,i$ $= P(1 + i)^{n-1}\,(1 + i)$ $= P(1 + i)^n$

[*] *Observe que j no es tasa anual, sino que es la tasa convertida al periodo de capitalización.*

[**] *Recuerde que i = j/ 100.*

[***] *Se realizó una factorización. El factor común es P(1 + i).*

De la tabla anterior se observa que el monto compuesto al final del primer periodo es P(1 + i); el monto compuesto al final del segundo periodo-es P (1+ i)2; el monto compuesto al final del tercer periodo es P (1+ i)3, y así sucesivamente, de tal forma que al final de n periodos el monto compuesto viene dado por:

$$F = P(1 + i)^n \tag{7.2}$$

donde F es el monto compuesto o valor futuro, P es el capital original, i es la tasa de interés en forma decimal (esto es, dividida entre 100) por periodo de capitalización y n es el número de periodos de capitalización.

La ecuación (7.2) es la fórmula general del interés compuesto. Su demostración general se lleva a cabo mediante inducción matemática.

EJEMPLO 7.2

Obtener el monto compuesto y el interés compuesto al final de 6 años de $ 10,000 invertidos a una tasa del 34% con capitalización trimestral.

SOLUCION

En este caso el trimestre es la unidad básica de tiempo. Como la tasa es anual y en un año hay 4 trimestres, se tiene que:

$$j = 34\% \text{ por año} = \frac{34}{4} = 8.5\% \text{ trimestral}$$

Por tanto, i=0.085 por trimestre

El tiempo es igual a 6 años. Por tanto, 6 años = (6 años) (4 trimestres/año) = 24 trimestres. Esto significa que hay 24 periodos de capitalización.

Es decir:

n = 24.

Sustituyendo valores en la ecuación (7.2) se tiene:

$F = 10{,}000\ (1 + 0.085)^{24} = 10{,}000\ (1.085)^{24}$

Desde un punto de vista práctico, existen 2 formas para evaluar la expresión anterior:

a) Resolver utilizando logaritmos*.
b) Utilizar la calculadora de forma directa.

Resolviendo mediante el uso de los logaritmos, se tiene:

log F = log 10,000 + 24 log 1.085
log F = 4 + (24) (0.03542973818) = 4.850313716
F=antilog 4.850313716
F = 70,845.74

---

* *Se espera que con lo estudiado en el capítulo 2 el lector pueda advertir los casos en donde se usan los logaritmos.*

Resolviendo por medio de la función de elevación a potencia de la calculadora, se tiene:

$$F = 10,000 \boxed{\times} 1.085 \boxed{y^x} 24 \boxed{=} 70,845.74$$

En 6 años, la inversión de \$ 10,000 se transformará en un valor futuro o monto por \$ 70,845.74 debido a la generación de un interés compuesto de \$ 60,845.74

EJEMPLO 7.3

¿Qué cantidad de dinero se habrá acumulado al término de 3 años si se invierte un capital original de \$ 12,765 al 3.4% mensual capitalizable cada cuatrimestre?

SOLUCION

La tasa de interés es del 3.4% al mes, pero pagadera cada cuatrimestre, lo que significa que se paga el 13.6%* en cada periodo cuatrimestral)

El tiempo es igual a 3 años; por tanto:

$$3 \text{ años} = (3 \text{ años}) \left(3 \frac{\text{cuatrimestres}}{\text{año}}\right) = 9 \text{ cuatrimestres.}$$

Esto significa que hay 9 periodos de capitalización.

n=9

$$F = 12,765\,(1 + 0.136)^9 = 12,765\,(1.136)^9$$

$$\log F = \log 12,765 + 9 \log 1.136 = 4.604425802$$

$$F = 40,218.49$$

$$F = 10,000$$

EJEMPLO 7.4

Si el costo de la energía eléctrica va a estar aumentando a un ritmo del 3.16% mensual durante los próximos 12 meses, ¿cuál será el aumento total?

SOLUCION

En este caso se debe suponer el costo actual de la energía eléctrica. Supongamos que en este momento el kilowatt-hora tiene un costo de \$ 1.00 Con este dato se obtiene el costo final:

$$F = 1.00\,(1 + 0.0316)^{12} = 1.00\,(1.0316)^{12}$$

$$F = 1.00 \boxed{\times} 1.0316 \boxed{y^x} 12 \boxed{=} 1.4526$$

El incremento total es de \$ 0.4526; lo cual representa un 45.26% de aumento.

Hasta ahora sólo se ha tomado en cuenta el caso en que la tasa de interés permanece sin variación durante todo el tiempo que dura la inversión y, además, no se realizan depósitos o retiros. Cuando ocurren estos cambios, el problema se soluciona dividiéndolo en partes.

---

* *(3.4) (4) = 13.6% cada cuatrimestre*

EJEMPLO 7.5

Si se tiene una inversión en la que la tasa de interés es variable, el monto final puede calcularse obteniendo el monto parcial cada vez que la tasa cambia.

Se invirtieron 10,000 dólares en un banco por 5 años. Cuando se realizó el depósito, el banco estaba pagando el 9.7% capitalizable trimestralmente. Después de 3 años y medio, la tasa cambió a19% convertible cada mes. Determine el monto compuesto al finalizar los 5 años.,

SOLUCION

Los 5 años se dividen en 2 partes: los primeros 3.5 años cuando el periodo de capitalización era trimestral, y los siguientes 1.5 años cuando el periodo de capitalización es de un mes. El monto compuesto obtenido en la primera parte se convierte en el capital de la segunda.

Primera Parte

$P = 10{,}000$ dólares

$j = \frac{9.7}{4} = 2.425\%$ trimestral

$n = (3.5 \text{ años})\ (4 \text{ trimestres/año}) = 14$ trimestres

$F = 10{,}000\ (1 + 0.02425)^{14} = 10{,}000\ (1.02425)^{14}$

$F = 13{,}985.68$ dólares

Segunda Parte

$P = 13{,}985.68$ dólares

$j = \frac{9}{12} = 0.75\%$ mensual

$n = (1.5 \text{ años})\ (12 \text{ meses/año}) = 18$ meses

$F = 13{,}985.68\ (1 + 0.0075)^{18} = 13{,}985.68\ (1.0075)^{18}$

$F = 15{,}999.06$ dólares

EJEMPLO 7.6

El 1 de abril de 1989 se efectuó un depósito de $ 800 en un banco que pagaba el 75% de interés capitalizable cada trimestre. El 1 de octubre de 1990 se realizó un depósito de $ 1,100 en la misma cuenta, y ese mismo día la tasa de interés cambió al 47% con capitalización mensual. ¿Cuál será el saldo en la cuenta el 1 de julio de 1994?

SOLUCION

Primera Parte

Se calcula el monto compuesto al 1 de octubre de 1990.

Del 1 de abril de 1989 al 1 de octubre de 1990 hay 6 trimestres; por tanto, n = 6. Por otro lado, la tasa de interés anual deberá ser dividida entre 4 para que quede transformada al periodo de capitalización.

$$F = 800\ (1 + \frac{0.75}{4})^6 = 800\ (1.1875)^6$$

$$F = 2{,}243.32$$

El monto compuesto el 1 de octubre de 1990 fue de $ 2,243.32, pero como ese día se depositaron $ 1,100, el saldo es de $ 3,343.32. Este saldo es el capital para la segunda parte del problema.

Segunda Parte

Se obtiene el monto compuesto de $ 3,343.32, desde el 1 de octubre de 1990 al 1 de julio de 1994, a la tasa del 47% con capitalización mensual. En este caso, n = 45 meses.

$$F = 3{,}343.32\ (1 + \frac{0.47}{12})^{45} = 3{,}343.32\ (1.039166667)^{45}$$

$$F = 18{,}837.02$$

Ejercicios 7.1

1. Encuentre el monto compuesto y el interés compuesto para cada uno de los siguientes casos:

Capital	Tasa de interés	Capitalización	Tiempo
$ 1,000	56.75%	anual	10 años
$ 730	45.30%	bimestral	2 años
$ 2,250	34.25%	mensual	8 meses

2. Obtenga el monto compuesto y el interés compuesto al final de 6 meses de $ 3,800, invertidos al 29% convertible mensualmente.
3. Se invierten $ 2,000 al 5.1% mensual de interés compuesto cada mes por 2 años. ¿Cuál es la cantidad acumulada al término de ese tiempo? ¿A cuánto asciende el interés?
4. En sus cuentas de ahorros, el ABC BANK de Houston, Texas, ofrece una tasa de interés anual del 8.75% capitalizable diariamente. Si se invierten 4,500 dólares, ¿cuál será su valor después de 2 años? Considere el año de 365 días; es decir, obtenga el valor futuro exacto.

5. Un anuncio bancario dice: "El dinero invertido con nosotros gana intereses al 42.7% capitalizable cada día". Encuentre el monto si usted decide invertir $ 5,730 durante 3 años en dicho banco.
6. En 1626, Peter Minuit de la Compañía de las Indias Occidentales Holandesas, compró, a los indígenas que habitaban la Isla de Manhattan, los derechos a la Isla por una cantidad equivalente a unos 24 dólares de 1975. Si ese dinero se hubiera invertido al 6.5% de interés compuesto anualmente, ¿cuánto habrá valido la inversión al final de 1975?
7. $ 3,620 fueron invertidos al 6.3% mensual de interés compuesto mensualmente por un año y 5 meses. a) Obtenga el monto compuesto al final de este tiempo. b) ¿Cuánto más se ganó con el interés compuesto que lo que se hubiera ganado con el interés simple?
8. Cuando Armando cumplió 6 años de edad, su abuelo le obsequió $ 5,000 para su educación universitaria. Sus padres depositaron el dinero en una cuenta que pagaba el 39% con capitalización mensual. Si dejan la cuenta sin tocar hasta que Armando cumpla 18 años de edad y la tasa permanece constante todo ese tiempo, ¿cuánto habrá en la cuenta cuando el niño esté listo para ir a la universidad?
9. Una persona tiene que elegir entre invertir $ 1,673 al 6% mensual capitalizable cada mes por un año, o hacerlo al 6.67% mensual con capitalización trimestral por un año. ¿Qué es mejor?
10. Se estima que en las condiciones económicas actuales, una casa, cuyo valor es de $ 267,000, aumentará su valor cada semestre en 30% sobre el valor del semestre anterior, durante los próximos 5 años. ¿Cuál será su valor al final de dicho plazo?
11. Las utilidades de cierta compañía se han incrementado en promedio un 18% anual entre 1985 y 1990. Las utilidades de 1990 fueron de 3.2 millones de dólares. Suponiendo que el crecimiento continúa a la misma tasa, obtenga las utilidades para 1995. Calcule cuál es el aumento total de las utilidades, de 1990 a 1995, en por ciento.
12. Las ventas de un almacén de abarrotes se han estado incrementando a un ritmo del 1.5% mensual, en promedio. Si el mes pasado se tuvieron ventas por $ 500,000, ¿cuál es el volumen de ventas estimadas para dentro de 6 meses?
13. Juan Lara tiene 2 opciones para invertir, durante un año, $ 7,500: al 51% capitalizable cada cuatrimestre, o hacerlo al 62% de interés simple. ¿Cuál alternativa le conviene?
14. Noemí presta $ 550 por 4 meses al 5.4% mensual de interés simple. Al final de este tiempo invierte el monto simple obtenido por 2 años al 57% de interés compuesto cada bimestre. ¿Cuánto dinero tendrá Noemí una vez transcurridos los 28 meses?

15. Si usted comienza en un trabajo con un sueldo de $ 3,180 al mes y se le va a conceder un aumento del 9% cada cuatrimestre, ¿cuánto estará ganando dentro de 3 años?

16. Si el precio del litro de leche va a estar aumentando en un 2.5°/% cada mes durante un año, ¿cuál es el aumento total expresado como un por ciento?

17. Se realiza un depósito de $ 2,200 en un banco que paga el 31% con capitalización cada trimestre. El dinero permanece en la cuenta durante un año y, en ese momento, la tasa cambia al 28.5% con capitalización cuatrimestral. ¿Cuál será el saldo en la cuenta 3 años después del depósito inicial?

18. ¿Cuál es el saldo final si se dejan 3,000 dólares en depósito al 8.3% convertible cada semestre durante 7 años y después la tasa cambia al 9.5% convertible cada mes por los siguientes 4 años?

19. Se depositan $ 1,500 en una cuenta que paga el 39% capitalizable cada quincena. La tasa se mantiene durante 2 años. En ese momento, la tasa cambia al 35% con capitalización quincenal. ¿Cuál es el saldo en la cuenta después de 2 años más?

20. Una inversión de 20,000 dólares se efectúa a 10 años. Durante los primeros 6 años la tasa de interés compuesto cada semestre es del 11% anual. Posteriormente, la tasa desciende al 9.6% anual, también con capitalización semestral durante un año y medio. El resto del tiempo la tasa aumenta al 10% capitalizable cada mes. ¿Cuál es el monto final de la inversión?

21. Obtenga el interés que devenga un capital de $ 22,000, invertidos el 30 de septiembre, con vencimiento el 30 de diciembre del mismo año. Los intereses se capitalizan y se pagan los días 30 de cada mes. La tasa de interés aplicable a la inversión es el 90% del CPP vigente, que se supone para octubre de 21.85%; para noviembre, 20.61% y para diciembre, 19.36%.

Primer depósito:	30 de marzo de 1990 por $ 2,800
Segundo depósito:	30 de noviembre de 1991 por $ 1,500
Tercer depósito:	30 de mayo de 1992 por $ 3,200

22. Si un banco paga el 2.33% mensual capitalizable cada mes, determine el saldo el 30 de agosto de 1944 en una cuenta con los siguientes depósitos:

23. En cierto banco, los intereses devengados de las cuentas de ahorros se capitalizan el 30 de mayo y el 30 de noviembre de cada año, siendo la tasa de interés del 28% anual.

    El señor julio Mercado abrió una cuenta de ahorros el 30 de mayo de 1991, con un depósito de $ 750. El 30 de noviembre de 1991 depositó $ 1,470 y el 30 de mayo de 1992 retiró $ 600. ¿Cuál será el saldo el 30 de mayo de 1993?

24. En cierto banco norteamericano la tasa de interés para cuentas de ahorros es del 8% con periodos de capitalización trimestral. La capitalización se lleva a cabo el 31 de marzo, el 30 de junio, el 30 de septiembre y el 31 de diciembre de cada año.

Una persona tiene una cuenta de ahorros con un saldo al 30 de septiembre de 1986, de 75 dólares. El 31 de diciembre de 1988 depositó 250 dólares; el 31 de marzo de 1989 depositó 310 dólares y el 30 de junio de 1991 retiró 200 dólares. ¿Cuál será el saldo el 30 de junio de 1995?

25. Se invierten $ 10,000 al 60.31% capitalizable quincenalmente. A los 6 meses la tasa de interés cambia al 58.07°/ capitalizable cada mes y se retiran de la cuenta $ 5,000. Pasados 10 meses la tasa se vuelve a incrementar, al 61.5% capitalizable cada mes y se depositan $ 8,000. Obtenga el monto al cabo de 4 años contados a partir del depósito de los $ 10,000.

MONTO COMPUESTO CON PERIODOS DE CAPITALIZACION FRACCIONARIOS

La ecuación (7.2) se obtuvo suponiendo un número entero de periodos de capitalización. Sin embargo, la ecuación puede utilizarse si se presentan fracciones de periodo.

EJEMPLO 7.7

Obtener el monto compuesto de $ 1,536 al 36.5% capitalizable semestralmente al cabo de 2 años y 3 meses.

SOLUCION

Debido a que 2 años y 3 meses son 27 meses, y un semestre son 6 meses, se puede formar la siguiente proporción:

6 meses = 1 semestre

27 meses = n semestres

Por tanto:

$$\frac{6}{27} = \frac{1}{n}$$

Despejando n, se tiene:

$$n = \frac{27}{6} = 4.5 \text{ semestres}$$

Sustituyendo los valones numéricos en la ecuación (7.2):

$$F = \$\ 1{,}536\ (1 + \frac{0.365}{2})^{4.5}$$

$$\log F = \log 1{,}536 + 4.5 \log 1.1825$$

$$\log F = 3.1863912157 + (4.5)\ (0.0728011494098)$$

$$\log F = 3.51399638804$$

$$F = 3{,}265.85$$

En la práctica rara vez se aplica el procedimiento anterior, conocido como cálculo teórico. En su lugar se utiliza la costumbre comercial, la cual consiste en calcular el monto compuesto para los periodos enteros de capitalización y utilizar el interés simple para la fracción de periodo.

EJEMPLO 7.8

Resuélvase el problema anterior según la costumbre comercial.

SOLUCION

Se obtiene el monto compuesto para los 4 periodos semestrales (2 años), que son los periodos completos.

$$F = 1{,}536\,(1 + \frac{0.365}{2})^4$$

$$F = 1{,}536\,(1.1825)^4$$

$$F = 3{,}003.28$$

En seguida se obtiene el monto simple para la fracción de periodo, utilizando el monto compuesto obtenido como capital inicial. La fracción de periodo es 0.5 semestres = 3 meses.

$$M = 3{,}003.28\left[1 + (\frac{0.365}{2})\,(0.5)\right]$$

$$M = 3{,}277.33$$

Otra forma de obtener el monto final sería utilizar el tiempo en meses.

$$M = 3{,}003.28\left[1 + (\frac{0.365}{12})\,(3)\right]$$

$$M = 3{,}277.33$$

Como se puede observar, la costumbre comercial o regla comercial proporciona un monto mayor que el cálculo teórico. Sin embargo, el cálculo teórico es más justificable desde el punto de vista lógico, matemático y justo. Debido a estas razones, a menos que se indique lo contrario, la regla comercial no será utilizada en este libro, excepto que se indique lo contrario.

EJEMPLO 7.9

Juan Anaya deposita su dinero en el banco a plazo de 2 años y a una tasa de interés compuesto cada trimestre del 34%. Debido a una emergencia, debe retirar su dinero al cabo de 10 meses. ¿Cuál será el monto acumulado que se le entregue si depositó $ 23,000?

TEMA ESPECIAL

JUSTIFICACIÓN DEL INTERÉS

Existen 4 razones principales por las cuales una persona no aceptará prestar dinero si no espera recibir un interés:

1o. Al prestar dinero, la persona debe diferir un consumo que podría realizar de inmediato. Esta persona al diferir la compra espera recibir una ganancia.

2o. Si la persona que presta tiene la posibilidad de invertir su dinero a cierta tasa de interés j, el prestamista querrá que se le dé, por todo préstamo que realice, por lo menos una tasa de interés igual a j. Se dice que j es su costo de oportunidad.

3o. Al prestar, se tiene cierto riesgo de que la cantidad prestada no sea pagada; tal riesgo se acepta cuando existe la posibilidad de obtener una ganancia.

4o. Al prestar con interés, la persona que presta protege su poder de compra si hay inflación. Para esto, es necesario que la tasa de interés sea mayor, o cuando menos igual, a la tasa de inflación.

SOLUCION

Un trimestre son 3 meses; por tanto, 10 meses serán 30 trimestres.

$$F = 23{,}000\,(1 + \frac{0.34}{4})^{10/3}$$

F = 23,000 $\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ 1 $\boxed{+}$ 0.34 $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{)}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{(}$ 10 $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

$$F = 30{,}187.49$$

EJEMPLO 7.10

Resuelva el ejemplo anterior utilizando la regla comercial.

SOLUCION

Los periodos completos son 3 trimestres (9 meses). El monto compuesto de 3 trimestres es:

$$F = 23{,}000\,(1 + \frac{0.34}{4})^{3}$$

$$F = 29{,}377.65$$

El periodo incompleto es de 1/3 de trimestre; es decir, 1 mes. Por tanto, el monto simple será:

$$M = 29{,}377.65 \left[1 + (\frac{0.34}{12})\,(1)\right]$$

$$M = 30{,}210.02$$

TASAS DE INTERES NOMINAL Y EFECTIVA

Si un determinado capital invertido a interés compuesto se capitaliza cada año, entonces el monto compuesto al final del primer año es el mismo que el monto obtenido por interés simple a un año de plazo. Pero si la capitalización se efectúa más de una vez al año, entonces el monto al final de un año es mayor que el obtenido por interés simple. Esto se debe a que el interés obtenido durante un periodo generará intereses durante los siguientes periodos. La tasa de interés anual aplicable a una inversión o a un préstamo a interés compuesto se llama tasa de interés nominal o simplemente tasa nominal. La tasa nominal es la tasa de interés convenida en la operación financiera. Por ejemplo, la tasa del 34% dada en el ejemplo 7.9 es una tasa nominal.

La tasa efectiva por periodo es la tasa de interés que efectivamente se aplica en cada periodo de capitalización. Esta tasa de interés se obtiene al dividir la tasa nominal anual entre el número de periodos de capitalización que hay en un año, es decir:

jep = j/m

En donde jep es la tasa efectiva por periodo, j es la tasa de interés nominal anual y m es el número de periodos de capitalización en un año. Así, por ejemplo, la tasa efectiva por periodo en el ejemplo 7.9 es:

jep = 34/4 = 8.5% trimestral

Obsérvese como, al utilizar la ecuación (7.2) se está empleando la tasa efectiva por periodo.

EJEMPLO 7.11

Utilizando las siguientes tasas nominales, obtenga la tasa efectiva por periodo.

a) 26% capitalizable cada semestre.
b) 30% capitalizable cada 91 días.

SOLUCION

a) j = 26% anual

m = 2 periodos de capitalización en el año

jep = 26/2 = 13% semestral

b)

j = 30% anual

m = 365/91[*]= 4.010989011 periodos de capitalización en el año

jep = 30/4.010989011

jep = 7.47945% en 91 días

[*] *Si se utiliza el año comercial, entonces m = 360/91 = 3.956043956 y la tasa efectiva por periodo es igual a 7.58333%.*

La tasa de interés efectiva o simplemente tasa efectiva, se define como la tasa de interés simple que produciría el mismo interés en un año que la tasa nominal capitalizada m veces al año. En otras palabras, la tasa efectiva es la tasa de interés simple que es equivalente a la tasa nominal en el periodo de un año. La tasa efectiva es la tasa de rendimiento que se obtiene al cabo de un año debido a la capitalización de los intereses. La tasa efectiva refleja el efecto de la reinversión.

Cuando un inversionista tiene varias alternativas de inversión, a diferentes tasas nominales que tienen diferentes periodos de capitalización, la tasa efectiva se utiliza para realizar la comparación y decidir cuál de las tasas nominales es más redituable.

A continuación se ejemplifica la forma de obtener una tasa efectiva.

EJEMPLO 7.12

¿Cuál es la tasa de interés efectiva del dinero invertido al 48% de interés anual capitalizable en forma trimestral?

SOLUCION

De acuerdo a la definición, se desea encontrar la tasa de interés simple que producirá el mismo interés en un año que la tasa nominal del 48% capitalizable cada trimestre.

En primer lugar se calcula el interés compuesto en un año para un capital arbitrario, digamos, $ 1,000:

F =1,000 (1 + 0.48/4)4 = 1,573.51936

Por tanto, el interés ganado es:

I = 1,573.51936 - 1,000 = 573.51936

En seguida se obtiene la tasa de interés simple equivalente que produce la misma cantidad de intereses en un año:

$$i = \frac{I}{C\,t} = \frac{573.51936}{(1{,}000)\,(1)}$$

$$i = 0.57351936$$

Por tanto:

Tasa de interés efectiva =j_e = 57.351936% anual

En seguida se procederá a deducir una fórmula para obtener la tasa de interés efectiva, sabiendo que la tasa de interés nominal es del j% anual capitalizable m veces en un año.

Si se invierten $P a una tasa nominal de j% anual y el interés se capitaliza m veces en un año, el monto compuesto al final de un año será:

$$F = P(1 + \frac{i}{m})^m \qquad (1)$$

En donde i es la tasa nominal en forma decimal.

Por otro lado, si ie es la tasa de interés simple, en forma decimal, que produce en un año un monto simple $F, entonces:

$$F = P[1 + (i_e)(1)] \qquad (2)$$

Como ie es la tasa equivalente a i, entonces ie es la tasa de interés efectiva, en forma decimal.

Por definición de tasa efectiva se tiene que (1) = (2):

$$P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = P(1 + i_e)$$

Por tanto:

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = (1 + i_e)$$

Entonces:

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 \qquad (7.3)$$

EJEMPLO 7.13

Resuelva el ejemplo 7.12 utilizando la ecuación (7.3).

SOLUCION

i = 0.48

m = 4 periodos de capitalización en el año

Al sustituir los valores numéricos en la ecuación (7.3) se obtiene: 0.48 4

$$i_e = \left(1 + \frac{0.48}{4}\right)^4 - 1$$

$$i_e = (1.12)^4 - 1$$

$$i_e = 1.57351936 - 1$$

$$i_e = 0.57351936$$

Por tanto:

$$i_e = 57.351936\% \text{ anual}$$

EJEMPLO 7.14

Calcule la tasa efectiva de la tasa nominal del 15% semestral capitalizable cada mes.

SOLUCION

$i = 0.15$ por semestre $= 0.30$ por año
$m = 12$ periodos de capitalización en el año

Por tanto:

$$i_e = (1 + \frac{0.30}{12})^{12} - 1$$
$$i_e = 0.3448888$$
$$j_e = 34.48888\% \text{ anual}$$

EJEMPLO 7.15

Obtenga la tasa efectiva de la tasa nominal del 32% anual capitalizable cada 28 días.

SOLUCION

$i = 0.32$
$m = 365/28 = 13.0357142857$ periodos de capitalización en el año

$$i_e = (1 + \frac{0.32}{13.0357142857})^{13.0357142857} - 1$$
$$i_e = 0.3718160$$

$$i_e = 37.1816\% \text{ anual}$$

EJEMPLO 7.16

¿En cuál banco invertiría usted su dinero: en el banco ABC que ofrece un 26% con capitalización diaria; o en el banco XYZ que ofrece un 27% capitalizable cada mes?

SOLUCION

Se deben comparar las tasas de interés efectivas. El banco que proporcione la tasa efectiva más alta es el que conviene para invertir. La tasa efectiva en el banco ABC es:

$$i_e = (1 + \frac{0.26}{365})^{365} - 1 = 0.29681$$
$$J_e = 29.681\%$$

La tasa efectiva en el banco XYZ es:

$$i_e = (1 + \frac{0.27}{12})^{12} - 1 = 0.30605$$
$$j_e = 30.605\%$$

Se escogería el banco XYZ.

EJEMPLO 7.17

Determine la tasa nominal que produce un rendimiento del 41.50% anual efectivo, si el interés se capitaliza cada mes.

SOLUCION

Es necesario despejar i de la ecuación (7.3):

$$i_e = (1 + \frac{i}{m})^m - 1$$

$$(i_e + 1)^{1/m} = 1 + i/m$$

Por tanto:

$$i = [(i_e + 1)^{1/m} - 1]\, m \qquad (7.4)$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación anterior, se tiene:

$$i = [(0.415 + 1)^{1/12} - 1]12$$

$$i = 0.352199$$

$$j = 35.2199\% \text{ anual capitalizable cada mes}$$

1. Encuentre el monto compuesto de $ 6,360 en 3 años 5 meses, al 55%, con capitalización anual,
2. Resuelva el ejercicio anterior utilizando interés simple en el periodo de conversión fraccionario (regla comercial).
3. Obtenga el monto compuesto, utilizando la regla comercial, de 22,000 dólares por 7 años 8 meses, al 11.77% capitalizable cada semestre.
4. Calcule el monto compuesto de $ 2,310 al 40.2% convertible cada mes al final de 10 meses 18 días. Suponga que los meses son de 30 días.
5. Resuelva el ejercicio anterior utilizando la regla comercial.
6. Encuentre el monto compuesto de $ 3,860 al 52% capitalizable cada trimestre al final de 20 meses.
7. E130 de junio de 1986 el Sr. Arana solicitó un crédito por $10,000 al 85% con capitalización semestral. ¿Cuánto tuvo que pagar el 28 de septiembre de 1991? Resuelva mediante el procedimiento teórico y la regla comercial.
8. *Una persona invierte 5,000 dólares el 20 de enero en un banco norteamericano que ofrece el 10.25% de interés compuesto los días 30 de cada mes. Calcule el monto que podrá retirar el 23 de diciembre del mismo año. Utilice la regla comercial.
9. Resuelva el ejercicio anterior utilizando el procedimiento teórico.
10. Mario Enríquez abrió una cuenta de ahorros el 23 de noviembre de 1987, con un depósito inicial de $ 500, en un banco que capitaliza los intereses el 31 de mayo y el 30 de noviembre de cada año. Obtenga el saldo de la cuenta para el 15 de abril de 1989. La tasa de interés es del 20%. Utilice la regla comercial y considere año comercial.

11. En nuestro país, antes de la estatización de los bancos, se pagaba el 4.5% anual de interés compuesto semestralmente en las cuentas de ahorro. El primero de septiembre de 1982, al ser estatizada la banca, se modificó la tasa de interés, elevándose al 20% anual con capitalización semestral.

    Rodolfo Fierro abrió, el 31 de mayo de 1980, una cuenta de ahorros con $ 10,000(viejos pesos) en un banco que capitaliza los intereses devengados el 31 de mayo y el 30 de noviembre de cada año. Obtenga el monto de la cuenta al 30 de noviembre de 1988, sabiendo que no se realizaron depósitos ni retiros posteriores a la apertura de la cuenta. Utilice la regla comercial y considere año comercial.

12. ¿Cuál será el monto compuesto en una cuenta de ahorros que paga el 23.7% de interés capitalizable cada mes si se llevaron a cabo los siguientes movimientos y se desea conocer el saldo al 25 de noviembre?

Fecha	Depósitos	Retiros
10 de enero	$ 20,000	
10 de abril		$ 8,000
10 de junio	$ 5,000	
10 de julio	$ 15,000	
10 de noviembre		$ 13,000

13. Determine la tasa de interés efectiva que se recibe de un depósito bancario si la tasa nominal es del 45% que se capitaliza cada mes.
14. Encuentre la tasa de interés efectiva equivalente a una tasa nominal del 80% capitalizable cada semestre.
15. Determine la tasa efectiva si la tasa nominal es del 12% capitalizable trimestralmente.
16. $ 13,915 prestados al 30% convertible cada mes por un año y medio. Determine el valor futuro al final del periodo y la tasa de interés efectiva.
17. Utilizando las siguientes tasas de interés nominales, obtenga la tasa efectiva por periodo.
    a) 24% capitalizable cada quincena.
    b) 2.5% mensual compuesto cada semestre. c) 38% capitalizable cada 28 días.
18. Obtenga la tasa efectiva para cada una de las siguientes tasas nominales:
    a) 8% trimestral capitalizable cada bimestre.
    b) 30% anual capitalizable cada 180 días.
    c) 12.5% semestral capitalizable cada 91 días.
19. El señor Mendoza desea un préstamo por 2 años. Le ofrecen dinero al: a) 60% capitalizable cada trimestre b) 64.25% capitalizable cada semestre.
20. ¿Qué banco es preferible para invertir una cierta cantidad de dinero: el Banco del Sur que ofrece un 8.1% compuesto cada trimestre o el Banco del Norte que ofrece un 0.65% mensual compuesto cada mes?
21. ¿Cuál es la tasa nominal que produce un rendimiento del 34.75% anual efectivo, si el interés se capitaliza cada bimestre?

22. Un prestamista desea ganar el 38% efectivo anual sobre un préstamo con intereses capitalizables cada trimestre. Encuentre la tasa nominal que debe cobrar.
23. Una institución bancaria anuncia que otorga una tasa efectiva del 30%. Encuentre la tasa de interés nominal sabiendo que la capitalización es diaria.
24. ¿Cuál es la tasa nominal que produce un rendimiento del 28.4% anual efectivo, si el interés se capitaliza cada 28 días?
25. Calcule el monto de 12,000 dólares en 15 años si se invierten a una tasa efectiva del 12% anual si los intereses se capitalizan cada semestre.

VALOR ACTUAL A INTERÉS COMPUESTO

El valor actual de una inversión a interés compuesto tiene el mismo significado que el valor actual a interés simple. Esto es, el valor actual o valor presente es el capital que invertido ahora, a una tasa de interés dada, alcanzará un cierto monto después de un número determinado de periodos de capitalización.

Este concepto es uno de los más útiles dentro de la matemática financiera, ya que permite obtener el valor que tienen en el momento actual un conjunto de cantidades que han de vencer en el futuro.

De acuerdo a la definición, para calcular el valor actual de un monto compuesto dado basta despejar P de la ecuación (7.2).

EJEMPLO 7.18

¿Cuál es el valor actual de \$ 10,000 a pagar dentro de 2 años, si la tasa de interés es del 55.2% y los intereses se capitalizan cada bimestre?

SOLUCION

$$F = 10{,}000$$

$$j = 55.2\% \text{ anual} = \frac{55.2}{6} = 9.2\% \text{ bimestral}$$

$$n = (2 \text{ años})\,(6 \text{ bimestres/año}) = 12 \text{ bimestres}$$

Al despejar P de la ecuación (7.2) y sustituir los valores numéricos, se obtiene:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{10{,}000}{(1+0.092)^{12}}$$

$$\log P = \log 10{,}000 - 12 \log 1.092$$

$$\log P = 4 - (12)\,(0.03822263837) = 3.54132834$$

$$P = \text{antilog } 3.54132834$$

$$P = 3{,}477.99$$

El resultado anterior significa que al invertir $ 3,477.99 en este momento, al 55.2% capitalizable cada dos meses, al cabo de 2 años se habrá acumulado $10,000. $ 3,477.99 son el valor presente de $ 10,000 al cabo de 2 años. En otras palabras, $ 3,477.99 y $ 10,000 son cantidades equivalentes a la tasa del 55.2% con capitalización cada bimestre durante 12 periodos de capitalización.

En este ejemplo nos encontramos, de nuevo, con el concepto del valor del dinero en el tiempo. No es lo mismo tener un peso hoy que tener un peso en algún momento futuro, pues su valor adquisitivo no es equivalente. El peso que se tiene en este momento puede ser invertido a interés compuesto y convertirse en un monto; en cambio, el peso que se tenga en algún momento futuro es equivalente a un valor actual menor de un peso.

El resultado del ejemplo anterior también se puede interpretar diciendo que $ 10,000 son el valor futuro de $ 3,477.99, si la tasa de interés es del 55.2% compuesto en 12 periodos bimestrales.

EJEMPLO 7.19

Luis Hernández recibió una herencia de $ 500,000. Quiere invertir una parte de ella y utilizarla para cuando se jubile. Desea tener 50 millones de pesos dentro de 15 años. ¿Qué parte de la herencia deberá invertir ahora si el dinero producirá 34% capitalizable en forma mensual?

SOLUCION

$$F = 50'000,000$$

$$j = 34/12 \text{ \% mensual}$$

$$n = (15 \text{ años})\ (12 \text{ meses/año}) = 180 \text{ meses}$$

$$P = \frac{50'000,000}{(1 + 0.34/12)^{180}}$$

$$P = 327,239.40$$

EJEMPLO 7.20

En la compra de un automóvil, Luis Soto da un enganche de $ 20,000 y acuerda pagar $ 49,419.36 cuatro meses después (cantidad que tiene incluidos los intereses por el financiamiento). Si la tasa de interés es del 41.35% capitalizable cada mes, encuentre el valor de contado del automóvil.

SOLUCION

A los $ 49,419.36 debemos rebajarle los intereses del financiamiento, y la cantidad resultante se le suma el anticipo dado. Es decir, el valor de contado del automóvil es el anticipo más el valor actual de $ 49,419.36.

$$\text{valor de contado del automóvil} = 20{,}000 + \frac{49{,}419.36}{(1 + \frac{0.4135}{12})^4}$$

$$= 20{,}000 + 43{,}156.39$$

$$= 63{,}156.39$$

EJEMPLO 7.21

Alejandro está vendiendo su casa y recibe las siguientes ofertas:

a) Daniel le ofrece $ 210,000 de contado por ella.

b) Armando le ofrece un anticipo de $ 100,000 y el saldo en dos pagarés de $ 85,423.20 cada uno a 6 y 10 meses de plazo.

Si Alejandro puede invertir el dinero al 3.4% mensual con capitalización mensual, ¿cuál alternativa de pago le es más favorable?

SOLUCION

Para poder comparar es necesario trasladar todas las cantidades al mismo instante. Aunque la fecha de comparación puede ser cualquiera, es usual tomar el momento actual, ya que es el momento en que se toma la decisión

$$\text{valor actual de los 2 pagarés} = \frac{85{,}423.20}{1.034^6} + \frac{85{,}423.20}{1.034^{10}} = 131{,}042.38$$

el valor actual de la segunda alternativa es: $100'000,000 + $ 131,042.38 = $ 231,042.38.

Por lo tanto, a Alejandro le conviene aceptar la oferta de Armando, ya que tendrá una ganancia de $ 21,042.38 en el momento actual. Sin embargo, es necesario tener en mente que una modificación en la tasa de interés y/ o en el tiempo puede conducir a una decisión distinta.

EJEMPLO 7.22

Obtener 5 meses antes de su vencimiento el valor actual, al 4.2% mensual con capitalización mensual, de un pagaré por $ 11,748 a 11 meses de plazo, con el 3.9% mensual de interés capitalizable mensualmente.

SOLUCION

Para calcular el valor actual de un documento que gana intereses, se obtiene, en primer lugar, el valor de vencimiento de la deuda. Una vez obtenido el monto compuesto, se calcula el valor actual a la fecha pedida.

$$F = 11{,}748\,(1 + 0.039)^{11} = 17{,}895.13$$

$$P = \frac{17{,}895.13}{(1 + 0.042)^5} = 14{,}567.88$$

A la diferencia entre el monto compuesto y su valor actual en un momento determinado se llama descuento compuesto. Así, en el ejemplo anterior se tiene un descuento compuesto a 5 meses antes del vencimiento de $ 17,895.13 - $ 14,567.88 = $ 3,327.25

El descuento compuesto tiene un significado similar al descuento estudiado en el capítulo de interés simple. El concepto de descuento compuesto es utilizado para llevar a cabo el descuento de pagarés.

EJEMPLO 7.23

El 10 de marzo de 1990, el Sr. Aldo prestó al Sr. Cruz $ 20,000 al 50.4% capitalizable cada trimestre, firmándose un pagaré para saldar la deuda al cabo de 2 años. El 18 de octubre de 1991, el Sr. Aldo descontó el documento en un banco a una tasa de descuento compuesto del 49.18% capitalizable cada mes. ¿Cuánto dinero recibió el Sr. Aldo por parte del banco?

SOLUCION

Se obtiene, en primer lugar, el valor de vencimiento de la deuda.

$$F = 20{,}000\ (1 + \frac{0.504}{4})^8 = 51{,}681.74$$

En seguida se calcula el valor actual de $ 51,681.74 del 18 de octubre de 1991 (fecha de descuento) al 10 de marzo de 1992 (fecha de vencimiento). Entre estas fechas hay 4 meses 21 días* ; es decir 4.7 periodos mensuales de capitalización.

El valor actual del pagaré al 18 de octubre de 1991 es:

$$P = \frac{51{,}681.74}{(1 + \frac{0.4918}{12})^{4.7}} = 42{,}790.90$$

El 18 de octubre de 1991 el Sr. Aldo recibe por parte del banco $ 42,790.90 y el banco se queda con el pagaré para cobrarlo el día del vencimiento.

VALOR ACTUAL A INTERES COMPUESTO CON PERIODOS DE CAPITALIZACION FRACCIONARIOS

Así como existen dos maneras de calcular el monto compuesto cuando se presentan periodos de capitalización fraccionarios, de igual manera existen dos formas de obtener el valor actual de un monto cuando hay fracciones de periodo: el procedimiento teórico y la regla comercial.

El procedimiento teórico indica que el valor actual se obtiene a interés compuesto para todo el tiempo, incluyendo la fracción de periodo.

---

* *Febrero de 1992 fue año bisiesto.*

La regla comercial indica que el valor actual se obtiene a interés compuesto para los periodos enteros, y a interés simple para la fracción de periodo.

Excepto que se diga lo contrario, el procedimiento teórico será el utilizado en todas las futuras aplicaciones.

EJEMPLO 7.24

Encuentre el valor actual de $ 33,700, pagaderos dentro de 2 años 10 meses, si la tasa es del 5% mensual capitalizable cada cuatrimestre. Utilice el procedimiento teórico y la regla comercial.

SOLUCION

PROCEDIMIENTO TEORICO

2 años 10 meses = 34 meses

1 cuatrimestre – 4 meses

n – 34 meses

Por tanto:

$$n = \frac{34}{4} = 8.5 \text{ cuatrimestres}$$

j = 5% mensual = (5%/mes) (4 meses/cuatrimestre) = 20% cuatrimestral

$$P = \frac{33{,}700}{(1+0.20)^{8.5}}$$

$$1n\ P = 1n\ 33{,}700 - 8.5\ 1n\ 1.20$$

$$1n\ P = 10.42525312 - 1.549733233 = 8.875519887$$

$$P = 7{,}154.67$$

Regla Comercial

Se calcula primero el valor actual para los periodos completos de capitalización; esto es, 8 cuatrimestres.

$$P = \frac{33{,}700}{(1+0.20)^{8}}$$

$$P = 7{,}837.54$$

Sobre $ 7,837.54 se calcula el valor actual a interés simple por 0.5 cuatri- mestres (2 meses).

$$C = \frac{M}{1+it} = \frac{7{,}837.54}{1+(0.05)\ (2)}$$

$$C = 7{,}125.04$$

EJEMPLO 7.25

Obtenga el valor actual de $ 2,456.19 que vencen en 7 meses 12 días, si el rendimiento es del 54.6% con capitalización mensual.

SOLUCION

1 mes - 30 días

n -12 días

Por tanto:

n = 0.4 meses

Por consiguiente:

7 meses 12 días = 7.4 meses

$$P = \frac{2{,}456.19}{(1 + 0.546/12)^{7.4}}$$

$$P = 1{,}767.11$$

EJEMPLO 7.26

Resuelva el ejemplo anterior utilizando la regla comercial.

SOLUCION

$$P = \frac{2{,}456.19}{(1 + \frac{0.546}{12})^{7}} = 1{,}798.84$$

$$C = \frac{1{,}798.84}{1 + (\frac{0.546}{365})\,(12)} = 1{,}767.12$$

CALCULO DEL TIEMPO Y LA TASA DE INTERÉS

La ecuación (7.2) es la fórmula básica para obtener el tiempo o la tasa de interés, conocidas las otras variables. A continuación se verán ejemplos de este tipo.

EJEMPLO 7.27

$ 870 produce intereses a una tasa del 52.6% capitalizable cada mes. ¿Cuánto tiempo tardará la inversión en llegar a $ 1,883.13?

SOLUCION

Si aplicamos logaritmos a ambos lados de la ecuación (7.2) se tiene:

$$F = P(1 + i)^n$$

$$\log F = \log P + n \log (1 + i)$$

$$\log F - \log P = n \log (1 + i)$$

Por tanto:

$$n = \frac{\log F - \log P}{\log (1 + i)}$$

En este ejemplo:

F = 1,883.13

P = 870

j = 52.6/12% mensual

Sustituyendo:

$$n = \frac{\log 1{,}883.13 - \log 870}{\log (1 + \frac{0.526}{12})}$$

$$n = \frac{3.27488030214 - 2.93951925262}{0.0186311613163}$$

n =18 periodos mensuales de capitalización

El tiempo necesario es de 18 meses; o bien, un año y medio.

EJEMPLO 7.28

¿En cuánto tiempo se triplicará una inversión si la tasa de interés es del 47% con capitalización trimestral?

SOLUCION

Sea P el capital inicial. El monto compuesto será 3P. Al sustituir estos valores en la ecuación (7.2) se tiene:

$$3P = P\,(1 + 0.47/4)^n$$

$$\frac{3P}{P} = (1 + 0.47/4)^n$$

$$3 = 1.1175^n$$

Aplicando logaritmos a ambos lados:

$$1n\ 3 = n\ 1n\ 1.1175$$

$$n = \frac{1n\ 3}{1n\ 1.1175} = 9.89 \text{ trimestres}$$

El número de trimestres que se requiere para triplicar cualquier capital es aproximadamente 9.89 trimestres, que es un poco más de 29 meses. En realidad, el capital no se triplica sino hasta que transcurren 30 meses, debido .. que el interés se capitaliza trimestralmente. En este caso el monto obtenido es ligeramente superior al deseado.

EJEMPLO 7.29

¿A qué tasa de interés nominal se deben depositar $ 1,500 para disponer de $ 2,180 en un plazo de 13 meses? Considerar que los intereses se capitalizan mensualmente.

SOLUCION

Aplicando logaritmos a ambos lados de la ecuación (7.2) se tiene:

$$F = P(1 + i)^n$$

$$\log F = \log P + n \log (1 + i)$$

$$\log F - \log P = n \log (1 + i)$$

$$\log (1 + i) = \frac{\log F - \log P}{n}$$

Al sustituir los valores numéricos en la expresión anterior obtenemos:

$$\log (1 + i) = \frac{\log 2{,}180 - \log 1{,}500}{13}$$

$$\log (1 + i) = \frac{3.3384564936 - 3.17609125906}{13}$$

$$\log (1 + i) = 0.0124896334262$$

$$(1 + i) = \text{antilog } 0.0124896334262$$

$$(1 + i) = 1.02917596056$$

$$i = 0.02917596056$$

Por tanto:

$$j = 2.917596\% \text{ mensual}$$

La tasa de interés por periodo de capitalización es 2.917596%. La tasa de interés nominal anual será 35.01115%.

EJEMPLO 7.30

¿A qué tasa de interés un capital duplica su valor en un año? La capitalización es cada mes.

SOLUCION

En seguida se muestra otra forma de despejar la i de la ecuación (7.2).

$$F = P(1 + i)^n$$

$$F/P = (1 + i)^n$$

Sacando raíz n-ésima a ambos lados de la igualdad:

$$\sqrt[n]{F/P} = (1 + i)$$

Por tanto:

$$i = \sqrt[n]{F/P} - 1$$

En este caso:

$P = X$

$F = 2X$

$n = 12$ periodos de capitalización

Por tanto:

$$i = \sqrt[12]{\frac{2X}{X}} - 1 = \sqrt[12]{2} - 1$$

Utilizando directamente las funciones de la calculadora científica:

$i = 2$ $\boxed{\sqrt[y]{x}}$ 12 $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ 0.059463094

Por tanto:

j = 5.94631% mensual = 71.35571% anual

EJEMPLO 7.31

Un inversionista compró un diamante en 1985 por 745,000 dólares. Lo vendió en 1992 en 2'120,000 dólares. ¿A qué tasa nominal anual aumentó el valor del diamante?

SOLUCION

Al no dar el periodo de capitalización, éste se supone que es anual.

$$i = \sqrt[7]{\frac{2'120,000}{745,000}} - 1$$

$$i = 1.16113522 - 1$$

$$i = 0.16113522$$

Entonces:

$$j = 16.1135\% \text{ anual}$$

Uso de la Calculadora HP

Para utilizar la calculadora HP en la resolución de problemas de interés compuesto haga lo siguiente:

1. Sitúese en el menú MAIN (principal).
2. Presione la tecla que se encuentra debajo del rótulo FIN (Finanzas)
3. Presione la tecla que se encuentra debajo del rótulo VDT (Valor del Dinero en el Tiempo).

El menú VDT se utiliza para llevar a cabo cálculos de interés compuesto y de anualidades. El menú se divide en dos partes: menú primario y menú secundario. El menú primario contiene 6 rótulos, que son:

N: Almacena o calcula el número total de periodos de capitalización (o de pagos, en una anualidad). N puede expresarse en cualquier unidad de tiempo.

%IA: Almacena o calcula la tasa de interés anual como porcentaje.

V.A.: Almacena o calcula el capital o valor presente.

PAGO: Almacena o calcula la cantidad de cada pago periódico o anualidad.

V.F.: Almacena o calcula el monto o valor futuro. OTRO: Pasa al menú secundario.

El menú secundario muestra los siguientes rótulos:

P/AÑO: Almacena la frecuencia de conversión, es decir el número de períodos de capitalización por año.

INIC: Fija el modo inicial, el cual se utiliza cuando la anualidad es anticipada.

FINAL: Fija el modo final, el cual se utiliza cuando la anualidad es vencida.

AMRT: Presenta el menú para amortización de deuda a interés compuesto.

Para volver al menú primario se oprime la tecla EXIT.

Al utilizar el menú VDT es necesario que las cantidades monetarias sean ingresadas a la calculadora con el signo adecuado, + (más) o - (menos), de acuerdo con la siguiente convención de signos: dinero recibido se ingresa o se presenta como un valor positivo. El dinero pagado se ingresa o se presenta como un valor negativo.

Si las cantidades no se ingresan de manera adecuada atendiendo a su signo, la calculadora mostrará el mensaje: "no hay solución".

EJEMPLO

Una persona invierte $ 12,000.00. ¿De cuánto será el monto al cabo de 2 años y 3 meses si la inversión le reditúa un 25% capitalizable cada mes?

SOLUCION

Se siguen los siguientes pasos:

1. Se borran todas las variables del menú VDT, oprimiendo la tecla CLEAR DATA.
2. Se ingresa la frecuencia de conversión. En este problema la frecuencia de conversión es 12 debido a que la capitalización de los intereses es mensual. Para ingresar la frecuencia de conversión se teclea un 12 y se oprime P/AÑO.
3. Se presiona EXIT para volver al menú primario.
4. Se ingresan los datos dados en el enunciado:

   12000 [+/–] [V.A.]

   27 [N]

   25 [%IA]

5. Se presiona la tecla [V.F.] para obtener el resultado: 20,939.29.

EJEMPLO

¿Qué tasa de interés anual debe obtenerse para acumular $ 15,000.00 en un año y medio sobre una inversión de $ 9,000.00, si la capitalización de intereses es cada quincena?

SOLUCION

1. Se borran las variables del menú VDT.
2. Como la capitalización de intereses es quincenal, entonces la frecuencia de conversión es 24.

   Por tanto se teclea:

   24 [P/AÑO]

3. Se ingresan los datos:

   15000 [V.F.]

   9000 [+/–] [V.A.]

   36 [N]

4. Se oprime la tecla %IA para obtener el resultado: 342978% anual.

El menú CONVI (Conversión de tasas de interés) permite la conversión de tasa nominal a tasa efectiva y viceversa. Para entrar a este menú siga los siguientes pasos:

Comenzando desde el menú MAIN presione FIN y después CONVI. Posteriormente se selecciona EFECT. El rótulo CONT permite la conversión de tasa nominal a tasa de interés continua y viceversa.

Al presionar la tecla **EFECT** se muestra el siguiente menú

%NOM: Almacena o calcula la tasa de interés anual nominal.

%EFE: Almacena o calcula la tasa de interés anual efectiva.

P: Almacena o calcula la frecuencia de capitalización.

EJEMPLO

Calcule la tasa efectiva de un instrumento de inversión que ofrece una tasa nominal del 32% anual con intereses capitalizables cada bimestre.

SOLUCION

Siga la siguiente secuencia de tecleo:

CLEAR DATA

32 %NOM

6 P

%EFE → *36.5825%* anual

EJEMPLO

En una determinada inversión se ganó un 34.56% de interés anual efectivo. ¿Cuál fue el valor de la tasa nominal, si los intereses se capitalizaron en forma mensual?

SOLUCION

SOLUCION

CLEAR DATA

34.56 %EFE

12 P

%NOM → *30.0542%* anual

Ejercicios 7.3

1. ¿Cuál es el valor actual de $ 9,304.80 a pagar dentro de 5 meses, si la tasa de interés es del 4% mensual capitalizable cada quincena?
2. Encuentre el valor presente de 1500 dólares pagaderos en 18 meses si el interés es del 10% compuesto semestralmente.
3. ¿Qué cantidad debe invertirse en este momento al 33% capitalizable cada mes para convertirse en un millón de pesos en 15 años? ¿Cuánto interés habrá ganado? en este momento, ya que acaba de cobrar $ 11,000 del fondo de ahorro de la empresa donde trabaja. Si el valor del dinero es del 27.5% capitalizable en forma mensual, ¿tendrá lo suficiente para saldar sus deudas?
4. Andrés tiene que pagar $4,435.88 dentro de 8 meses. Si el valor del dinero es 50% capitalizable en forma mensual, ¿cuál sería la cantidad a pagar en este momento?
5. Un padre de familia desea tener $20,000 disponibles para cuando su hijo infgrese ala universidad dentro de 3 años y costear, con este dinero, los dos primeros años de su educación universitaria. ¿Qué cantidad debe depositar hoy en el banco, de tal manera que dentro de 3 años tenga los veinte mil pesos? La tasa que le paga el banco es del 3% mensual con capitalización mensual.
6. El Sr. Lara le debe al Sr. Zambrano dos suma de dinero: $10,000 apagar en 2 años y $60,000 a pagar en 3 años. Si el Sr. Lara desea pagar el total de la deuda en este momento mediante un solo pago, ¿cuánto debe pagar si la tasa de interés del mercado es de 21.8% compuesto cada trimestre?
7. Jaime desea establecer un fondo de ahorro con el fin de comprar de contado su proximo automóvil y evitar, de esta manera, el crédito. Calcula comprar el automóvil dentro de 4 años y pagar alrededor de $120,000 por él. ¿Cuánto tiene que invertir ahora, sabiendo que puede colocar el dinero en una cuenta de inversión que le da el 32.125% capitalizable cada día?
8. Existe en nuestro país una forma de ahorro muy utilizada por las clases media y popular: **Las tandas**

   La tanda consiste en que un grupo de personas acuerda poner una cantidad determinada de dinero por igual, a lo largo de u plazo determinado, en intervalos de tiempo previamente establecidos (por semana, por quincena o por meses, por ejemplo) y la suma total de las aportaciones en cada intervalo corresponde a uno de los participantes.

   Como la cantidad aportada es siempre la misma, esto equivale a una disminución del *valor real* de la suma a lo largo del tiempo. Esto significa que las proimerax personas en recibir el dinero son las beneficiadas con esta forma de ahorro, mientras que las ultimas se perjudicarán, ya que recibirán, inferior en términos reales, a lo que hubieran obtenido de poner sus aportaciones periódicas en una institución que pague intereses.

   Andrés participa en una tanda y le toca la quincena número 15 para cobrar. Si al cobrar recibe $4,000, ¿cuál es el valor actual de su tanda, si la tasa de interés del mercado es de 33% compuesto cada quincena?

9. Carlos Gonzáles tiene deudas: una por $5, 730 pagadera en 14 meses y otra de $9,675 pagadera en 20 meses. Carlos desea pagar sus deudas en este momento, ya que acaba de cobrar $11,000 del fondo de ahorro de la empresa donde trabaja. Si el valor del dinero es del 27.5% capitalizable en forma mensual, ¿tendrá lo suficiente para saldar susdeudas?
10. ¿Cuánto vendía una empresa hace 18 meses si las ventas se han estado incrementando desde entonces en un 9% trimestral y actualmente vende $1'170,000?
11. Obtenga el precio de contado de un equipo de sonido por el que se da un anticipo de $ 470 y se firma un documento con vencimiento a 6 meses por $ 2,734.75, el cual incluye intereses al 54% capitalizable cada mes.
12. Se está formando un fideicomiso para la educación universitaria de una niña, mediante un solo pago, de manera que al final de 17 años haya 100,000 dólares. Si el fondo gana interés a razón del 11% capitalizable semestralmente, cuál debe ser el depósito inicial en el fondo?
13. Un pagaré fechado el 27 de marzo de 1992, estipula el pago de $ 3,615 con intereses del 45% capitalizable cada quincena 10 meses más tarde. Si la deuda desea liquidarse el 27 de septiembre de 1992, encuentre la cantidad a pagar suponiendo un rendimiento del 47.8% compuesto mensualmente.
14. ¿Qué oferta es más conveniente para la venta de una fábrica de cromado de plástico, si el rendimiento del dinero es del 33% con capitalización mensual?
    a) $ 690,000 de contado.
    b) $ 250,000 de enganche, $ 276,900 a un año y $ 440,000 a un año y medio.
15. *En una inversión que acumula intereses al 6.8% cada bimestre se ganaron intereses por $ 1,363.22 en 10 meses.
    a) Obtenga el valor de la inversión.
    b) Calcule el monto formado.
16. *El saldo de una cuenta en el banco era $ 9,315.83 el 10 de agosto de 1991. La cuenta fue abierta el 10 de julio de 1988 y el interés era del 39% capitalizable en forma mensual. El 10 de septiembre de 1990 se realizó un depósito por $ 5,000. ¿Cuál fue el depósito original?
17. Se descuenta en un banco un pagaré cuyo valor de vencimiento es por $ 12,500 que vence dentro de 9 meses. El banco lo descuenta a una tasa del 31.7% capitalizable cada mes. ¿Qué cantidad se recibe por el documento?
18. Un pagaré por 3,500 dólares se firmó el 18 de marzo con vencimiento a 4 meses ganando el 4.2% mensual con capitalización mensual. El 3 de junio se negocia con un banco al 60% capitalizable diariamente. Encuentre la cantidad pagada por el banco. ¿Cuál es el descuento compuesto?

19. El Banco del Norte otorga un préstamo por quinientos mil pesos y se firma un pagaré a plazo de un año con interés del 40% capitalizable cada mes. El mismo día, el Banco del Norte descuenta en el Banco del Sur el documento al 42.6% capitalizable cada mes. ¿Cuál fue la utilidad del Banco del Norte, si la hubo?

20. Una empresa tiene en su poder un pagaré por 10 millones de dólares que vence al cabo de 5 años junto con sus correspondientes intereses calculados al 12% capitalizable cada año. La empresa lo vende a los 2 años de firmado a una compañía financiera que lo descuenta a una tasa del 10.7% capitalizable cada semestre. ¿Cuánto recibe la empresa por el pagaré?

21. Obtenga el valor actual de 25,000 dólares, pagaderos dentro de 15 meses, si la tasa es del 9.8% capitalizable cada semestre.

22. Resuelva el ejercicio anterior utilizando la regla comercial.

23. Halle el valor presente de $ 3,700 que vencen dentro de 4 meses 25 días, si el rendimiento del dinero es del 26% convertible cada quincena.

24. Gabriel compró a Yolanda una casa y firmó un pagaré por $ 475,000 a pagar en un año con una tasa de interés del 35% capitalizable cada mes. Habiendo transcurrido 5 meses de la compra Yolanda descuenta el documento en el banco y éste carga un interés del 39% capitalizable cada bimestre. ¿Qué cantidad recibe Yolanda? Utilice la regla comercial.

25. El 13 de agosto de 1991, el Sr. Báez obtiene un préstamo por 6,000 dólares de la Sra. Morgan, firmando un pagaré a plazo de 10 meses al 2.35% trimestral con capitalización trimestral. El 20 de febrero de 1992, la Sra. Morgan descuenta el pagaré en un banco al 12% convertible cada mes. ¿Cuánto recibe por el pagaré? Utilice la regla comercial.

26. ¿Qué tiempo se requiere para que $ 6,000 se conviertan en $ 11,662.59 a una tasa semestral del 24.8% convertible cada semestre?

27. $ 2,500 produce intereses a una tasa del 39% capitalizable cada mes. ¿En cuánto tiempo la inversión ascenderá a $ 3,912.02?

28. Una persona deposita 3,270 dólares en una cuenta de ahorros que paga el 9.3% con capitalización quincenal. ¿En qué tiempo tendrá un monto de 5,000 dólares?

29. Las ventas en un negocio han venido aumentando a un ritmo promedio del 14.5% anual. Si las ventas del año pasado fueron de 1.54 millones de pesos, ¿cuándo llegarán las ventas a los dos millones de pesos, suponiendo que la tasa de crecimiento permanece constante?

30. Un barco paga el 22% capitalizable cada día. ¿Cuánto tiempo será necesario para duplicar el dinero a esta tasa?

31. ¿Cuánto tiempo tomará a una inversión para incrementarse en un 45% si se obtiene una tasa de interés del 2% mensual capitalizable cada cuatrimestre?

32. El 23 de diciembre de 1990, una persona invierte $ 4,500, a una tasa del 26.5% convertible cada mes. ¿En qué fecha el monto será de $ 5,233.75?

33. ¿Cuánto tiempo antes del vencimiento debo pagar una deuda de $ 1,715, si la tasa de interés es del 60% capitalizable mensualmente y yo tengo únicamente $ 950?

34. Una persona desea invertir 4,500 dólares y que su inversión llegue a 7,000 dólares en 10 meses. ¿A qué tasa de interés deberá invertir para lograr el crecimiento deseado, suponiendo capitalización mensual?

35. Si se pretende que $ 3,000 se conviertan en $ 20,000 al cabo de un periodo de 6 años, ¿a qué tasa anual de interés deberá invertirse en caso de que los intereses se capitalicen cada quincena?

36. Si se desea que $ 600 se conviertan en $ 900 en un periodo de un año, ¿a qué tasa anual efectiva han de invertirse en caso de que los intereses se capitalicen cada día?

37. El ingreso de la compañía XYZ aumentó de 825,000 dólares en 1987 a 1'315,000 dólares en 1991. Encuentre la tasa anual de incremento promedio.

38. Una casa que se compró hace 20 años en $ 350* se vende actualmente en $ 460,000. Obtenga la tasa anual de rendimiento promedio.

39. Carlos Romo compró un automóvil en $ 80,000 el primero de noviembre y lo vendió el 10 de abril del siguiente año en $ 90,000. Considerando sólo los valores de compra y venta, ¿qué tasa de rendimiento obtuvo? Considérese la capitalización de intereses en forma mensual.

40. Un prestamista ofrece dinero al "uno a doce por quincena". Esto significa que el prestamista carga $1 de interés por cada $12 tomados en préstamo durante una quincena. Encuentre la tasa de interés suponiendo capitalización anual.

41. Calcule el importe de las ventas que tendrá dentro de 4 años una pequeña empresa que actualmente vende $ 780,000 al año, si se tienen contemplados los siguientes incrementos en las ventas:

Año	Porcentaje de incremento
1	10%
2	12%
3	15%
4	19%

Asimismo, obtenga el porcentaje de incremento promedio en el año.

42. El precio de las gasolinas sufrió un incremento del 7% en diciembre de 1995 y, posteriormente, sufrirá las siguientes alzas: 6% en abril de 1996 y 1.2% cada mes a partir de mayo y hasta diciembre de 1996. Obtenga el porcentaje total de aumento.

* *Se refiere a nuevos pesos. La casa tuvo un costo de $ 350,000 viejos pesos.*

ECUACIONES DE VALOR

Una ecuación de valor a interés compuesto es una igualdad entre dos conjuntos de obligaciones, el original y el propuesto, que se pagan o reciben en distintos momentos. La igualdad se plantea en una fecha determinada arbitrariamente llamada fecha focal o fecha de valuación.

Al estudiar ecuaciones de valor a interés simple se mencionó que los resultados varían al cambiar la fecha focal. En cambio, en las ecuaciones de valor a interés compuesto el resultado no se altera si se cambia la fecha focal; por tanto, puede seleccionarse cualquier fecha para efectuar la igualdad de las obligaciones, siendo el resultado el mismo.

Las ecuaciones de valor a interés compuesto son una de las técnicas más útiles de la matemática financiera para la resolución de diversos problemas financieros. Asimismo, son el fundamento para el estudio de las anualidades, tema que se verá en los siguientes capítulos.

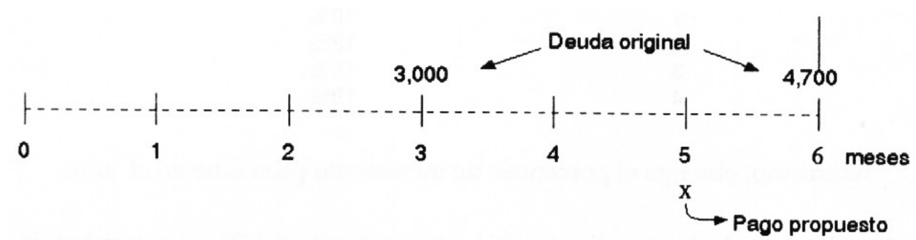
A continuación se presentan diversos problemas cuya solución se obtiene mediante una ecuación de valor.

EJEMPLO 7.32

Arturo debe a Roberto $ 3,000 que debe pagar dentro de 3 meses y $ 4,700 a pagar dentro de 6 meses. Acuerdan que Arturo liquide sus deudas mediante un pago único al final de 5 meses aplicando una tasa del 56.7% capitalizable cada mes. Encuentre el valor del pago único.

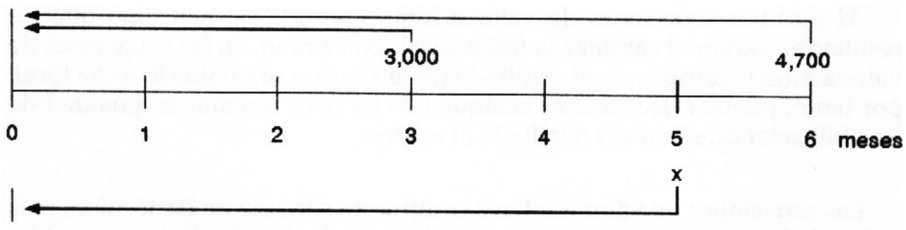
SOLUCION

El diagrama de tiempo es:



Se designa con X el pago propuesto. Observe cómo el conjunto original de obligaciones se coloca en la parte superior de la línea de tiempo y la obligación propuesta se coloca en la parte inferior. Esto es con el fin de tener un orden y una mayor facilidad para identificar las obligaciones originales de las propuestas al momento de establecer la ecuación de valor.

Con el fin de formar la ecuación de valor es necesario establecer la localización de la fecha focal. En las ecuaciones de valor a interés compuesto no importa cuál sea la localización de la fecha focal, el resultado será el mismo. Si se toma el momento actual como fecha focal, entonces todas las cantidades deberán trasladarse a esa fecha. El diagrama de tiempo quedaría como sigue:



El diagrama muestra que se debe obtener el valor actual de \$ 3,000 por 3 periodos; el valor actual de \$ 4,700 por 6 periodos y el valor actual de X por 5 periodos. La ecuación de valor se forma al igualar, en la fecha focal, la suma de los valores de las obligaciones originales con el valor del pago propuesto:

$$\frac{3{,}000}{(1+\frac{0.567}{12})^3}+\frac{4{,}700}{(1+\frac{0.567}{12})^6}=\frac{X}{(1+\frac{0.567}{12})^5} \qquad (1)$$

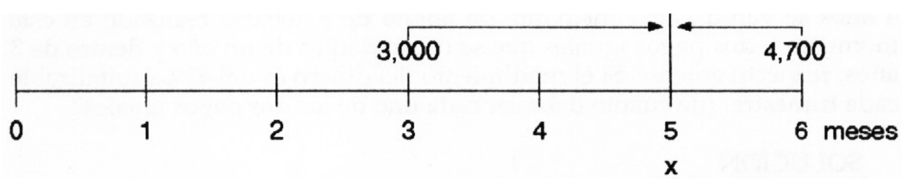
$$2{,}611.98180675 + 3{,}562.83445626 = \frac{X}{1.259655668}$$

$$6{,}174.81626301 = \frac{X}{1.259655668}$$

$$X = 7{,}778.14$$

Un pago único de \$ 7,778.14 dentro de 5 meses cancelará las deudas originales de \$ 3,000 y \$ 4,700.

Se mencionó que los resultados no dependen de la localización de la fecha focal. Para mostrar esta afirmación consideremos, ahora, como fecha focal el momento en que se pretende efectuar el pago único; esto es, el final del quinto mes.



En este caso se debe obtener el valor futuro de \$ 3,000 por 2 periodos; el valor actual de \$ 4,700 por un periodo; en cambio, X permanece inalterada puesto que se encuentra en la fecha focal. La ecuación de valor es:

$$3{,}000\,(1+\frac{0.567}{12})^2+\frac{4{,}700}{(1+\frac{0.567}{12})}=X \qquad (2)$$

$$3{,}290.197688 + 4{,}487.944617 = X$$

$$X = 7{,}778.14$$

Los resultados coinciden; sin embargo, la ecuación (2) es más sencilla de resolver. Por tanto, antes de resolver un problema que implique formar una ecuación de valor es recomendable analizar qué fecha focal proporciona una ecuación fácil de resolver.

Se puede demostrar que la ecuación de valor (1) es equivalente a la ecuación de valor (2). Si se multiplican ambos lados de la ecuación (1) por la expresión $(1+\frac{0.567}{12})^5$ se tiene:

$$(1+\frac{0.567}{12})^5\left[\frac{3{,}000}{(1+\frac{0.567}{12})^3}+\frac{4{,}700}{(1+\frac{0.567}{12})^6}\right]=(1+\frac{0.567}{12})^5\left[\frac{X}{(1+\frac{0.567}{12})^5}\right]$$

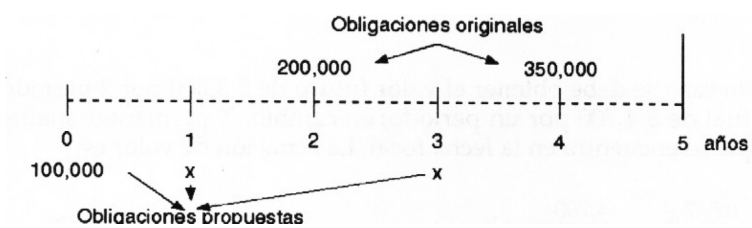
$$\frac{(1+\frac{0.567}{12})^5\,3{,}000}{(1+\frac{0.567}{12})^3}+\frac{(1+\frac{0.567}{12})^5\,4{,}700}{(1+\frac{0.567}{12})^6}=\frac{(1+\frac{0.567}{12})^5\,X}{(1+\frac{0.567}{12})^5}$$

$$3{,}000\,(1+\frac{0.567}{12})^2+\frac{4{,}700}{(1+\frac{0.567}{12})}=X$$

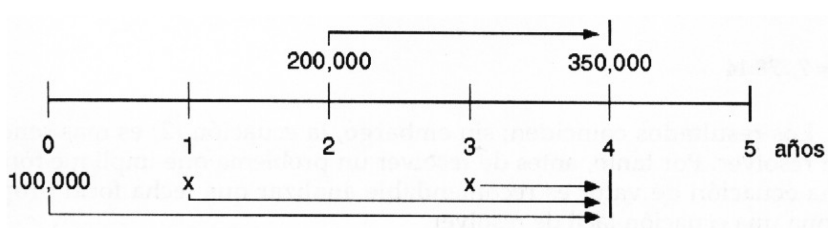
EJEMPLO 7.33

Una deuda de \$ 200,000 que vence en 2 años y otra de \$ 350,000 que vence en 4 años se van a pagar mediante un abono de \$ 100,000 realizado en este momento y dos pagos iguales que se harán dentro de un año y dentro de 3 años, respectivamente. Si el rendimiento del dinero es del 43% capitalizable cada trimestre, ¿de cuánto debe ser cada uno de los dos pagos iguales?

SOLUCION



X representa los dos pagos iguales. Si la fecha focal se localiza al final del cuarto año, el diagrama de tiempo quedaría de la siguiente forma:



El diagrama muestra que se deben trasladar a valor futuro todas las cantidades, excepto los \$ 350,000 que ya están en la fecha focal.

La ecuación de valor es:

$$200 \times 10^3 (1 + \frac{0.43}{4})^8 + 350 \times 10^3 = 100 \times 10^3 (1 + \frac{0.43}{4})^{16} + X (1 + \frac{0.43}{4})^{12} + X (1 + \frac{0.43}{4})^4$$

$$452,668.0837 + 350,000 = 512,270.9852 + 3.4050603904X + 1.50444023441X$$

Por tanto:

$$X = 59,150.03$$

Para liquidar la deuda, de acuerdo a la renegociación de la misma, es necesario pagar $ 100,000 en este momento, $ 59,150.03 dentro de un año y $ 59,150.03 dentro de 3 años.

EJEMPLO 7.34

César le debe a Rigoberto dos sumas de dinero: $ 1,000 más intereses al 20% capitalizable cada mes, que vence en 5 meses y $ 3,000 más intereses al 18% capitalizable cada bimestre, con vencimiento a 8 meses. Si se van a pagar ambas deudas mediante un solo pago al final de 10 meses, obtener la cantidad que debe pagarse si la tasa de interés de la operación es del 22% capitalizable cada mes.

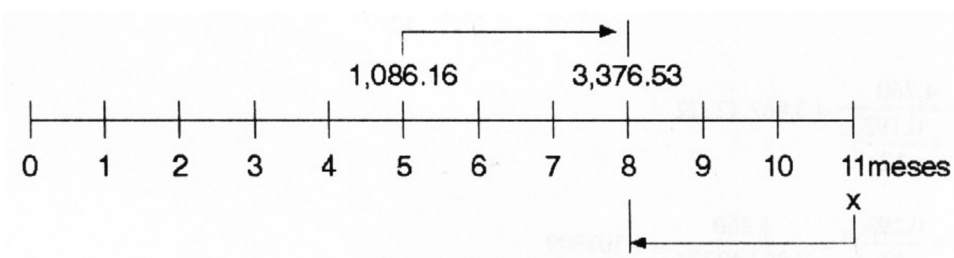
SOLUCION

Si una deuda genera intereses, se debe calcular primero su valor de vencimiento.

$$F = 1,000 (1 + \frac{0.20}{12})^5 = 1,086.16$$

$$F = 3,000 (1 + \frac{0.18}{6})^4 = 3,376.53$$

En seguida se elabora el diagrama de tiempo, se escoge la fecha focal y se forma la ecuación de valor.



La fecha focal se escogió al final de los 8 meses.

$$1,086.16 (1 + \frac{0.22}{12})^3 + 3,376.53 = \frac{X}{(1 + \frac{0.22}{12})^3}$$

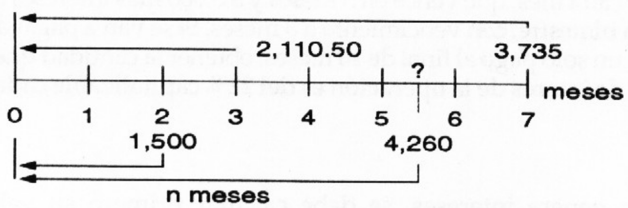
$$1,147.00 + 3,376.53 = \frac{X}{1.0370028}$$

$$X = 4,690.91$$

EJEMPLO 7.35

Se deben los siguientes pagarés: $ 2,110.50 a 4 meses y $ 3,735 a 7 meses. Se realiza un pago a los 2 meses por $ 1,500 y se desea realizar otro por $ 4,260. ¿En qué fecha se debe realizar este segundo pago si la tasa de rendimiento es del 19.3% anual capitalizable cada mes?

SOLUCION



La fecha focal está localizada en el momento actual.

$$\frac{2{,}110.50}{(1+\frac{0.193}{12})^4}+\frac{3{,}735}{(1+\frac{0.193}{12})^7}=\frac{1{,}500}{(1+\frac{0.193}{12})^2}+\frac{4{,}260}{(1+\frac{0.193}{12})^n}$$

$$1{,}980.01302+3{,}340.29876=1{,}452.88956+\frac{4{,}260}{(1+\frac{0.193}{12})^n}$$

$$\frac{4{,}260}{(1+\frac{0.193}{12})^n}=3{,}867.42222$$

$$(1+\frac{0.193}{12})^n=\frac{4{,}260}{3{,}867.42222}=1.101509$$

Aplicando logaritmos:

$$n\ 1n\ (1+\frac{0.193}{12})=1n\ 1.101509$$

Por tanto:

$$n=\frac{1n\ 1.101509}{1n\ (1+\frac{0.193}{12})}=\frac{1n\ 1.101509}{1n\ 1.016083333}=6\text{ meses}$$

El pago se debe realizar dentro de 6 meses a partir de la fecha focal; es decir, 6 meses a partir de hoy.

La fecha en la cual un conjunto de deudas, con fechas de vencimiento diferentes, puede ser pagado mediante un pago único igual a la suma de las distintas deudas, se llama fecha equivalente. El tiempo que debe transcurrir desde el momento actual hasta la fecha equivalente se conoce como tiempo equivalente.

EJEMPLO 7.36

Calcule el tiempo equivalente para el siguiente conjunto de obligaciones:

5,000 dólares a pagar en 2 años

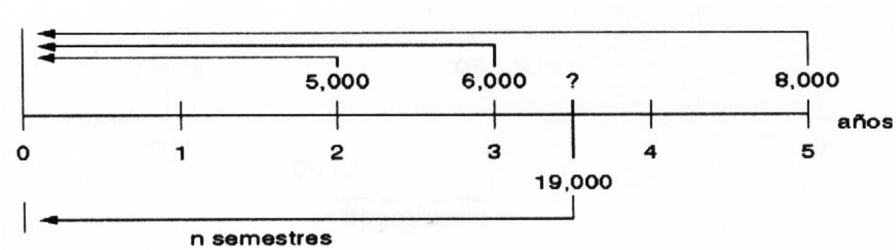
6,000 dólares a pagar en 3 años

8,000 dólares a pagar en 5 años

La tasa de rendimiento es del 7.7% anual capitalizable cada semestre.

SOLUCION

Cuando se pide calcular el tiempo equivalente no se da como dato el valor del pago único que se desea hacer, se entiende que éste es igual a la suma del conjunto original de obligaciones. En este caso es de 19,000 dólares.



$$\frac{5{,}000}{(1+\frac{0.077}{2})^4}+\frac{6{,}000}{(1+\frac{0.077}{2})^6}+\frac{8{,}000}{(1+\frac{0.077}{2})^{10}}=\frac{19{,}000}{(1+\frac{0.077}{2})^n}$$

$$14{,}564.9836=\frac{19{,}000}{1.0385^n}$$

$$1.0385^n = 19{,}000/14{,}564.9836$$

$$1.0385^n = 1.304498551$$

Aplicando logaritmos:

$$n \log 1.0385 = \log 1.304498551$$

$$n = 7.036454751 \text{ semestres}$$

$$n = 42.2187285 \text{ meses}$$

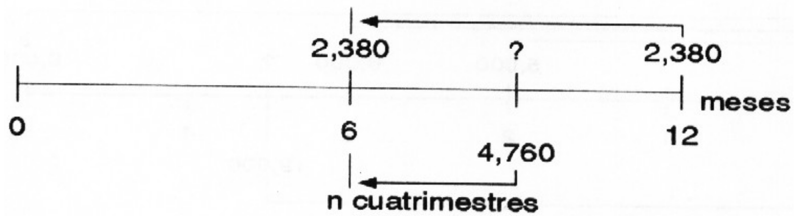
$$n = 3 \text{ años } 6 \text{ meses } 7 \text{ días}$$

El pago único deberá hacerse a los 3 años, 6 meses, 7 días a partir del día de hoy.

EJEMPLO 7.37

Calcule el tiempo equivalente de dos pagos por $ 2,380 cada uno efectuados al cabo de 6 y 12 meses, utilizando una tasa del 19% capitalizable cuatrimestralmente.

SOLUCION



$$2{,}380 + \frac{2{,}380}{(1+\frac{0.19}{3})^{1.5}} = \frac{4{,}760}{(1+\frac{0.19}{3})^{n}}$$

$$4{,}550.5651 = \frac{4{,}760}{1.063333333^{n}}$$

$$1.063333333^{n} = 1.046023934$$

$$n = \frac{\log 1.046023934}{\log 1.063333333}$$

n = 0.7327349284 cuatrimestres a partir de la fecha focal

O bien:

n = 2.930939714 meses a partir de la fecha focal

Por tanto, el tiempo equivalente es de 8.930939714 meses a partir del momento actual, lo cual equivale a 8 meses y 28 días, aproximadamente.

Para una aproximación del tiempo equivalente, se puede utilizar la siguiente regla, la cual se enunciará sin demostración: el tiempo equivalente es aproximadamente igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar el valor de las obligaciones por sus respectivos plazos y dividiendo este resultado por la suma de los valores de las obligaciones. Esto es, si F1, F2, F3, ..., Fk son los valores de vencimiento de las obligaciones y n1, n2, n3, ..., nk los plazos correspondientes, entonces el tiempo equivalente, n, viene dado por

$$n = \frac{F_1\, n_1 + F_2\, n_2 + F_3\, n_3 + \ldots + F_k\, n_k}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_k}$$

EJEMPLO 7.38

Aplique la regla anterior para obtener el tiempo equivalente del ejemplo 7.37

SOLUCION

$F_1 = 2{,}380$

$n_1 = 6$ meses

$F_2 = 2{,}380$

$n_2 = 12$ meses

Por tanto:

$$n = \frac{(2{,}380)\,(6) + (2{,}380)\,(12)}{2{,}380 + 2{,}380} = \frac{42{,}840}{4{,}760}$$

$$n = 9 \text{ meses}$$

Como se puede ver, la regla proporciona una buena aproximación del tiempo equivalente.

Ejercicios 7.4

1. El Sr. Salinas le debe al Sr. Hurtado $ 1,600 a pagar en 2 meses y $ 2,300 a pagar en 6 meses. Si el Sr. Salinas desea pagar el total de la deuda en este momento mediante un solo pago, ¿cuánto debe pagar? Suponga una tasa de interés del 28% compuesto cada bimestre.
2. Una compañía constructora está construyendo un hotel. Por tal motivo solicitó un préstamo que se dará en 3 partes: 1.2 millones de pesos en este momento; 2.1 millones dentro de 9 meses y 3 millones dentro de un año y medio. La tasa de interés es del 25% capitalizable cada trimestre. ¿Cuánto debe pagar la compañía para liquidar el préstamo al cabo de 5 años?
3. Se deben 12,000 dólares, pagaderos a 7 meses, y 18,000 dólares pagaderos a 15 meses. Si se da un abono a los 5 meses por 6,000 dólares y uno más por 10,000 dólares a los 12 meses, ¿cuánto restará por pagar a los 15 meses si la tasa de interés es del 9% capitalizable cada trimestre?
4. Una persona depositó 3,800 dólares en un banco que otorga el 10.5% de interés capitalizable cada cuatrimestre, por un periodo de 4 años. Sin embargo, debido a una emergencia, tuvo que retirar 2,000 dólares de la cuenta al final de un año y medio después del depósito. ¿Cuál será el saldo de la cuenta al finalizar el periodo original de 4 años?
5. El señor Curiel debe pagar $ 6,890 en este momento. Propone a su acreedor saldar la deuda efectuando 3 pagos mensuales iguales y sucesivos, comenzando el próximo mes. Si la tasa promedio en el mercado financiero es del 27% capitalizable en forma mensual, encuentre el valor de los pagos.
6. Eduardo me debe $ 975 a pagar dentro de 10 meses. Me ofrece en pago el día de hoy $ 720. Si el rendimiento del dinero es del 3.50%, mensual promedio, capitalizable cada mes, ¿me conviene aceptar el pago?
7. Una persona firma los siguientes pagarés:

$ 8,000 a 90 días
$ 15,000 a 120 días
$ 20,000 a 180 días

Transcurridos 60 días propone efectuar un pago de $ 8,000 en ese momento y un pago único dentro de 150 días con el 30% de rendimiento capitalizable cada día. Determine el valor del pago único.

8. Laura obtiene un préstamo por $ 13,000 con intereses del 16.7% capitalizable cada mes. Acepta pagar dando $ 3,000 dentro de 6 meses; $ 4,500, dentro de un año y el saldo en un año y medio. Encuentre el valor del pago final.
9. Lorenzo debe 2,570 con vencimiento en 4 meses sin intereses; y $ 5,600 con intereses al 4% mensual capitalizable trimestralmente con vencimiento en 9 meses. Suponiendo un rendimiento del 55% capitalizable cada mes, ¿cuál sería el pago único que se tendría que hacer dentro de 6 meses para saldar sus deudas?
10. Un deudor desea hacer 2 pagos iguales a 8 y 10 meses, en sustitución de los siguientes pagarés:

$ 695 a 4 meses al 24% capitalizable mensualmente
$ 930 a 6 meses al 27.6% capitalizable bimestralmente
$ 1,350 a 12 meses al 30% de interés simple

Calcule el valor de los pagos si la tasa de operación empleada para la renegociación de la deuda es del 2.56% mensual capitalizable cada mes.

11. El gerente de una empresa compró un fax a crédito. El precio de contado es de $ 4,230, y lo va a pagar en 6 abonos mensuales iguales, con un interés del 37% compuesto cada mes. Calcule el valor del abono.
12. Víctor, que actualmente tiene 15 años, es el beneficiario de un seguro de vida por $ 850,000. El dinero está depositado en un fideicomiso que da el 26.8% compuesto mensualmente; y le será entregado a Víctor en 2 pagos: un pago será hecho en el momento en que cumpla 18 años y el otro cuando cumpla 21 años. Si el segundo pago debe ser un 50% más que el monto del primero, ¿cuál será el monto de cada uno de los pagos?
13. Se deben los siguientes documentos:

$ 3,450 a 5 meses
$ 5,370 a 12 meses

Se ofrecen en pago $ 8,795. Si la tasa de interés es del 27.3% compuesto cada mes, calcule la fecha del pago único.

14. Resuelva el problema anterior si el pago ofrecido es de $ 11,000.
15. Se debe pagar una deuda de la siguiente forma: 4,800 dólares al cabo de un año; 5,620 dólares a un año y medio y 6,300 dólares a los 2 años. Se desea reemplazar la deuda por un pago de 8,500 dólares a un plazo de 10 meses y otro

pago igual en una fecha que debe ser calculada. La tasa de interés es del 10% capitalizable cada bimestre.

16. ¿Cuál es el tiempo equivalente para el pago de unas deudas de $ 1,200 con vencimiento en 5 meses; $ 1,700 con vencimiento en 8 meses y $ 2,000 con vencimiento en 14 meses? Suponga una tasa de interés del 24% compuesto cada mes.

17. Se debe pagar la cantidad de $ 440 cada mes durante 6 meses. Encuentre el tiempo equivalente considerando una tasa de rendimiento del 21.5% capitalizable cada mes.

18. Una compañía adeuda al banco $ 270,000 con vencimiento a 10 meses y $ 510,000 con vencimiento a un año y medio. Desea liquidar la deuda mediante un pago único. ¿Cuál es el tiempo equivalente si la tasa de interés es del 4.1% mensual con capitalización trimestral?

19. El día de hoy, el gerente de la cafetería de una universidad compró 4 hornos de microondas. Pagó $ 1,500 de enganche y firma 2 pagarés: uno por $ 3,500 con vencimiento a 6 meses, y el otro por $ 4,325 con vencimiento a 10 meses. Suponiendo un rendimiento del 35% capitalizable cada mes, obtenga el tiempo equivalente.

20. Se tienen los siguientes vencimientos:

$ 175 a 2 meses al 50% de interés simple
$ 490 a 4 meses al 40% capitalizable cuatrimestralmente

Obtenga el tiempo equivalente a una tasa del 40% compuesto cada mes.

INTERES COMPUESTO A CAPITALIZACION CONTINUA

El lector habrá notado que si la tasa de interés nominal permanece constante, pero la capitalización es más frecuente, el monto compuesto también crece. Por tanto, surge la pregunta: ¿Qué sucede con el monto compuesto al final de un cierto tiempo cuando la frecuencia con la que el interés se capitaliza crece sin límite; esto es, cuando el número de periodos de capitalización tiende a infinito? Pudiera tenerse la impresión de que el monto también tenderá a infinito; Sin embargo, esto no es así. En la siguiente tabla se puede ver que el monto no tiende a infinito cuando el número de capitalizaciones aumenta, sino que se acerca paulatinamente a un valor determinado; esto es, a un límite.

MONTO COMPUESTO PARA UN CAPITAL DE $ 100 AL 30% DE INTERES ANUAL POR UN AÑO

Frecuencia de capitalización	Periodos por año	Monto compuesto en un año
Anual	1	$ 130.00
Semestral	2	$ 132.250
Trimestral	4	$ 133.54691
Mensual	12	$ 134.48888
Quincenal	24	$ 134.73511
Semanal	52	$ 134.86956
Diaria	365	$ 134.96925
Por hora	8,760	$ 134.98519
Por minuto	525,600	$ 134.98585

Puede demostrarse que existe un punto más allá del cual el monto compuesto no aumentará ya, sin importar la frecuencia con que se capitalice el interés- Este valor recibe el nombre de monto compuesto a capitalización continua. Capitalización continua significa que el interés se capitaliza a cada instante. Este valor límite, para el ejemplo de esta tabla, es $ 134.98588.

Consideremos ahora el caso general. Sea i la forma decimal de la tasa nominal anual j% de interés compuesto capitalizable m veces en un año. Si P es el capital inicial, entonces el monto compuesto de P al final de t años será:

$$F = P(1 + \frac{i}{m})^{mt} \qquad (1)$$

Donde $\frac{i}{m}$ es la tasa por periodo de capitalización y mt es el número total de periodos de capitalización en t años.

Sea $q = \frac{m}{i}$. Por tanto, $m = qi$. La expresión (1) puede ser reescrita como:

$$F = P(1 + \frac{1}{q})^{qit}$$

O bien:

$$F = P\left[(1 + \frac{1}{q})^{q}\right]^{it}$$

La capitalización continua se logra cuando el número de periodos de capitalización aumenta en forma indefinida; es decir, cuando m tiende a infinito (m -* w). Si m tiende a infinito, entonces q también tiende a infinito.

Por tanto, el monto compuesto F, cuando el interés se capitaliza continuamente, viene dado por:

$$F = \lim_{q \to \infty} P. \left[(1+\frac{1}{q})^q\right]^{it}$$

$$F = P \lim_{q \to \infty} \left[(1+\frac{1}{q})^q\right]^{it}$$

$$F = P \lim \left[\lim_{q \to \infty} \left(1+\frac{1}{q}\right)^q\right] \qquad (2)$$

En cálculo diferencial se demuestra que $\lim_{q \to \infty} \left(1+\frac{1}{q}\right)^q = e.$

Donde e es la base de los logaritmos naturales.

Al sustituir el límite en la ecuación (2) se tiene:

$$F = P\, e^{\,it} \qquad (7.5)$$

Por tanto, sin importar que a m se le asigne un valor muy grande, F será finito.

La ecuación (7.5) es la fórmula general para obtener el monto compuesto cuando el interés se capitaliza continuamente, durante t años.

El lector puede verificar que la ecuación (7.5) y la fórmula dada en el ejemplo 2.13, del capítulo 2, es exactamente la misma. Esto significa que las cantidades que crecen exponencialmente se "capitalizan" en forma continua o, inversamente, el dinero invertido a capitalización continua crece exponencialmente.

EJEMPLO 7.39

Se invierten $ 15,000 a una tasa de interés del 35%. Calcule el monto compuesto después de 3 años si el interés se capitaliza:

a) trimestralmente
b) mensualmente
c) semanalmente
d) continuamente

SOLUCION

a) En este caso se tienen 12 periodos de capitalización.

$$F = 15{,}000\ (1 + \frac{0.35}{4})^{12} = 41{,}043.32$$

b) En este caso se tienen 36 periodos de capitalización.

$$F = 15{,}000\ (1 + \frac{0.35}{12})^{36} = 42{,}225.70$$

c) En este caso hay 156 periodos de capitalización.

$$F = 15{,}000\ (1 + \frac{0.35}{52})^{156} = 42{,}714.24$$

d) En este caso el número de periodos de capitalización tiende a infinito.

$$F = 15{,}000\ e^{(0.35)\ (3)} = 15{,}000\ e^{1.05}$$

La expresión anterior puede ser evaluada de dos formas: Utilizando logaritmos naturales o de manera directa mediante una calculadora.

1a. Forma

$$\ln F = \ln 15{,}000 + 1.05 \ln e$$

Como ln e es igual a 1, entonces:

$$\ln F = \ln 15{,}000 + 1.05 = 10.66580548$$

$$F = \text{antiln } 10.66580548$$

$$F = 42{,}864.77$$

2a. Forma

$$15{,}000\ \boxed{\times}\ 1.05\ \boxed{e^x}\ \boxed{=}\ \$\ 42{,}864.77$$

Como se mencionó, este valor, $ 42,864.77, es una cota superior para el monto compuesto. No importa que tan a menudo se capitalicen los intereses, $ 15,000 invertidos durante 3 años al 35% no podrá ser superior a $ 42,864.77.

EJEMPLO 7.40

Encuentre el monto y el interés compuesto de $ 2,780 invertidos durante 3 meses al 27.5% capitalizable continuamente.

SOLUCION

$$P = 2{,}780$$

$$i = 0.275$$

$$t = 3 \text{ meses} = 3/12 \text{ años} = 0.25 \text{ años}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (7.5), se tiene:

$$F = 2{,}780\ e^{(0.275)\ (0.25)}$$

$$F = 2{,}780\ e^{0.06875}$$

$$F = 2{,}977.85$$

El interés compuesto ganado es: $I = 2{,}977.85 - 2{,}780$

$$I = 197.85$$

EJEMPLO 7.41

Un pagaré por 489 dólares vence dentro de un mes. Calcular su valor actual al 9% compuesto continuamente.

SOLUCION

Para encontrar el valor actual sólo se necesita despejar P de la ecuación (7.5).

$$P = \frac{F}{e^{it}}$$

$$P = 489/e^{(0.09)\ (1/12)}$$

$$P = 485.35 \text{ dólares}$$

EJEMPLO 7.42

¿Por qué cantidad deberá hacerse un pago único dentro de 6 meses que sustituya a los siguientes pagarés:

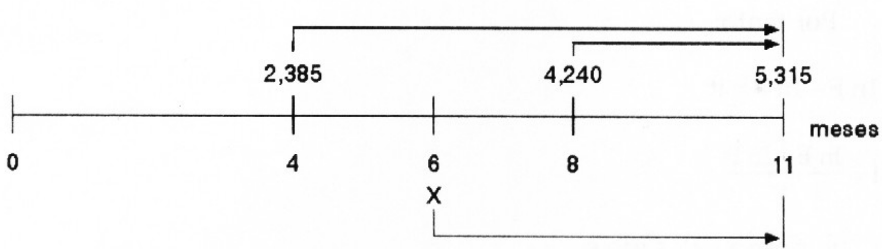
$ 2,385 a pagar dentro de 4 meses

$ 4,240 a pagar dentro de 8 meses

$ 5,315 a pagar dentro de 11 meses

La tasa de interés es del 3% mensual capitalizable continuamente.

SOLUCION



$$2{,}385\ e^{(0.03)\ (7)} + 4{,}240\ e^{(0.03)\ (3)} + 5{,}315 = X\ e^{(0.03)\ (5)}$$

$$12{,}896.621136 = X\ e^{0.15}$$

$$X = \frac{12{,}896.621136}{e^{0.15}}$$

$$1n\ X = 1n\ 12{,}896.621136 - 0.15\ 1n\ e$$

Como 1n e = 1, entonces:

$$\ln\ X = 9.46472063 - 0.15$$

$$\ln\ X = 9.31472063$$

$$X = \text{antiln } 9.31472063$$

$$X = 11{,}100.22$$

EJEMPLO 7.43

El Producto Interno Bruto de México aumentó de 5,012.8 miles de millones de pesos en 1989 a 5,208.3 miles de millones de pesos en 1990*. Obtenga la tasa continua de crecimiento.

SOLUCION

Se despeja i de la ecuación (7.5).

Se despeja i de la ecuación (7.5).

$$F = P\ e^{it}$$

$$1n\ F = 1n\ P + it\ 1n\ e$$

Como 1n e = 1, entonces:

$$1n\ F = 1n\ P + it$$

Por tanto:

$$1n\ F - 1n\ P = it$$

$$i = \frac{\ln F - \ln P}{t}$$

$$i = \frac{1n\ 5{,}208.3 + 1n\ 5{,}012.8}{1 \text{ año}}$$

$$i = 0.038259$$

Por tanto:

$$j = 3.8259\%\ \text{anual}$$

---

* *Pesos de 1980.*

En la sección 7.4 se definió la tasa de interés efectiva cuando el interés se capitaliza m veces en un año. De una manera semejante se define la tasa de interés efectiva cuando la capitalización es continua: la tasa de interés efectiva se define como la tasa de interés simple que produce el mismo interés en un año que la tasa nominal capitalizada continuamente.

Si se invierten $ P a una tasa nominal i* capitalizada continuamente, el monto al final de un año será:

$$F = P\,e^{(i)\,(1)} = P\,e^{i}$$

Por otro lado, si r* es la tasa de interés simple que produce en un año un monto $ F, entonces:

$$F = P(1 + r)$$

Como r es la tasa equivalente a i, entonces r es la tasa de interés efectiva cuando el interés se capitaliza a cada instante. Por tanto, se puede formar la siguiente igualdad:

$$P(1 + r) = P\,e^{i}$$

$$(1 + r) = \frac{P\,e^{i}}{P} = e^{i}$$

$$r = e^{i} - 1 \qquad (7.6)$$

EJEMPLO 7.44

Calcular la tasa de interés efectiva correspondiente al 18% capitalizable a cada instante.

SOLUCION

La tasa nominal i = 0.18; por tanto, al sustituir en la ecuación (7.6) se tiene:

$$r = e^{0.18} - 1$$

Si se utilizan logaritmos para calcular el valor de r, recuerde que las leyes de los logaritmos no se pueden utilizar cuando hay sumas o restas. En este caso se resuelve únicamente $e^{0.18}$.

Sea:

$$X = e^{0.18}$$

Por tanto:

$$1n\ \ X = 0.18\ 1n\ e = 0.18$$

---

* *Tasas expresadas en forma decimal.*

$$X = \text{antiln } 0.18$$

$$X = 1.197217363$$

Si $e^{0.18} = 1.197217363$, entonces

$$r = 1.197217363 - 1$$

$$r = 0.197217363$$

$$r = 19.7217\% \text{ anual}$$

Ejercicios 7.5

1. Se han invertido $ 3,400 al 46%, durante un año y medio. Obtenga el monto compuesto si la capitalización de intereses es:
   a) semestral
   b) mensual
   c) continua
2. Obtener el monto de $ 500 al cabo de 6 meses, al 28% con capitalización continua.
3. Se invierten 2,000 dólares a una tasa anual de interés del 10%. Calcule el monto y el interés total ganado después de 5 años si,
   a) el interés es simple.
   b) el interés se capitaliza cada mes.
   c) el interés se capitaliza a cada instante.
4. Sandra deposita $ 4,300 al 45% de interés compuesto cada bimestre por 2 años y, en seguida, transfiere todo su dinero a una cuenta que paga el 40% compuesto continuamente. Obtenga el monto después de 6 años.
5. ¿Cuánto debe usted de invertir ahora a una tasa del 500% para que su monto, dentro de un año, sea de $ 50,000, si el interés se capitaliza a cada instante.
6. Un pagaré por $ 5,500 vence dentro de 10 meses. Obtenga su valor actual al 30% compuesto continuamente.
7. Se va a constituir un fideicomiso mediante un solo depósito, de manera que al final de 10 años se tengan un millón de pesos en el fondo. Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual del 359%, ¿cuánto se debe colocar en el fondo al principio?
8. Una persona invirtió $ 2,000 hace 5 meses. En este momento retira su dinero y recibe $ 2,129. Obtenga la tasa de interés si la capitalización fue continua.
9. Una determinada cantidad de dinero se invierte a cierta tasa fija, y el interés se compone continuamente. Después de 13 meses, el dinero se ha duplicado. Obtenga la tasa de interés anual.
10. *El Producto Nacional Bruto (PNB) de cierto país era de 120,000 millones de dólares en 1985 y de 190,000 millones de dólares en 1990. Si el PNB crece continuamente, ¿cuál será el PNB en 1998?

11. ¿Qué tiempo se tardará en triplicarse un capital si la tasa de interés es del 33% capitalizable continuamente?
12. Con referencia al problema 10, diga cuándo será el PNB de 250,000 millones de dólares.
13. Encuentre la tasa de interés efectiva sobre un 45% capitalizable continuamente.
14. Un banco ofrece una tasa anual de interés del 35% compuesto cada cuatrimestre, y un banco competidor ofrece una tasa del 33%, capitalizable continuamente. ¿Qué banco se debe elegir?
15. *¿Qué tasa nominal capitalizada continuamente será equivalente a una tasa efectiva del 20%?
16. El Banco del Este ofrece una tasa de interés del 46% capitalizable cada mes. ¿Qué tasa nominal de interés debe ofrecer el Banco del Oeste, que capitaliza continuamente, para que las tasas efectivas de los dos bancos sean iguales?
17. ¿Qué cantidad deberá pagarse dentro de 9 meses, en lugar de pagar $ 1,839 dentro de 4 meses, si la tasa de la operación es del 3.6% mensual capitalizable en forma continua?
18. Enrique debe pagar $ 5,000 dentro de 10 meses. Encuentre el valor de dos pagos iguales, a 3 y 6 meses, que sustituyan la deuda original. Utilice una tasa de interés del 23% capitalizable en forma continua.
19. 16,000 dólares tenían que ser pagados dentro de 3 años, y en vez de eso se van a efectuar los siguientes pagos parciales:

    3,000 dólares a los 10 meses

    6,000 dólares a los 18 meses

    Si se acordó una tasa del 7°/o capitalizable continuamente, ¿de cuánto será un tercer pago que salde la deuda a los 3 años?
20. Dentro de cuánto tiempo deberá hacerse un pago único de $1,766.85 que sustituya a los siguientes pagarés, tomando en cuenta que la tasa de interés es del 21% compuesto en forma continua:

    $ 785 a los 3 meses

    $ 973 a los 8 meses.

TEMA ESPECIAL

LA INFLACION

Hasta ahora el manejo del dinero se ha llevado a cabo suponiendo una situación económica estable, es decir, o bien la inflación tiene un valor igual a cero o el aumento de precios en los bienes y servicios es tan pequeño y pausado que no se toma en cuenta por empresas e individuos al tomar sus decisiones. Por desgracia, ésta no siempre es una suposición realista; por lo tanto, es importante saber cómo incorporar la inflación en un análisis financiero.

La Inflación se caracteriza por el incremento generalizado y sostenido de los precios de los bienes y servicios producidos por la economía de un país y, por tanto, por la consiguiente pérdida del poder de compra o poder adquisitivo de la moneda. La inflación tiene causas muy complejas, siendo la más importante el aumento en la emisión de circulante sin un aumento equivalente de la producción de bienes y servicios. Cuando un gobierno recurre a la emisión de dinero con el fin de cubrir sus déficit presupuestales se generan presiones inflacionarias, debido a que al aumentar el circulante la gente tiene más dinero en su poder; al tener más dinero la tendencia es a gastarlo, aumentando de esta manera la demanda de bienes y servicios y al no haber un aumento de la oferta, los precios suben.

La inflación se mide mediante el Indice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), el cual es un indicador que mide el crecimiento promedio que sufren los precios de los bienes y servicios a través del tiempo.

El Banco de México inició en 1927 la elaboración del INPC. En ese año el Indice se obtuvo con los precios mensuales de 16 artículos alimenticios de la Ciudad de México. Actualmente el INPC se calcula recopilando cada mes 140,000 cotizaciones directas en 46 ciudades del país, sobre los precios de aproximadamente 1,200 artículos y servicios específicos. Estos productos se promedian de manera ponderada para conformar 8 grupos: Alimentos, bebidas y tabaco; Ropa y calzado; Vivienda (renta, electricidad, gas, teléfono, etc.); Muebles y enseres domésticos; Salud y cuidado personal; Transporte; Educación y Esparcimiento; Otros servicios.

La inflación se describe usualmente en términos de un porcentaje quincenal, mensual o anual que representa la tasa a la cual los precios de la quincena, del mes o del año en consideración han aumentado en relación con los precios de la quincena, del mes o del año anterior; por tanto, la inflación muestra un efecto compuesto. Por ejemplo: el INPC en 1985 fue de 63.7% esto significa que a fines de diciembre de 1985 o principios de enero de 1986 se necesitaron $ 163.70 para comprar un conjunto de mercancías que a fines de diciembre de 1984 o principios de enero de 1985 costaron $ 100. Es necesario dejar bien claro que el INPC mide el aumento promedio de los bienes y servicios utilizados en la elaboración del Indice; por tanto, algunos bienes y servicios tuvieron incrementos por arriba de 63.7% y otros incrementaron sus precios por abajo de 63.7%.

El INPC también se puede expresar como una cifra que indica el incremento de los precios con relación a un año base, al cual se le asigna arbitrariamente el valor de 100. Hasta 1994 el año base utilizado fue 1978 (Base 1978 = 100). A partir de 1995, se utiliza como año base 1994 (Base 1994 = 100).

Cuando se dice que el INPC de octubre de 1993 fue de 35,638.4 se está indicando que los artículos comprados en 1978 con $ 100, en octubre de 1993 se compraron con $ 35,638.40, lo cual significa un 35,538.40% de incremento en 15 años. Asimismo, el INPC de agosto de 1996 fue de 185.94, lo cual significa que el aumento promedio de los precios ha sido de un 85.94% en comparación con los precios vigentes en 1994.

Para convertir el INPC base 1978 = 100 de cualquier mes a la nueva base de 1994 = 100, se deberá dividir el correspondiente índice mensual entre la constante

37,394.134 y el resultado multiplicarlo por 100. Por ejemplo, el índice base 1978 de octubre de 1993 fue de 35,638.4; por tanto, el INPC base 1994 de ese mismo mes y año será (35,638.4/37,394.134) 100 = 95.3.

EJEMPLO 1

Si el índice de precios afines de junio de 1990 fue de 22,258.9 y a fines de 1993 fue de 35,493.2, obtenga el porcentaje de inflación ocurrida en ese intervalo de tiempo.

SOLUCION

La tasa de inflación será simbolizada mediante la letra griega X (lambda). Sea X el porcentaje de inflación ocurrida de junio de 1990 a septiembre de 1993. Aplicando lo estudiado en el capítulo 5, se tiene:

$$\left(\frac{\lambda}{100}\right)(22{,}258.9) = (35{,}493.2 - 22{,}258.9)$$

$\lambda =$ 59.456% de inflación en el periodo

Otra forma de resolución es mediante la siguiente fórmula:

$$\lambda = \left[\frac{\text{índice}_2}{\text{índice}_1} - 1\right] 100 \qquad (1)$$

donde índice, es el índice de precios al inicio del periodo e índice2 es el índice de precios al final del periodo.

Por tanto:

$$\lambda = \left[\frac{35{,}493.2}{22{,}258.9} - 1\right] 100$$

$$\lambda = 59.456\%$$

EJEMPLO 2

La economía mexicana experimentó una inflación del 159.2% en 1987. Suponiendo que la tasa de inflación se hubiera mantenido constante a partir de entonces, obtenga el precio que hubiera alcanzado un escritorio afines de diciembre de 1993, sabiendo que a fines de diciembre de 1987 tenía un precio de $ 187.00 (187,000 viejos pesos).

SOLUCION

Ya se mencionó que la inflación tiene un efecto compuesto; esto es, se comporta como un interés compuesto. En consecuencia, el precio del escritorio es aumentando a una tasa del 159.2% "capitalizable« cada año.

Por tanto:

$$F = 187\ (1 + 1.592)^6$$

$$F = \$\ 56{,}708.95$$

EJEMPLO 3

La inflación del mes de enero de 1995 fue del 3.76%. Si esta tasa de inflación se hubiera mantenido constante mes tras mes, ¿qué tasa de inflación acumulada se hubiera tenido a fin de año?

SOLUCION

Para obtener la tasa de inflación acumulada en el año (tasa de inflación anualizada) se supone que la tasa mensual conocida se mantendrá constante mes tras mes, durante todo el año. Por otro lado, es necesario suponer un valor para P.

Sea:

$P = 100$
$n = 12$ meses
$\lambda = 3.76\%$ cada mes $= 0.0376$

$$F = 100\ (1.0375)^{12}$$
$$\mathbf{F = \$\ 155.7254}$$

Si a principios del año un cierto artículo costaba $ 100.00, a fin de año costará $ 155.7254. Esto significa un aumento del 55.7254% en el año; por tanto, si la tasa de inflación se hubiera mantenido constante en 3.76% mensual, la tasa de inflación acumulada para 1995 hubiera sido del 55.7254%. La inflación real obtenida en 1995 fue del 51.96%.

La siguiente fórmula nos permite encontrar la inflación acumulada en un cierto intervalo de tiempo, cuando la tasa de inflación parcial se conoce y es constante:

$$\lambda = [(1 + \lambda_1)^n - 1]\ 100 \qquad (2)$$

donde λ_1 es la tasa de inflación parcial y n es el número de periodos.

Para el problema anterior:

$\lambda_1 = 3.76\% = 0.0376$
$n = 12$ meses

Sustituyendo los datos del problema, tenemos:

$$\lambda = [(1.0376)^{12} - 1]100$$

$$\lambda = 55.7254\%$$

EJEMPLO 4

¿De qué porcentaje fue la inflación en el primer semestre de 1996, si las inflaciones mensuales fueron las siguientes:

Mes	Inflación
Enero	3.59%
Febrero	2.33%
Marzo	2.20%
Abril	2.84%
Mayo	1.82%
Junio	1.63%

SOLUCION

Como la tasa de inflación mensual no es constante, la fórmula anterior no funciona. En este caso, la inflación acumulada se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$\lambda = [(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) \ldots\ldots (1 + \lambda_n) - 1]\, 100 \qquad (3)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ son las inflaciones parciales conocidas.

Sustituyendo los datos en la fórmula, se obtiene:

$$\lambda = [(1.0359)(1.0233)(1.022)(1.0284)(1.0182)(1.0163) - 1]\, 100$$

$$\lambda = 15.289\%$$

EJEMPLO 5

Si del mes de diciembre de 1992 a diciembre de 1993, el INPC cambió de 33,393.9 a 36,068.5, calcule:

a) la inflación sufrida en 1993.

b) la tasa promedio de inflación mensual para 1993.

SOLUCION

a) Mediante la fórmula (1) se obtiene:

$$\lambda = \left[\frac{36{,}068.5}{33{,}393.9} - 1\right] 100$$

$$\lambda = 8.01\% \text{ anual}$$

b) En la realidad, la inflación mensual fue variable, sin embargo, se puede obtener una tasa media mensual de crecimiento cuyo efecto final es exactamente el mismo que el obtenido al acumular las tasas mensuales reales, esto es, un 8.01% anual.

El INPC muestra el aumento promedio de los precios de los bienes y servicios para un periodo dado con relación a un periodo base, al cual se le asigna el valor de

100. Así, los precios promedio cambiaron, en 1993, de $ 33,393.9 a $ 36,068.5 con respecto a los precios de 1978 (año base), que tuvieron un valor de $ 100. Si ap es la tasa media mensual de inflación, entonces:

$$36{,}068.5 = 33{,}393.9\,(1 + \lambda_p)^{12}$$

$$\log 36{,}068.5 = \log 33{,}393.9 + 12 \log (1 + \lambda_p)$$

Es decir:

$$\log (1 + \lambda_p) = 2.7884115958 \times 10^{-3}$$

Por tanto:

$$\lambda_p = 0.644\% \text{ mensual promedio}$$

La tasa de inflación media o promedio se puede obtener por medio de la siguientes ecuación:

$$\lambda_p = [(1 + \lambda)^{1/n} - 1]\,100 \tag{4}$$

donde λ es la tasa de inflación acumulada.

En el presente problema se tiene:

$\lambda = 8.01\%$
$n = 12$ meses

Por tanto:

$$\lambda_p = [(1.0801)^{1/12} - 1]\,100$$
$$\lambda_p = 0.644\% \text{ mensual promedio}$$

Ejercicios

1. Si el índice de precios del mes de diciembre de 1994 fue de 103.26 y el de diciembre de 1995 fue de 156.92, obtenga el porcentaje de inflación ocurrida en 1995.
2. Si el índice de precios del mes de agosto de 1996 fue de 185.94 y el de diciembre de 1995 fue de 156.92, obtenga el porcentaje de inflación ocurrida de enero a agosto de 1996.
3. Si el índice de precios de marzo de 1992 fue de 31,047.4 y el de noviembre de 1995 fue de 151.96, obtenga la tasa de inflación para ese intervalo de tiempo.
4. Silos preciosa¡ consumidor en Estados Unidos están creciendo aun ritmo del 2.9% anual, ¿cuánto costará al cabo de 10 años una pistola cuyo precio actual es de US $ 245?
5. Si la tasa de inflación mensual en nuestro país se mantuviera constante e igual a 1.23% ¿cuánto costará un televisor dentro de un año, si su precio actual es de $ 3,800?
6. En cierta ciudad la tasa de inflación en renta de casas es 4% mensual. ¿Cuántos meses deben transcurrir para que la renta de una casa se duplique?

7. La tasa mensual de inflación para los meses de enero, febrero, marzo, abril y mayo de 1993 fue 1.25%, 0.82%, 0.58%, 0.58%, 0.57%, respectivamente. Si a principios de enero de 1993 un kilogramo de carne costaba $15.30, ¿cuánto debía haber costado a principios de junio debido únicamente a la inflación? Asimismo, calcule la inflación acumulada de los primeros 5 meses del año.
8. Si la inflación del mes de enero en un cierto país fue del 0.57% y se mantiene constante en los meses subsiguientes, ¿cuál será la inflación acumulada al finalizar el año?
9. Determine la inflación acumulada de 1990 a 1994, considerando que el Banco de México reportó las siguientes inflaciones anuales:

Año	Tasa de Inflación
1990	29.9%
1991	18.79%
1992	11.93%
1993	8.01%
1994	7.06%

10. ¿De cuánto fue la inflación en el sexenio de Carlos Salinas de Gortari?

Mes y Año	INPC
Noviembre de 1988	15,817.3
Noviembre de 1994	38,276.2

Obtenga también la inflación promedio anual.

11. La tasa de inflación en enero de 1996 fue de 3.59%. Si esta tasa de inflación se hubiera mantenido constante cada mes, ¿qué tasa de inflación anual se hubiera tenido en el año? Compárese el resultado con la inflación reportada por el Banco de México.
12. El gobierno mexicano anunció en noviembre de 1996 que la tasa anual de inflación para 1997 sería de 15%. Con el fin de cumplir esta meta, ¿qué tasa mensual promedio se debe tener?
13. Si la tasa de inflación en el primer trimestre de 1996 fue de 8.35%, determine la tasa de inflación anual para 1996.
14. En cierto país el INPC aumentó de 1,310.5 a 1,570.8 entres años. Calcule el porcentaje de inflación ocurrida en ese lapso de tiempo y calcule la tasa promedio de inflación anual.
15. Calcule la inflación promedio anual en el periodo 1988-1993, utilizando la siguiente información:

Mes y Año	INPC
Diciembre de 1987	10,647.2
Diciembre de 1993	36,068.5

16. Determine la inflación promedio diaria en el mes de mayo de 1991, si la inflación mensual fue del 0.99%.

17. *Se estima una inflación anual del 18%. Sien enero y febrero se ha incurrido en una inflación del 8.5%, ¿cuál deberá ser la inflación remanente para el periodo de los 10 meses restantes?

18. Se desea tener una tasa de inflación para el mes de mayo del 1.7%. Si se ha incurrido en una inflación del 1 % en la primera quincena del mes, ¿cuál deberá ser la inflación para la segunda quincena?

19. Si las tasas de inflación en los tres primeros meses del año son:

Enero	2.15%
Febrero	1.84%
Marzo	1.50%

¿Cuál debe ser la inflación remanente para que la inflación anual sea del 18%?

20. Si los salarios de los empleados de cierta compañía aumentan en un porcentaje igual a la tasa de inflación anual más 4 puntos porcentuales, obtenga el salario mensual que deberá estar ganando un empleado de la compañía en 1996, si en 1995 recibía un salario mensual de $ 2,710.00. La tasa de inflación anual en 1995 fue del 51.96%.

Ya se mencionó que debido a que el dinero puede invertirse y ganar intereses, su valor aumenta a través del tiempo. Pero si hay inflación el poder adquisitivo o poder de compra del dinero disminuye, aun ganando intereses. La inflación hace que el dinero futuro sea menos valioso que el dinero presente. Por ejemplo, en 1988 se podía comprar una rasuradora eléctrica en $ 55.00 (55,000.00 viejos pesos), actualmente (1996) la misma rasuradora se consigue en $ 600.00. El ejemplo es una muestra clara de que no se puede comprar hoy con $ 55.00 lo que se podía comprar hace 8 años; el poder de compra del dinero ha disminuido debido a la inflación.

Con respecto al dinero invertido en instrumentos financieros, se tendrá una pérdida en el poder de compra de la moneda si la tasa de inflación es mayor que la tasa de interés. Se tendrá un aumento en el poder de compra, si la tasa de interés es mayor que la tasa de inflación. Por tal motivo, es necesario conocer y utilizar la tasa de interés real al efectuar una inversión, ya que ésta indica el aumento o la pérdida del poder adquisitivo de una moneda.

La tasa de interés real, simbolizada por r, es el rendimiento que otorga un instrumento de inversión una vez descontado el efecto inflacionario. Por ejemplo, si una persona ahorra $ 1,000.00 y el banco le paga 15% de interés anual capitalizable cada año, al cabo de un año recibe un monto de $ 1,150. Pero si en ese año la tasa de inflación fue del 20% anual, esta persona estaría perdiendo dinero, se estaría descapitalizando, ya que al final del año, los $ 1,150.00 que obtuvo ni siquiera alcanzarían a reponer el poder de compra de su capital inicial, que ahora tendría que ser de $1,200.00. En cambio, si la tasa de interés hubiera sido del 30% anual capitalizable cada año, el monto al final del año sería del $ 1,300.00; en este caso, el ahorrador tendría una ganancia de $ 100.00, los cuales pueden gastarse o bien reinvertirse con el fin de incrementar el capital. Si la tasa de interés hubiera sido igual a la tasa de inflación, el poder adquisitivo del capital se hubiera mantenido intacto. En este caso el ahorrador no pierde ni gana.

De lo anterior surge la siguiente regla práctica: si invertimos nuestro dinero en instrumentos que dan una tasa de interés igual a la tasa de inflación, conservamos nuestros ahorros. Si la tasa de interés es mayor que la tasa de inflación, se acrecentan nuestros ahorros; pero si la tasa de interés es menor que la tasa de inflación, entonces tenemos una pérdida.

Lo mencionado anteriormente para el caso de las inversiones, es válido aplicarlo a los salarios. En una economía inflacionaria, el asalariado que no recibe aumentos de sueldo o bien recibe un aumento en un porcentaje de su salario inferior a la tasa de inflación, se está empobreciendo ya que el poder de compra de su salario se reduce en forma tal, que termina por ser insuficiente para mantener el nivel de vida acostumbrado. En nuestro país, de 1973, año en que se inició el fenómeno de altas tasas de inflación (inflación de más de un dígito), a la fecha, la clase media se ha estado empobreciendo progresivamente y la clase pobre ha pasado a la miseria extrema.

El 1 de enero de 1980 el salario mínimo general para el D.F., era de $ 0.163 pesos por día (163 viejos pesos diarios). El 1 de abril de 1995 el salario mínimo era de $ 18.30 por día. Esto significa un aumento de 11,127%. En cambio, entre esas dos fechas el INPC creció de 127.55 a 44,237.3, es decir, un aumento de 34,582.3%. Esto quiere decir que los precios aumentaron 210.8% por arriba de los salarios.

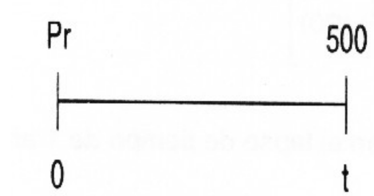
Otro ejemplo, para que el salado mínimo del 1 de enero de 1993 conservara el mismo poder de compra que el salario mínimo del 1 de enero de 1980, debería haber crecido en un 26,081.03% en lugar del 8,654.60% que creció; esto es, $ 42.68 diarios en lugar de $ 14.27.

EJEMPLO 6

$ 500 entregados en préstamo, sin intereses, en una fecha donde el INPC era igual a 18,169.4 son pagados en una fecha donde el INPC es igual a 25,752.8. Hallar el valor real del dinero al ser devuelto y la pérdida de valor, expresada en porcentaje, en relación al valor en la fecha del préstamo.

SOLUCION

Valor real, es el valor del dinero una vez descontada la inflación; en otras palabras, es el valor del dinero futuro en términos del dinero actual. El valor real es el valor presente del monto, utilizando en la fórmula la tasa de inflación. El valor real se simboliza por Pr.



Se calcula, en primer lugar, la tasa de inflación para el periodo del préstamo:

$$\lambda = \left[\frac{25,752.8}{18,169.4} - 1\right] 100$$

$\lambda = 41.7372065\%$ en el periodo

El valor real o valor presente real del monto, será:

$$Pr = \frac{M}{1 + \lambda\, t} = \frac{500}{1 + (0.417372065)\,(1)}$$

$Pr = \$\ 352.77$

El resultado se interpreta de la siguiente forma: \$ 352.77 de la fecha en que se realizó el préstamo, tiene un poder de compra igual a \$ 500.00 pagados en la fecha de liquidación del préstamo. En este caso, la inflación benefició al deudor ya que paga su deuda con dinero "depreciado" que tiene un poder adquisitivo menor al que recibió.

El dinero tuvo una pérdida de valor igual a \$ 352.77 - \$ 500 = \$ - 147.23; por tanto, su pérdida de valor en porcentaje es:

$$\left(\frac{X}{100}\right)(500) = -147.23$$

$x = -29.446\%$

EJEMPLO 7

Eduardo presta \$ 10,000 con un interés simple del 18% anual y con vencimiento dentro de 1 año 8 meses. Si en el momento de efectuarse el préstamo, el IN PC era de 31,744.1 y en la fecha de vencimiento el índice de precios es de 36,348.1, hallar:

a) El monto que recibe Eduardo.

b) El monto real o valor real que recibe Eduardo.

c) La tasa de interés real obtenida.

SOLUCION

a) $M = 10,000\left[1 + \left(\frac{0.18}{12}\right)(20)\right]$

$M = 13,000$

b) La inflación ocurrida en el lapso de tiempo de 1 año 8 meses fue:

$$\lambda = \left[\frac{36,348.1}{31,744.1} - 1\right] 100$$

$\lambda = 14,5035\%$ en el periodo

El valor real del dinero es:

$$Pr = \frac{13,000}{1 + (0.145035)\,(1)}$$

$$Pr = 11,353.36$$

c) Si se tienen $ 10,000 y se reciben $ 11,353.36 en valor real, la tasa real de interés será:

$$11,353.36 = 10,000\,[1 + (r)\,(20)]$$

$$1.135336 = 1 + 20r$$

$$r = 0.00676686$$

$$r = 0.676686\%\ \text{mensual}$$

$$r = 8.12\%\ \text{anual}$$

A pesar de la inflación ocurrida, Eduardo obtuvo una ganancia.

EJEMPLO 8

Rodolfo recibió $ 57,000 por la venta de su automóvil. Decidió invertir el dinero en una cuenta a 3 años de plazo y al 2.34% de interés mensual capitalizable cada mes. ¿Cuál será el valor final de su inversión en términos de dinero actual (o sea valor real del monto), si continúa la inflación a un ritmo constante del 1.54% mensual?

SOLUCION

En primer lugar se calcula el monto de la inversión; posteriormente el monto se corrige eliminando la inflación ocurrida en el periodo.

$$F = 57,000\,(1 + 0.0234)^{36}$$

$$F = 131,071.93$$

Corrección del monto:

$$Pr = \frac{131,071.93}{(1 + 0.0154)^{36}}$$

$$Pr = 75,608.73$$

EJEMPLO 9

Obtenga la tasa real de interés del ejemplo anterior.

SOLUCION

Se empieza con un capital de $ 57,000 y se llega a un monto real de $ 75,608.73, por tanto, utilizando la fórmula del interés compuesto:

$$75{,}608.73 = 57{,}000\,(1 + r)^{36}$$

donde r es la tasa real

$$\ln 75{,}608.73 = \ln 57{,}000 + 36 \ln (1 + r)$$

Por tanto:

$$\ln (1 + r) = 0.007847791247$$

$$1 + r = 1.00787866587$$

$$r = 0.787867\% \text{ mensual}$$

$$r = 9.4544\% \text{ anual capitalizable cada mes} = 9.8750\% \text{ efectiva}$$

Generalizando el procedimiento utilizado en el ejemplo 9, es posible lograr una fórmula que nos permita obtener la tasa de interés real. Esta fórmula se conoce con el nombre de fórmula de Fisher, en honor del matemático y economista Irving Fisher (1867-1947). La fórmula de Fisher es la siguiente:

$$r = \frac{i - \lambda}{l + \lambda}\,100$$

donde r es la tasa de interés real, expresada en porcentaje; i es la tasa de interés nominal y k es la tasa de inflación. i y ? están expresadas en forma decimal.

Si se aplica la ecuación anterior al ejemplo 9, se tiene:

$$r = \frac{0.0234 - 0.0154}{1 + 0.0154}$$

$$r = 0.787867\% \text{ mensual}$$

EJEMPLO 10

Un prestamista efectúa un préstamo de $ 26,000 al 35% capitalizable cada mes, por un año de plazo. En el momento de efectuar el préstamo el INPC era de 32,653.8 y en la fecha de vencimiento fue de 35,638.4. ¿Cuál fue el monto real que pagó el deudor?, ¿Cuál fue la tasa de interés real cobrada por el prestamista?

SOLUCION

$$F = 26{,}000\,\left(1 + \frac{0.35}{12}\right)^{12}$$

$$F = 36{,}711.48$$

La tasa promedio de inflación mensual fue:

$$35{,}638.4 = 32{,}653.8\,(1 + \lambda)^{12}$$

Por tanto:

$$\lambda = 0.73151655\% \text{ mensual}$$

Con la tasa de inflación se obtiene el valor real monto pagado por el deudor:

$$Pr = \frac{36,711.48}{(1 + 0.0073151655)^{12}}$$

Pr 33,637.01

La tasa real se calcula mediante la fórmula de Fisher:

$$r = \frac{0.35 / 12 - 0.0073151655}{1.0073151655} 100$$

r = 2.16928% mensual

r = 26.0314% anual capitalizable cada mes

También es posible obtener la tasa real de la siguiente forma:

$$33,637.01 = 26,000 (1 + r)^{12}$$

Resolviendo la ecuación se tiene:

r = 2.16928% mensual

EJEMPLO 11

En enero de 1993, Mayra invirtió cierta cantidad de dinero en oro a través de la compra de Centenarios*, en $ 1,285 cada uno. En enero de 1994 los vendió en $ 1,500 cada uno. Calcule el rendimiento nominal obtenido en el año, así como el rendimiento real.

SOLUCION

El rendimiento nominal es simplemente la tasa de interés simple obtenida por la inversión.

$$i = \frac{M - C}{C t} = \frac{1,500 - 1,285}{(1,285)(1)}$$

i = 0.1673

Por tanto:

i = 16.73% anual

Para obtener la tasa real es necesario eliminar el efecto inflacionario de la tasa nominal. Para hacer esto, es necesario conocer la tasa de inflación en 1993 y utilizar la fórmula de Fisher. El Banco de México dio a conocer que la inflación acumulada de 1993 fue del 8.01%.

Por tanto:

---

* *El Centenario es una moneda de oro que pesa 37.5 gramos y fue emitida por primera vez en 1921 para conmemorar el centenario de la Independencia de México.*

$$r = \frac{0.1673 - 0.0801}{1.0801} 100$$

$$r = 8.07\% \text{ anual real}$$

El rendimiento real obtenido por Mayra al invertir en 1993 en monedas de oro fue del 8.07% anual. En este caso, ella recibió un rendimiento superior a la inflación.

Ejercicios

21. El INPC en febrero de 1989 fue de 16,767.1 (año base: 1978). Hallar el valor de un peso a fines de febrero de 1989, con relación a su poder adquisitivo del año base.
22. En 1993, México tuvo una tasa de inflación anual de 8.01%. Si esta tasa se hubiera mantenido constante, ¿cuál será el valor real de $100.00 dentro de 10 años, en términos del poder de compra de 1993?
23. En cierto país la tasa mensual de inflación es del 7%. Si esta tasa se mantiene constante, ¿cuánto valdrán $ 350.00 dentro de 10 meses, en términos de dinero de hoy?
24. Alicia depositó, a principios de noviembre de 1993 (INPC = 35,638.4), $ 7,800.00 en una cuenta que paga el 18.5% de interés simple. Obtenga:
    a) El monto al cabo de 3 meses.
    b) El monto real al cabo de 3 meses (INPC = 36,348.1).
    c) La tasa real de interés.
25. Enrique prestó $ 7,300.00, sin intereses, a principios de agosto de 1993, por un plazo de 5 meses. Hallar el monto real que recibirá Enrique, sabiendo que las tasas mensuales de inflación fueron las siguientes:

Mes	Tasa de inflación
Agosto	0.5%
Septiembre	0.7%
Octubre	0.4%
Noviembre	0.4%
Diciembre	0.8%

26. Resuelva el problema anterior, si el préstamo se efectuó cobrando una tasa de interés del 1% mensual capitalizable cada mes.
27. Supóngase que la tasa de inflación es 6% al año. Si una persona presta a otra $ 15.000.00 al 9 % de interés simple, durante 2 años, calcule el monto una vez descontada la inflación.
28. Suponga una tasa de inflación del 22.7% anual. Si una persona deposita $ 100,000.00 en una inversión bancaria al 21% de interés capitalizable cada mes, durante 5 años, ¿protegerá de manera efectiva esta inversión el poder de compra de la cantidad original?
29. En un año cuyo índice de precios fue de 3,030, una persona invierte 10,000 dólares en una cuenta que gana un 8% anual capitalizable cada año. Si al final del sexto año el índice de precios es 5,302.5 encuentre el valor del monto real.

30. Encuentre la tasa real del problema anterior.
31. Cierto banco ofreció en un mes una tasa de interés del 13% anual. Ese mismo mes la tasa de inflación fue del 0.7%. Calcule la tasa de interés real mensual.
32. Sandra invirtió en CETES a un plazo de 91 días a una tasa de rendimiento del 38.50%. Si la tasa de inflación en ese plazo fue del 7%, calcule la tasa real en el plazo de 91 días.
33. La tasa de rendimiento de los CETES a 28 días es de 17.25%. Si la tasa de inflación es del 1.63% mensual, obtenga la tasa real de interés.
34. Se efectúa un préstamo de US $ 80,000, a 6 años de plazo. Hallar la tasa de interés nominal capitalizable cada año que debe cobrarse para que el dinero produzca un beneficio real del 10% capitalizable anualmente, si se prevee que el índice de precios tendrá un aumento anual del 6.5%.
35. Utilice la siguiente información y obtenga el rendimiento real que obtuvo en 1991 una persona que haya invertido en la Bolsa de Valores.

IPC*		Tasa de inflación
Diciembre de 1990	**Diciembre de 1991**	**en 1991**
628.79	1,431.46	18.79%

36. Antonio ganaba $ 15.00 (15,000.00 viejos pesos) al mes en junio de 1981. En diciembre de 1994 su sueldo mensual era de $ 6,000.00. Diga si ha tenido un aumento real de sueldo.

Mes y Año	INPC
Junio de 1981	188.31
Diciembre de 1994	38,611.9

37. Ricardo compró en agosto de 1981 una casa en $ 6,000.00 ($ 6'000,000.00 de viejos pesos). En diciembre de 1993 la vendió en $ 340,000.00 (340'000,000.00 de viejos pesos). Diga si Ricardo obtuvo una ganancia real, obteniendo la tasa de interés real en el periodo.}
38. *¿Cuáles la tasa real media decrecimiento de una empresa en un periodo de 7 años, si en 1982 tuvo ventas por $ 1'200,000.00 (viejos pesos) y en 1988 fueron de $ 48'300,000.00 (viejos pesos)? En el periodo hubo una inflación acumulada de 3,000%.
39. Un hombre desea guardar cierta cantidad de dinero hoy para la educación universitaria de su hija. Planea invertir el dinero en una inversión bancaria de modo que, en el momento en que su hija cumpla 18 años, el monto posea un valor adquisitivo de $ 70,000 de hoy. La tasa de inflación estimada es del 19% anual. Si el banco paga 24% capitalizable cada mes. ¿Qué cantidad única deberá depositar en la cuenta hoy, si la niña cumple 5 años de edad?

* *Indice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores.*