Unidad 3

- SUCESIONES Y SERIES

INTRODUCCION

Una sucesión es un conjunto ordenado de números formados de acuerdo con una ley. Cada número se llama término de la sucesión. Por ejemplo, el conjunto 1, 6, 11, 16, 21, 26 es una sucesión cuya ley es que cada término después del primero se obtiene sumando 5 al término anterior. El conjunto 5, 10, 20,40 es una sucesión cuya ley es que cada término, después del primero, se obtiene multiplicando por 2 el término anterior.

Se dice que una sucesión es finita si hay un primero y un último términos. Las sucesiones mostradas en el párrafo anterior son finitas. Si el conjunto de números que forman una sucesión no tiene un primero o un último término, entonces se dice que la sucesión es infinita. Por ejemplo, 3, 5, 7, 9, ... es una sucesión infinita. Los puntos suspensivos indican que no hay último término.

Si representamos con al al primer término de una sucesión, con a2 al segundo término, con a3 al tercer término, etc., entonces podemos denotar una sucesión finita como:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$$

El término a n se llama n-ésimo término o término general.

Una sucesión infinita se denota como:

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, \ldots$

A menudo las sucesiones se designan mediante una fórmula que da el valor de a_n para cualquier entero *n*. Así, la fórmula $a_n = 3n + 2$ define la sucesión cuyos primeros 7 términos son:

$a_1 = 3(1)+2 = 5$

$a_2 = 3(2) + 2 = 8$

$a_3 = 3(3)+2 = 11$

$a_4 = 3(4) + 2 = 14$

$a_5 = 3(5)+2 = 17$

$a_6 = 3(6) + 2 = 20$

$a_7 = 3(7) + 2 = 23$

Podemos escribir la sucesión como: 5, 8, 11, 14,17, 20, 23.

EJEMPLO 3.1

Encuentre los primeros 5 términos de las sucesiones definidas a través de las siguientes ecuaciones:

a) $a_n = \frac{n+1}{n}$

b) $a_n = a_{n-1} + 2,$

en donde:

$a_1 = 10$

SOLUCION

a)

$$a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$a_2 = \frac{2+1}{2} = 3/2$$

$$a_3 = \frac{3+1}{3} = 4/3$$

$$a_4 = \frac{4+1}{4} = 5/4$$

$$a_5 = \frac{5+1}{5} = 6/5$$

La sucesión es: 2, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5

b)

$a_1 = 10$

$a_2 = a_{2-1} + 2 = a_1 + 2 = 10 + 2 = 12$

$a_3 = a_{3-1} + 2 = a_2 + 2 = 12 + 2 = 14$

$a_4 = a_{4-1} + 2 = a_3 + 2 = 14 + 2 = 16$

$a_5 = a_{5-1} + 2 = a_4 + 2 = 16 + 2 = 18$

La sucesión es: 10, 12, 14, 16, 18

El ejemplo anterior muestra que existen dos formas de especificar las sucesiones:

1. El término a " se expresa por medio de *n*.
2. Se dan uno o varios términos, y el término a " se expresa por medio de los términos precedentes.

La suma, indicada o no, de los términos de una sucesión recibe el nombre de serie. La serie puede ser finita o infinita, según que la sucesión sea finita o infinita, respectivamente. Por ejemplo, la sucesión a_1, a_2, a_3, ..., a_n forma la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

EJEMPLO 3.2

Forme una serie con los primeros 4 términos de la sucesión $a_n = (-1)_n\, 5^n$.

SOLUCIÓN

$a_1 = (-1)^1\, 5^1 = -5$

$a_2 = (-1)^2\, 5^2 = 25$

$a_3 = (-1)^3\, 5^3 = -125$

$a_4 = (-1)^4\, 5^4 = 625$

La serie es: $(-5) + (25) + (-125) + (625) = -5 + 25 - 125 + 625$

Ejercicios 3.1

Encuentre los primeros 4 términos de las sucesiones dadas:

1. $a_n = 3n$
2. $a_n = n + 8$
3. $a_n = n^2 / (n + 1)$
4. $a_n = \log (n^2 + 1)$
5. $a_n = (-1)^n + 3$
6. $a_n = a_{n-1} - 2$, con $a_1 = 5$
7. $a_n = 3a_{n-1}$, con $a_4 = 1$

Forme una serie con los primeros 5 términos de cada una de las siguientes ecuaciones:

8. $a_n = 1/n$
9. $a_n = 1/ 2^n$
10. $a_n = a_{n-1}/ n$, con $a_1 = -5$

11. $a_n = a_{n-1} + 2.5$, con $a_1 = 0$

12. Escriba el 10o. término de la sucesión del ejercicio 1

13. Escriba el 15o. término de la sucesión del ejercicio 2

14. escriba el 50o. término de la sucesión del ejercicio 5

SUCESIONES ARITMÉTICAS

Una sucesión aritmética, llamada también progresión aritmética, es una sucesión en la cual cada término, después del primero, se obtiene sumándole al término anterior una cantidad constante llamada diferencia común. Por ejemplo, la sucesión 1, 6, 11, 16, 21, 26 es una sucesión aritmética cuya diferencia común es 5; ya que 1 + 5 = 6; 6 + 5 = 11; 11 + 5 = 16; 16 + 5 = 21; 21 + 5 = 26. La sucesión 20,15, 10, 5, 0, -5, -10 es una progresión aritmética con diferencia común de –5.

En toda progresión aritmética la diferencia común se encuentra restándole a un término cualquiera el término anterior.

Sea al, a2, a3, ..., a n una sucesión aritmética finita y sea d su diferencia común. Por definición, es posible escribir:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

El término general o término n-ésimo se obtuvo al observar que el coeficiente de d en cada término es uno menos que el correspondiente número de orden del término. Por tanto, el n-ésimo término de una progresión aritmética se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad (3.1)$$

EJEMPLO 3.3

Encuentre el 20o. término de la progresión aritmética 2, 9,16,

SOLUCIÓN

$$a_1 = 2$$

$$d = 16 - 9 = 9 - 2 = 7$$

$$n = 20$$

Mediante la ecuación (3.1) se tiene:

$a_{20} = 2 + (20–1)7 = 135$

EJEMPLO 3.4

El 15o. término de una sucesión aritmética es 49 y su diferencia común es 3.

Encuentre el lo. término.

SOLUCIÓN

$$a_{15} = 49$$

$$n = 15$$

$$d = 3$$

Al despejar a_1 de (3.1) se obtiene:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$

$$a_1 = a_{15} - (15 - 1)d$$

$$a_1 = 49 - (14)(3)$$

$$a_1 = 7$$

EJEMPLO 3.5

El primer término de una sucesión aritmética es 0 y el 20o. término es 190. Encuentre la diferencia común.

SOLUCIÓN

Se despeja d de la ecuación (3.1):

$$a_n - a_1 = (n - 1)d$$

Por tanto:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

$$d = \frac{190 - 0}{20 - 1}$$

$$d = 10$$

EJEMPLO 3.6

¿Cuántos términos tiene la sucesión aritmética –7, –3,. .., 29?

SOLUCIÓN

Se despejan de la ecuación (3.1):

$$a_n - a_1 = (n - 1)d$$

$$n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d}$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

Al sustituir los datos se obtiene: n=29-(-7)+1

$$n = \frac{29 - (-7)}{4} + 1$$

$$n = 36/4 + 1 = 10 \text{ términos}$$

EJEMPLO 3.7

El primer término de una progresión aritmética es –4 y el octavo término es 17. Encuentre el 1000. término de la progresión.

SOLUCIÓN

En primer lugar se calcula la diferencia común:

$$d = \frac{17 - (-4)}{8 - 1} = 3$$

En seguida se calcula aloo:

$$a_{100} = -4 + (99)(3) = 293$$

La suma de los términos de una sucesión aritmética recibe el nombre de serie aritmética. A continuación se procede a deducir una fórmula para encontrar la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética.

Sea a_1, a_2 a_3, ..., a_n una sucesión aritmética cuya diferencia común es d; y sea $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

Como:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

Entonces:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots\ldots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d]$$

Pero:

$$a_1 + (n-1)d = a_n$$

$$a_1 + (n-2)d = a_n - d$$

$$a_1 + (n-3)d = a_n - 2d$$

Portanto:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots\ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \qquad (3.2)$$

Escribiendo los términos del segundo miembro de (3.2) en orden inverso se tiene:

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 3d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \qquad (3.3)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (3.2) y (3.3):

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots\ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Es decir:

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

En donde n es el número total de binomios en la suma. Al despejar S_n se obtiene la fórmula general para calcular la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad (3.4)$$

EJEMPLO 3.8

Encuentre la suma de los primeros 30 términos de la sucesión aritmética 2, 9, 16,. . .

SOLUCIÓN

En primer lugar se calcula el valor del 30o. término de la sucesión:

$$a_{30} = 2 + (29)(7) = 205$$

La suma de los 30 términos se obtiene mediánte (3.4):

$$S_{30} = \frac{30}{2}(2 + 205)$$

$$S_{30} = 3{,}105$$

EJEMPLO 3.9

Encuentre la suma de todos los números pares del 100 al 500, inclusive.

SOLUCIÓN

La sucesión aritmética es 100, 102,104,106,108, . . . 500,

La sucesión tiene una diferencia común igual a 2.

El número de términos de la sucesión es:

$$n = \frac{500 - 100}{2} + 1 = 201$$

Por tanto:

$$S_{201} = \frac{201}{2}(100 + 500)$$

$$S_{201} = 60{,}300$$

Ejercicios 3.2

1. Encuentre el 12o. término de una sucesión aritmética con $a_1 = 10$ y $d = 3/5$.
2. Encuentre el 37o. término de la sucesión aritmética –1/3, 1/3,1, 5/3, ...
3. Encuentre el 73o. término de la progresión 0.20, 0.25, 0.30, ...
4. En sexto término de una progresión aritmética es -8 y su diferencia común es -8. Encuentre el primer término.
5. Si $a_{11} = 44$ y $d = -3/5$, encuentre al.
6. Encuentre el 150o. término de una progresión aritmética cuyo primer término es 8 y el séptimo es -1.
7. El primer término de una sucesión aritmética es 0 y el 13o. término es 90. Encuentre la diferencia común.
8. *El tercer término de una progresión aritmética es 16 y el quinto es 0. Encuentre el primer término y la diferencia común.
9. ¿Cuántos términos tiene cada una de las siguientes progresiones?

   a) $2, 8, 14, \ldots, 350$

   b) $8/3, 4\ \frac{1}{15}, \ldots, 36\ \frac{4}{15}$

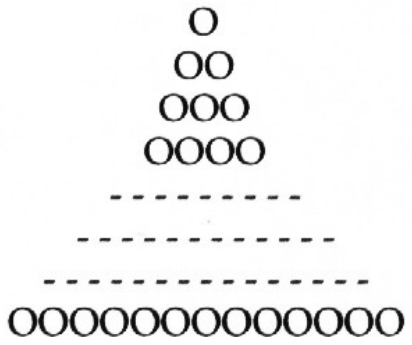
10. Encuentre la suma de la progresión del ejercicio anterior, inciso b.
11. Encuentre la suma de todos los números impares del 100 al 1,000.
12. Un estudiante ahorra para dar el enganche de una motocicleta. La primera semana guarda $ 50.00; la segunda, $ 60.00; la tercera, $ 70.00, y así sucesivamente, por 40 semanas. ¿Cuánto dinero tendrá al final de las 40 semanas?
13. Al final de su primer mes de trabajo, Jaime ahorra $ 100.00. A partir de entonces guarda cada mes $ 15.00 más que el mes anterior. ¿Cuánto habrá ahorrado al término de un año? ¿Cuándo sus ahorros serán mayores de $ 3,700.00?
14. El quinto término de una progresión aritmética es 2 y el noveno es -10. Calcule la suma de los primeros 15 términos.
15. Si usted ganaba $ 3,100.00 mensuales hace 10 meses y ahora gana $ 4,180.00 mensuales, y si su salario ha aumentado la misma cantidad cada mes, ¿cuál ha sido su aumento mensual y qué cantidad total ha recibido de su empresa en los 10 meses?
16. Un supermercado pone en oferta cierta marca de refresco: $ 1.00 por la primera botella de medio litro; $ 0.94 por la segunda botella; $ 0.88 por la tercera, y así sucesivamente hasta llegar a un máximo de 12 botellas. ¿Cuál será el costo de 9 refrescos?

17. Una reacción química se lleva a cabo en 60 minutos a 21°C, pero tarda 30 segundos menos con cada incremento de un grado en la temperatura. ¿Cuánto tardará la reacción en llevarse a cabo a 70°C?

18. Un grupo de alumnos de la carrera de Ingeniería Química efectúan una rifa con el fin de obtener fondos para su graduación, de la siguiente forma: se hacen 100 boletos numerados del 00 al 99 y cada uno de ellos se mete en un sobre y se cierra. La persona que desee comprar un boleto escoge un sobre, y el número impreso en el boleto corresponde a la cantidad de dinero que tendrá que pagar, en pesos. Por ejemplo, si al abrir el sobre el boleto marca el número 35, se tendrá que pagar $ 35.00 por él. ¿Cuánto dinero se obtendrá al vender todos los boletos?

19. Un ingeniero es requerido por dos compañías. La compañía X le ofrece un sueldo inicial de $ 12,400.00 al mes y aumentos mensuales de $ 290.00 durante un año. La compañía Y le ofrece un sueldo inicial de $13,500.00 al mes y aumentos mensuales de $ 150.00 durante un año. Desde el punto de vista monetario, ¿cuál compañía le conviene más?

20. En una fábrica hay un montón de tubos de acero acomodados en forma triangular, tal como se muestra en la figura. Si en la hilera inferior hay 35 tubos, ¿cuántos tubos hay en total?



SUCESIONES GEOMETRICAS

Una sucesión geométrica, llamada también progresión geométrica, es una sucesión en la cual cada término, después del primero, se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad constante llamada razón común. Por ejemplo, la sucesión 1, 4, 16, 64, 256 es una progresión geométrica cuya razón comunes 4, ya que: 1x4 = 4; 4 x 4 = 16; 16 x 4 = 64 y 64 x 4 = 256.

En toda progresión geométrica la razón común se encuentra dividiendo un término cualquiera entre el término anterior.

Sea a_1, a_2, a_3, . . ., a_n una sucesión geométrica finita y sea r su razón común. Según la definición de sucesión geométrica:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_3 = a_2 r = (a_1 r) r = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_3 r = (a_1 r^2) r = a_1 r^3$$

- - - - - - - - - - - - - - -
- - - - - - - - - - - - - - -
- - - - - - - - - - - - - - -

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

El término n-ésimo se obtuvo al observar que el exponente de r en cada término es uno menos que el correspondiente número de orden del término. Por tanto, el n-ésimo término se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad (3.5)$$

EJEMPLO 3.10

Encuentre el 15o. término de la sucesión geométrica 3, 6, 12, ...

SOLUCION

$$a_1 = 3$$

$$n = 15$$

$$r = 6/3 = 2$$

Mediante la ecuación (3.5) se tiene:

$$a_{15} = (3)(2^{15-1}) = (3)(2^{14})$$

La expresión anterior se puede calcular usando logaritmos: log a15 = log 3 + 14 log 2

$$\log a_{15} = \log 3 + 14 \log 2$$

$$\log a_{15} = 0.4771212547 + (14)(0.3010299957)$$

$$\log a_{15} = 4.691541194$$

$$a_{15} = 49{,}152$$

Otra forma de llevar a cabo el cálculo anterior es mediante el uso de una calculadora.

EJEMPLO 3.11

Encuentre el número de términos que hay en la sucesión 4,8/3,16/9, . . . 256/729.

SOLUCION

Se despeja n de la ecuación (3.5):

$$\log a_n = \log a_1 + (n-1)\log r$$

$$\log a_n - \log a_1 = (n-1)\log r$$

$$(n-1) = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r}$$

Por tanto:

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

Los datos a sustituir en la ecuación anterior son:

$$a_n = 256/729$$

$$a_1 = 4$$

$$r = 8/3 \div 4 = 2/3$$

Sustituyendo los datos anteriores en la fórmula se tiene:

$$n = \frac{\log 256/729 - \log 4}{\log 2/3} + 1 = \frac{-0.454487563006 - 0.602059991328}{-0.176091259055} + 1$$

$$n = 7 \text{ términos}$$

La suma de los términos de una progresión geométrica recibe el nombre de serie geométrica. Ahora se procederá a deducir una fórmula para obtener la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica finita.

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ una sucesión geométrica cuya razón común es r; y sea:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Es decir:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \qquad (3.6)$$

Multiplicando por r ambos lados de la igualdad anterior:

$$r S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \ldots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \qquad (3.7)$$

Restando la ecuación (3.7) de la (3.6) se obtiene:

$$S_n - r S_n = a_1 - a_1 r^n$$

Factorizando:

$$S_n (1 - r) = a_1(1 - r^n)$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por –1 y despejando S_n se obtiene:

$$S_n = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1} \qquad (3.8)$$

EJEMPLO 3.12

Encuentre la suma de los doce primeros términos de la sucesión geométrica 5, 10, 20, ...

SOLUCION

$$a_1 = 5$$

$$r = 2$$

$$n = 12$$

Sustituyendo los datos en la ecuación (3.8) se tiene: 5(212-1) 5(4096-1)

$$S_{12} = \frac{5 (2^{12} - 1)}{2 - 1} = \frac{5 (4096 - 1)}{1}$$

$$S_{12} = 20{,}475$$

EJEMPLO 3.13

Encuentre el valor del primer término de una progresión geométrica cuya suma de los siete primeros términos es 8236/243 y cuya razón común es 2/3.

SOLUCION

Se despeja al de (3.8) y se obtiene:

$$a_1 = \frac{S_n (r - 1)}{r^n - 1}$$

Al sustituir los datos se obtiene:

$$a_1 = \frac{(8236/243) (2/3 - 1)}{(2/3)^7 - 1} = \frac{(8236/243) (-1/3)}{(128/2187) - 1}$$

$$a_1 = 12$$

Ejercicios 3.3

1. Encuentre el 66o. término de la sucesión geométrica 10, 9, 8.1, ...
2. Encuentre el 105o. término de la progresión –1/32, 1/16, – 1/8, 1 /4, ...
3. ¿Cuántos términos hay en la siguiente sucesión: 5, 0.5, . . . 5×10^{-11}?
4. La siguiente sucesión geométrica consta de 16 términos. Calcule la razón común. 1, ..., 14348905.
5. El 10o. término y la razón común de una sucesión geométrica son 1536 y 2, respectivamente. Encuentre el primer término.
6. Obtenga la suma de los primeros 16 términos de la progresión del ejercicio número 4.
7. Encuentre la suma de los primeros 7 términos de la siguiente progresión geométrica: 1/8,... , 8.
8. El cuarto término de una sucesión geométrica es 4 y el séptimo término es 32. Calcule S_{10}.
9. Si usted coloca $1.00 en el primer cuadro de un tablero de ajedrez, $ 2.00 en el segundo cuadro, $ 4.00 en el tercero, $ 8.00 en el cuarto y así sucesivamente, doblando cada vez la cantidad hasta cubrir los 64 cuadros, ¿cuánto dinero tendrá que colocar en todo el tablero? (Véase el tema especial "Leyenda sobre el tablero del ajedrez").
10. La velocidad de una reacción química se duplica aproximadamente cada vez que la temperatura aumenta en 10°C. ¿Cuántas veces más rápido se llevará a cabo una reacción si la temperatura se eleva de 0°C a 90°C?
11. La población de cierta ciudad era de 3 millones en 1980. Si la población aumenta 3.5% cada año,
    a) ¿Cuál será el tamaño de la población en el año 2000?
    b) ¿En qué año se triplicará la población?
12. El precio de una cámara fotográfica aumentó un cierto porcentaje el día primero de cada mes, durante todo 1996. El primero de enero la cámara costaba $ 97.50 y el primero de diciembre costaba $ 196.94. Calcule el porcentaje de incremento mensual.
13. La población mundial se duplica cada 35 años aproximadamente. Si la población mundial en 1978 era de 4,000 millones de personas, ¿cuántos años pasarán para que el número de habitantes sea de 10,000 millones?
14. La población de una ciudad aumenta de 230,000 a 295,000 habitantes en 5 años. ¿Cuál es el porcentaje fijo de aumento, si se supone que el incremento es igual cada año?
15. Al construir un edificio se estima que el costo de cada piso es 1.42 veces el costo del piso anterior. Si la planta baja de un edificio destinado a oficinas se estima en $ 96,000.00, ¿cuál será el costo total del edificio, el cual tendrá 4 pisos?

TEMA ESPECIAL

LEYENDA SOBRE EL TABLERO DE AJEDREZ

El ajedrez es un juego antiquísimo. Cuenta muchos siglos de existencia y por eso no es de extrañar que estén ligadas a él leyendas cuya veracidad es difícil de comprobar debido a su antigüedad. Precisamente quiero contar una de éstas. Para comprenderla no hace falta saber jugar al ajedrez; basta simplemente saber que el tablero donde se juega está dividido en 64 escaques (casillas negras y blancas, dispuestas alternativamente).

El juego del ajedrez fue inventado en la India. Cuando el rey hindú Sheram lo conoció, quedó maravillado de lo ingenioso que era y de la variedad de posiciones que en él son posibles. Al enterarse de que el inventor era uno de sus súbditos, el rey lo mandó llamar con objeto de recompensarle personalmente por su acertado invento.

El inventor, llamado Seta, se presentó ante el soberano. Era un sabio vestido con modestia, que vivía gracias a los medios que le proporcionaban sus discípulos.

- Seta, quiero recompensarte dignamente por el ingenioso juego que has inventado -dijo el rey.

El sabio contestó con una inclinación.

- Soy bastante rico como para poder cumplir tu deseo más elevado -continuó diciendo el rey-. Di la recompensa que te satisfaga y la recibirás.

Seta continuó callado.

- No seas tímido -le animó el rey-. Expresa tu deseo. No escatimaré nada para satisfacerlo.
- Grande es tu magnanimidad, soberano. Pero concédeme un corto plazo para meditarla respuesta. Mañana, tras maduras reflexiones, te comunicaré mi petición.

Cuando al día siguiente Seta se presentó de nuevo ante el trono, dejó maravillado al rey con su petición, sin precedente por su modestia.

- Soberano -dijo Seta-, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero del ajedrez.
- ¿Un simple grano de trigo? -contestó admirado el rey.
- Sí, soberano. Por la segunda casilla, ordena queme den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta, 16; por la sexta, 32...
- Basta -le interrumpió irritado el rey-. Recibirás el trigo correspondiente a las 64 casillas del tablero de acuerdo con tu deseo: por cada casilla doble cantidad que por la precedente. Pero has de saber que tu petición es indigna de mi generosidad. Al pedirme tan mísera recompensa, menosprecias, irreverente, mi benevolencia. En verdad que, como sabio

que eres, deberías haber dado mayor prueba de respeto ante la bondad de tu soberano. Retírate. Mis servidores te sacarán un saco con el trigo que solicitas.

Seta sonrió, abandonó la sala y quedó esperando a la puerta del palacio.

Durante la comida, el rey se acordó del inventor del ajedrez y envió para que se enteraran de si habían entregado ya al irreflexivo Seta su mezquina recompensa.

- Soberano, tu orden se está cumpliendo -fue la respuesta-. Los matemáticos de la corte calculan el número de granos que le corresponde.

El rey frunció el ceño. No estaba acostumbrado a que tardaran tanto en cumplir sus órdenes.

Por la noche, al retirarse a descansar, el rey preguntó de nuevo cuánto tiempo hacía que Seta había abandonado el palacio con su saco de trigo.

- Soberano -le contestaron-, tus matemáticos trabajan sin descanso y esperan terminar los cálculos al amanecer.
- ¿Porqué va tan despacio este asunto? -gritó iracundo el rey-. Que mañana, antes de que me despierte, hayan entregado a Seta hasta el último grano de trigo. No acostumbro a dar dos veces una misma orden.

Por la mañana comunicaron al rey que el matemático mayor de la corte solicitaba audiencia para presentarle un informe muy importante.

El rey mandó que le hicieran entrar.

- Antes de comenzar tu informe -le dijo Sheram-, quiero saber si se ha entregado por fin a Seta la mísera recompensa que ha solicitado.
- Precisamente para eso me he atrevido a presentarme tan temprano -contestó el anciano-. Hemos calculado escrupulosamente la cantidad total de granos que desea recibir Seta. Resulta una cifra tan enorme ...
- Sea cual fuere su magnitud -le interrumpió con altivez el rey- mis graneros no empobrecerán. He prometido darle esa recompensa y, por lo tanto, hay que entregársela.
- Soberano, no depende de tu voluntad el cumplir semejante deseo. En todos tus graneros no existe la cantidad de trigo que exige Seta. Tampoco existe en los graneros de todo el reino. Hasta los graneros del mundo entero son insuficientes. Si deseas entregar sin falta la recompensa prometida, ordena que todos los reinos de la Tierra se conviertan en labrantíos, manda desecar los mares y océanos, ordena fundir el hielo y la nieve que cubren los lejanos desiertos del Norte. Que todo el espacio sea totalmente sembrado de trigo, y ordena que toda la cosecha obtenida en estos campos sea entregada a Seta. Sólo entonces recibirá su recompensa.

El rey escuchaba lleno de asombro las palabras del anciano sabio.

- Dime, cuál es esa cifra tan monstruosa -dijo reflexionando.
- ¡Oh, soberano! Dieciocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince:

18 446 744 073 709 551 615

Esta es la leyenda. No podemos asegurar que haya sucedido en realidad lo que hemos contado; sin embargo, la recompensa de que habla la leyenda debe expresarse por ese número; de ello pueden convencerse, haciendo ustedes mismos el cálculo. Si se comienza por la unidad, hay que sumar las siguientes cifras: 1, 2, 4, 8, etc. El resultado obtenido tras 63 duplicaciones sucesivas nos mostrará la cantidad correspondiente a la casilla 64, que deberá recibir el inventor.

Para hacernos una idea de la inmensidad de esta cifra gigante, calculemos aproximadamente la magnitud que debería tener el granero capaz de almacenar semejante cantidad de trigo. Es sabido que un metro cúbico de trigo contiene cerca de 15 millones de granos. En ese caso, la recompensa del inventor del ajedrez debería ocupar un volumen aproximado de 12 000 000 000 000 m3, o lo que es lo mismo, 12,000 km3. Si el granero tuviera 4 m de alto y 10 m de ancho, su longitud debería de ser de 300 000 000 de km, o sea, el doble de la distancia que separa la Tierra del Sol.

El rey hindú, naturalmente, no podía entregar semejante recompensa. Sin embargo, de haber estado fuerte en matemáticas, hubiera podido librarse de esta deuda tan gravosa. Para ello le habría bastado simplemente proponer a Seta que él mismo contara, grano a grano, el trigo que le correspondía.

Efectivamente, si Seta, puesto a contar, hubiera trabajado noche y día, contando un grano por segundo, en el primer día habría contado 86,400 granos. Para contar un millón de granos habría necesitado, como mínimo, 10 días de continuo trabajo. Un metro cúbico de trigo lo habría contado aproximadamente en medio año. Por consiguiente, aunque Seta hubiera consagrado el resto de su vida a contar los granos de trigo que le correspondían, habría recibido sólo una parte ínfima de la recompensa exigida.

**Tomado del libro Matemáticas recreativas de Y. Perelman, Ed. Mir, Moscú, 1982..*