

Unidad 4

- VARIACION PROPORCIONAL

4.1 INTRODUCCION

La relación existente entre dos o más cantidades físicas a menudo se puede expresar mediante una ecuación. Por ejemplo, la longitud C de una circunferencia está relacionada con el radio de la misma mediante la ecuación $C = 2 \pi r$. Como la longitud de la circunferencia depende, en este caso, del valor asignado al radio, la longitud recibe el nombre de variable dependiente, mientras que al radio se le llama variable independiente.

A una relación como la anterior se le conoce con el nombre de relación funcional o simplemente función.

Se tiene una función cuando a cada valor de la(s) variable(s) independiente(s) se corresponde uno y sólo un valor de la variable dependiente.

Otro ejemplo de función lo tenemos en la fórmula para calcular el área de un triángulo:

$$A = b h/2$$

en donde A es el área del triángulo; b es la base del triángulo y h es la altura. En este caso, b y h son las variables independientes, mientras que A es la variable dependiente.

Existe un número infinito de funciones, tanto en matemática pura como aplicada. En este capítulo se estudiará un tipo especial de funciones: la variación proporcional.

VARIACIÓN PROPORCIONAL DIRECTA E INVERSA

Dos variables X e Y son proporcionales cuando multiplicando una de ellas por una constante, la otra queda multiplicada o dividida por la misma constante. La proporcionalidad entre las variables puede ser directa o inversa.

Variación Directamente Proporcional

Se dice que la variable Y es directamente proporcional a la variable X si:

$$Y = k X \tag{4.1}$$

en donde K es una constante, llamada constante de proporcionalidad directa.

Por ejemplo, la fórmula $C = 2 \pi r$ indica que la longitud de una circunferencia es

directamente proporcional al radio de la misma, donde 2π es la constante de proporcionalidad.

De la ecuación (4.1) se obtiene:

$$k = Y/X$$

Si c representa a una constante cualquiera, entonces:

$$k = Y_c/X_c$$

La interpretación de la ecuación anterior es que al multiplicar (o dividir) una de las variables por una constante c , la otra variable queda también multiplicada (o dividida) por la constante c ; es decir, si se incrementa una de las variables en cierta proporción, la otra también se incrementa en la misma proporción; o bien, al decrecer una de las variables en cierta proporción, la otra también decrece en la misma proporción.

Lo mencionado en el párrafo anterior puede verificarse en la fórmula para calcular la longitud de una circunferencia. Si el radio de una circunferencia es de 10 cm, entonces la longitud de la circunferencia será $C = 2\pi(10) = 62.832$ cm. Pero si el radio se triplica; esto es, $r = 30$ cm, la longitud de la circunferencia también se triplicará: $C = 2\pi(30) = 188.496 = (3)(62.832)$.

EJEMPLO 4.1

Si Y es directamente proporcional a X , y $Y = 8$ cuando $X = 4$, encontrar Y cuando $X = 7$.

SOLUCION

De acuerdo a la definición de variación directa, se tiene que $Y = kX$. Al sustituir los valores numéricos $X = 4$ y $Y = 8$, es posible calcular el valor de la constante de proporcionalidad:

$$8 = (k)(4)$$

Es decir:

$$K = 8/4 = 2$$

Por tanto, como ya se conoce la constante de proporcionalidad, la ecuación se convierte en:

$$Y = 2X$$

Como el nuevo valor de X es 7, entonces el nuevo valor de Y será:

$$Y = (2)(7)$$

$$Y = 14$$

EJEMPLO 4.2

Si z varía en forma directa a $(x - w)$, y $z = 2$ cuando $x = 7$ y $w = 4$, calcule x cuando $w = 3$ y $z = 9$.

SOLUCION

Por definición se tiene que $z = k(x - w)$. Despejando k y sustituyendo los valores numéricos iniciales de z , x y w , se tiene:

$$k = \frac{z}{x - w} = \frac{2}{7 - 4} = \frac{2}{3}$$

Por tanto:

$$z = \frac{2}{3}(x - w)$$

Si los nuevos valores de w y z son 3 y 9, respectivamente, entonces el nuevo valor de x será:

$$9 = \frac{2}{3}(x - 3)$$

$$27 = 2x - 6$$

$$27 + 6 = 2x$$

$$x = \frac{33}{2}$$

EJEMPLO 4.3

La distancia que un objeto recorre al caer, a partir del reposo, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido. Si un objeto cae 78.48 metros en 4 segundos, ¿cuánto habrá caído al final de 6 segundos?

SOLUCIÓN

Sea S la distancia recorrida y t el tiempo transcurrido. De acuerdo al enunciado dado, es posible formar la siguiente ecuación:

$$S = k t^2$$

Despejando k y sustituyendo los valores numéricos iniciales de S y t , se tiene:

$$k = S / t^2$$

$$k = 78.48\text{m} / 16 \text{ s}^2$$

$$k = 4.905 \text{ m} / \text{ s}^2$$

Por tanto:

$$S = 4.905 t^2$$

Como $t = 6$ segundos, entonces:

$$S = (4.905 \text{ m/s}^2)(36 \text{ s}^2)$$

$$S = 176.58 \text{ metros}$$

EJEMPLO 4.4

Si 4 relojes de pulsera cuestan \$ 438.00, ¿cuánto costarán 13 relojes iguales a los anteriores?

SOLUCIÓN

Como a más relojes, más pesos a pagar, estas cantidades están relacionadas de manera directamente proporcional.

Sea R la cantidad de relojes y D la cantidad de dinero en pesos. Por tanto:

$$D = k R$$

Despejando k y sustituyendo valores iniciales:

$$k = D/R = \$ 438/4 \text{ relojes} = 109.5 \text{ pesos/reloj}$$

Si $R = 13$ relojes, entonces:

$$D = (109.5 \text{ pesos/reloj})(13 \text{ relojes}) = \$ 1,423.50$$

EJEMPLO 4.5

Tres personas ejecutaron un trabajo por el cual cobraron \$ 5,730.00. ¿Cuánto le corresponde a cada uno, tomando en cuenta que una de las personas. trabajó 12 días; otra, 18 días y la tercera, 15 días?

SOLUCIÓN

1o. Método

Como a más días trabajados corresponde más dinero, estas cantidades son directamente proporcionales entre sí; por tanto, es posible escribir la ecuación $D = k d$, en donde D representa al dinero ganado y d a los días trabajados.

Entre los 3 trabajadores se laboraron 45 días en total, por lo cual cobraron \$5,730.00.

Por tanto:

$$k = D/d = \$ 5,730/45 \text{ días} = 127.333333333 \text{ pesos/día}$$

Una vez conocida la constante de proporcionalidad, se obtiene la cantidad que recibirá cada trabajador:

Para el primer trabajador se tiene:

$$D = (127.333333333 \text{ pesos/día})(12 \text{ días}) = \$1,528$$

Para el segundo trabajador:

$$D = (127.333333333 \text{ pesos/día})(18 \text{ días}) = \$ 2,292$$

Para el tercer trabajador:

$$D = (123.333333333)(15 \text{ días}) = \$ 1,910$$

2o. Método

Sea:

x = cantidad de dinero que debe recibir la persona que trabajó 12 días.

y = cantidad de dinero que debe recibir la persona que trabajó 18 días.

z = cantidad de dinero que debe recibir la persona que trabajó 15 días.

$$x + y + z = 5,730 \tag{1}$$

Como la cantidad de dinero que le toca a cada uno de los trabajadores es directamente proporcional a los días trabajados, es posible formar las siguientes ecuaciones:

$$x = (k)(12) = 12 k \tag{2}$$

$$y = (k)(18) = 18 k \tag{3}$$

$$z = (k)(15) = 15 k \tag{4}$$

Con las ecuaciones (1), (2),(3) y (4) se tiene un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Una forma de resolver este sistema sería la siguiente: se sustituyen las ecuaciones (2), (3) y (4) en la ecuación (1):

$$12 k + 18 k + 15 k = 5,730$$

Esto es:

$$45k = 5,730$$

Por tanto:

$$k = 127.333333333$$

De (2):

$$x = (12)(127.333333333) = \$1,528$$

De (3):

$$y = (18)(123.333333333) = \$ 2,292$$

De (4):

$$z = (15)(123.333333333) = \$ 1,910$$

EJEMPLO 4.6

Una sociedad se forma cuando dos o más personas comparten la propiedad de un negocio. La aportación de cada socio al negocio consiste en dinero y/o trabajo, y las utilidades netas (o las pérdidas netas) del negocio son compartidas por cada uno de los socios.

Existen varios métodos para dividir las utilidades netas (o las pérdidas netas) de un negocio, siendo el método de partes iguales el más sencillo. Este método consiste en que los socios convienen en dividir las utilidades o las pérdidas por igual.

Otro método es el de los porcentajes fijos. En este método los socios acuerdan recibir cada uno un porcentaje fijo de las utilidades o de las pérdidas. Por ejemplo, 3 socios acuerdan repartir las utilidades de la siguiente forma: 30% al primer socio; 38% al segundo y 32% al tercero.

Sin embargo, el método más utilizado es el del reparto proporcional. El reparto puede ser directo, inverso o mixto.

Hugo, Paco y Luis se asocian para iniciar un negocio. Hugo invierte \$3,876.00; Paco invierte \$ 4,578.00 y Luis invierte \$ 2,955.00. Asimismo, quedan de acuerdo en que las utilidades (o las pérdidas) serán repartidas en forma directamente proporcional al capital invertido. ¿Cuánto recibe cada uno si la utilidad generada en el primer año de trabajo fue de \$ 80,000.00?

SOLUCIÓN

Sea:

x = cantidad de dinero que le toca a Hugo.

y = cantidad de dinero que le toca a Paco.

z = cantidad de dinero que le toca a Luis.

Por tanto:

$$x + y + z = 80,000 \quad (1)$$

$$x = 3,876 k \quad (2)$$

$$y = 4,578 k \quad (3)$$

$$z = 2,955 k \quad (4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2), (3) y (4) en la (1), se tiene:

$$3,876 k + 4,578 k + 2,955 k = 80,000$$

$$11,409 k = 80,000$$

$$k = 7.01200806381$$

Por tanto:

$$\text{Hugo recibe: } 3,876 (7.01200806381) = \$ 27,178.55$$

$$\text{Paco recibe: } 4,578 (7.01200806381) = \$ 32,100.97$$

$$\text{Luis recibe: } 2,955 (7.01200806381) = \$ 20,720.48$$

Variación inversamente Proporcional

Se dice que la variable Y es inversamente proporcional a la variable X si:

$$Y X = k \quad (4.2)$$

en donde k es una constante, llamada constante de proporcionalidad inversa. Despejando Y de la ecuación (4.2):

$$Y = k/x$$

Si c es una constante cualquiera, entonces:

$$Y c = \frac{kc}{X} = \frac{k}{\frac{X}{c}}$$

La igualdad anterior se interpreta de la siguiente forma: al multiplicar (o dividir) una de las variables por una constante c, la otra variable queda dividida (o multiplicada) por la misma constante c; es decir, si se incrementa una de las variables en cierta proporción, la otra decrece en la misma proporción, y viceversa.

EJEMPLO 4.7

Si A varía en forma inversamente proporcional a B, y $A = 20$ cuando $B = 121.5$, encuentre B cuando $A = 15$.

SOLUCIÓN

De acuerdo a la definición de variación inversa se tiene:

$$A B = k$$

Como $A = 20$ cuando $B = 121.5$, entonces:

$$k = (20)(121.5)$$

$$k = 2,430$$

Por tanto:

$$A B = 2,430$$

Como el nuevo valor de A es 15, entonces el nuevo valor de B será:

$$B = 2,430/A = 2,430/15$$

$$B = 162$$

EJEMPLO 4.8

El costo unitario de producción de una revista de aparición mensual varía en forma inversamente proporcional con la raíz cuadrada del tiraje de la revista. Si el costo unitario de producción es de \$ 6.00 cuando el tiraje es de 25,000 ejemplares, ¿cuál será el costo si el tiraje se eleva a 32,000 ejemplares?

SOLUCIÓN

Sea C el costo unitario de producción y t el tiraje. Como C varía inversamente a la raíz cuadrada de t, tenemos:

$$C \sqrt{t} = k$$

Como $C = 6$ cuando $t = 25,000$, entonces:

$$k = (6)(\sqrt{25,000})$$

$$k = 948.68328$$

Si el nuevo valor de $t = 32,000$, entonces:

$$C = k/\sqrt{t}$$

$$C = 948.68328/\sqrt{32,000}$$

$$C = \$ 5.30 \text{ el ejemplar}$$

EJEMPLO 4.9

6 hombres hacen una obra en 15 días. ¿En cuántos días podrían hacer la misma obra 10 hombres?

SOLUCIÓN

Como a más hombres trabajando en la obra, menos días se necesitan para terminarla, estas cantidades son inversamente proporcionales. Si H es el número de hombres y d es el número de días, entonces:

$$H d = k$$

Es decir:

$$k = (6)(15) = 90$$

Por tanto:

$$d = k/H$$

$$d=90/10$$

$$d = 9 \text{ días}$$

EJEMPLO 4.10

Una compañía da una gratificación de \$ 50,000.00 a tres de sus empleados en forma inversamente proporcional a sus sueldos mensuales, siendo éstos los siguientes: Agustín gana \$ 3,830.00; Arturo gana \$ 4,350.00 y Edmundo gana \$ 5,000.00. ¿Cuánto le toca a cada uno?

SOLUCIÓN

Sea:

X = cantidad de dinero que le toca a Agustín.

Y = cantidad de dinero que le toca a Arturo.

Z = cantidad de dinero que le toca a Edmundo.

de tal manera que:

$$X + Y + Z = 50,000$$

(1)

De acuerdo al enunciado, se pueden formar las siguientes ecuaciones:

$$3,830 X = k \quad (2)$$

$$4,350 Y = k \quad (3)$$

$$5,000 Z = k \quad (4)$$

Despejando X, Y y Z de las ecuaciones (2), (3) y (4) y sustituyendo en (1):

$$k/3,830 + k/4,350 + k/5,000 = 50,000$$

$$6.90981663215 \times 10^4 k = 50,000$$

$$k = 72'360,820.3542$$

Sustituyendo el valor de k en cada una de las ecuaciones (2), (3) y (4) y despejando la variable se tiene:

$$X = \$ 18,893.17$$

$$Y = \$ 16,634.67$$

$$Z = \$ 14,472.16$$

Ejercicios 4.1

1. Si u es directamente proporcional a v, y u = 144 cuando v = 15, encuentre v cuando u = 288.
2. Si y es inversamente proporcional a x, y x = 2.6 cuando y = 1.5, encuentre x cuando y = 12.
3. Y varía directamente con el cubo de X. Si X = 1 cuando Y = 16, encuentre X cuando Y = 432.
4. t es inversamente proporcional a (b - 4). Si b = 10 cuando t = 5, encuentre b cuando t = 22.
5. Se ha encontrado que el volumen de ventas mensuales promedio V de relojes marca Time de la compañía Quartz, S.A., es inversamente proporcional a la cantidad (200 + p), donde p es el precio de venta de un reloj. Si el volumen de ventas mensuales promedio es de \$ 800,000.00, cuando un reloj cuesta \$ 200.00, ¿cuál es el volumen de ventas esperado, si el precio de un reloj se incrementa en \$ 55.00?
6. Bajo ciertas condiciones de luz, el tiempo necesario para lograr una buena fotografía varía directamente con el cuadrado del número f del lente de la cámara. El número f indica la dimensión de la abertura del diafragma. En las cámaras actuales se suelen encontrar los valores de diafragma siguientes: f/1.4, f/2, f/2.8, f/4, f/5.6, f/8, f/11, f/16 y f/22. Siguiendo la escala desde f/22 hasta f/1.4, cada abertura permite el paso del doble de luz que la anterior.

Si se tiene una cámara con abertura f/11 y sol brillante, se logra una buena fotografía con un 1/125 de segundo de exposición. ¿Qué tiempo de exposición

será necesario para una abertura $f/8$, bajo las mismas condiciones de luz?

7. En ciertas condiciones, la distancia recorrida por un automóvil antes de detenerse totalmente, al aplicar bruscamente los frenos, es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.

Para evitar atropellar a una persona, el conductor de un automóvil frena bruscamente. Sin embargo, no logra detenerse y la atropella. El automovilista declara a la policía que conducía a 48 km/h (60 km/hr es el límite de velocidad). El policía mide las huellas del patinaje y resultan ser de 49 metros. El sabe que a 60 km/h, las huellas del patinaje deben medir 19 metros de longitud. ¿A qué velocidad corría realmente el automovilista antes de aplicar los frenos?

8. Cuando se agrega aluminio a un exceso de HCl (ácido clorhídrico), la cantidad de gas hidrógeno producido varía en forma directamente proporcional con la cantidad de aluminio agregada. Si 32 gramos de aluminio producen 3.6 gramos de gas hidrógeno, ¿cuánto hidrógeno puede ser producido al agregar 95 gramos de aluminio a un exceso de HCl?
9. El odómetro (medidor de distancia) de un automóvil está diseñado para funcionar con llantas de 26 pulgadas de diámetro. Si se cambian las llantas a unas de 28 pulgadas de diámetro, ¿cuántas millas en el odómetro serán equivalentes a un viaje real de 250 millas?
10. Si una vara de 2.50 m de longitud da una sombra de 6 m, ¿cuál será la altura de un árbol cuya sombra, a la misma hora, es de 53 m?
11. Si un automóvil recorre 90 km con 8 litros de gasolina, ¿qué distancia recorrerá con 30 litros?
12. Si 30 hombres arman 10 máquinas en un día, ¿cuántos hombres se necesitan para armar 25 máquinas al día?
13. Un campamento militar con 400 hombres tiene provisiones para 40 días. Si se quiere que las provisiones duren 8 días más, ¿cuántos hombres habrá que rebajar del grupo?
14. El artículo 87 de la Ley Federal del Trabajo establece que los trabajadores que laboraron el año completo tienen derecho a un aguinaldo anual equivalente a 15 días de salario. ¿Cuánto recibirá un trabajador que laboró 10 meses?
15. Un turista mexicano se dirige a un banco a cambiar sus pesos por dólares. El empleado bancario le informa que la paridad es de 7.95 pesos por cada dólar. Si el turista cambió 20,000 pesos, ¿cuántos dólares recibió?
16. Dos llaves iguales llenan una piscina con agua en 12 horas. ¿Cuánto tiempo emplearán en llenar la piscina 5 llaves iguales?
17. Por un corte de casimir de 5 m de longitud una persona pagó \$ 1,225.00. ¿Cuánto debe pagar por 8 m del mismo casimir?
18. Se recibieron \$ 10,680.00 al vender 178 boletos para una rifa. ¿Cuánto se debe recibir al vender 500 boletos?
19. Un libro tiene 758 páginas de 439.9 cm^2 cada una. Se desea reeditararlo con

páginas de 20.8 cm de ancho por 28.2 cm de largo. Sabiendo que el tipo de letra será la misma, cuántas páginas tendrá la nueva edición?

20. Ocho personas pueden construir una casa en 80 días. ¿Cuántas personas, de la misma eficiencia, se necesitan para construir esa misma casa en 60 días?
21. Una persona pinta $\frac{5}{8}$ de su casa en 2 días. ¿Cuánto tiempo necesitará para terminar de pintar la casa?
22. Los intereses que otorga un banco por \$ 4,500.00 invertidos a 3 meses son de \$ 209.25. En el mismo periodo, ¿qué interés ganará un capital de \$ 6,000.00?
23. 1,800 acciones de Zyrtec, S.A. cuestan \$ 243,000.00. ¿Cuánto se tendrá que invertir para comprar 2,100 acciones de Zyrtec?
24. Una rueda dentada de 40 dientes engrana con otra de 52 dientes. Si la primera rueda gira a 75 RPM (revoluciones por minuto), ¿cuántas RPM gira la segunda?
25. Se va a repartir una herencia de \$ 1'000,000.00 entre tres hermanos, en forma inversamente proporcional a sus edades. La edad del primero es de 24 años; el segundo tiene 21 años y el tercero 19 años. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
26. La fábrica de ropa Vista Bien, S.A. va a repartir \$ 100,000.00 entre 5 empleados de confianza por concepto de gratificación por las horas extra trabajadas. El primer empleado trabajó 75 horas extra; el segundo, 85; el tercero, 60; el cuarto 47 y el quinto, 38. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
27. Se va a repartir un donativo de \$1'000,000.00 entre 3 asilos de ancianos, en forma directamente proporcional al número de ancianos que albergan. ¿Cuánto le toca a cada asilo, si se tienen los siguientes datos?:

<u>Asilo</u>	<u>Número de ancianos</u>
A	309
B	273
C	218

28. Cuatro hermanos se juntaron para comprar un departamento por \$ 120,000.00, el cual vendieron posteriormente en \$ 200,000.00. Si al comprar el departamento el primer hermano puso \$ 20,000.00; el segundo, \$ 30,000.00; el tercero, 25,000.00 y el cuarto, el resto, calcule la utilidad que le corresponde a cada uno.
29. Cuatro socios emprenden un negocio. El primero aporta \$ 8,000; el segundo, \$ 13,000.00; el tercero, \$ 10,000.00 y el cuarto \$ 11,500.00.
Al final del primer año de trabajo tuvieron una utilidad de \$ 66,000.00. ¿Cuánto le toca a cada uno?
30. Juan García emprende un negocio con \$ 20,500.00 y a los tres meses admite como socio a Pedro Fernández, el cual aporta \$ 20,500.00. Cuatro meses más tarde entra a la sociedad Raúl Torres con una aportación de \$ 20,500.00. Si hay una ganancia de \$ 121,000.00 al final del año de que Juan comenzó el negocio, ¿cuánto recibe cada uno?

31. Una empresa tiene 4 socios inversionistas los cuales aportaron las siguientes cantidades:

Tania:	\$ 80,000
Ester:	\$ 58,000
Pablo:	\$ 90,000
Esteban:	\$ 50,000

Al cabo de cierto tiempo se repartieron ganancias en forma directamente proporcional al capital aportado. Si Pablo recibió \$ 45,000.00, ¿qué monto se repartió entre los 4 socios y cuánto le tocó a cada uno de los demás?

32. Un despacho de contadores, con el fin de incentivar a sus tres secretarias, les otorgó un bono en forma inversamente proporcional a los días faltados por cada una. Sonia faltó 5 días en el año y recibió \$ 8,873.24; Liliana faltó 3 días y Yolanda recibió \$ 6,338.03. ¿Cuánto recibió Liliana y cuántas faltas tuvo Yolanda?

33. Emma, Patricia y Martha invirtieron \$15,800.00, \$ 20,000.00 y \$18,350.00, respectivamente para abrir una tienda de ropa de moda para damas. Convinieron en compartir a partes iguales cualquier utilidad o pérdida hasta \$ 8,000.00. Cualquier monto sobre esa cantidad se repartirá en forma directa al capital aportado.

Durante el primer mes obtuvieron una utilidad de \$ 21,000.00. ¿Cuánto recibe cada socia?

34. En el reparto de utilidades de una empresa, la señorita Solís recibió \$ 12,880.00 por concepto de su sueldo anual de \$ 50,160.00 y \$ 13,340.00 por los 365 días trabajados. ¿Cuánto recibió de utilidades el señor Benítez, si laboró 273 días, con un sueldo acumulado de \$ 47,700.00? Véase el tema especial "El Reparto de Utilidades".

VARIACIÓN PROPORCIONAL MIXTA

Los casos de variación, anteriormente estudiados, comprenden solamente dos variables relacionadas de manera directa o inversa. Sin embargo, existen problemas en los que aparecen más de dos variables y donde, con frecuencia, se combinan los tipos de variación.

Se dice que una variable varía conjuntamente con dos o más variables si es directamente proporcional a su producto. Por ejemplo, si X varía conjuntamente con Y , Z y W , esto significa que X varía en forma directamente proporcional al producto de Y , Z y W ; es decir, $X = k Y Z W$, en donde k es la constante de proporcionalidad. Otro ejemplo: si $a = k b c^2$, entonces se dice que a varía conjuntamente con b y el cuadrado de c .

EJEMPLO 4.11

S varía en forma directamente proporcional a T^3 e inversamente proporcional a V . Si $S = 50$ cuando $T = 8$ y $V = 5$, encuentre S si $T = 5$ y $V = 3$.

TEMA ESPECIAL

EL REPARTO DE UTILIDADES

La participación de utilidades es la parte del rendimiento obtenido por la empresa en un año de operación, que corresponde a los trabajadores por su intervención en el proceso productivo.

El reparto de utilidades tiene como objetivos:

- I. Lograr el equilibrio entre el trabajo y el capital según los principios de la justicia social.
- II. Estimular a los trabajadores para alcanzar una mayor productividad en la empresa y en el sistema económico en general.
- III. Pugnar por una más justa distribución de la riqueza que genera el sistema económico.

Están obligadas a repartir utilidades todas las empresas de producción o distribución de bienes o servicios, sean personas físicas o morales, que tengan a su servicio trabajadores asalariados, y que su finalidad sea o no lucrativa. Quedan exceptuados de esta obligación:

- Las empresas de nueva creación, durante el primer año de funcionamiento.
- Las empresas de nueva creación que se dediquen a elaborar un producto nuevo, por un periodo de dos años.
- Las industrias extractivas de nueva creación, durante el periodo de exploración.
- Las instituciones de asistencia privada, reconocidas por las leyes, que con bienes de propiedad particular ejecuten actos con fines humanitarios de asistencia, sin propósitos de lucro.
- El IMSS, Infonavit e instituciones públicas descentralizadas con fines culturales, asistenciales o de beneficencia.
- Las empresas que tengan un capital menor del que fije la Secretaría del Trabajo y Previsión Social.

Tendrán derecho al reparto de utilidades todos los trabajadores al servicio de la empresa, con excepción de los socios o accionistas, directores, administradores y gerentes generales de la empresa, de acuerdo a lo siguiente:

- Trabajadores de planta, sean de confianza o sindicalizados, independientemente del número de días trabajados durante el año. Trabajadores eventuales, siempre y cuando hayan trabajado por lo menos 60 días en forma continua o discontinua durante el año. Extrabajadores.
- Las madres trabajadoras, durante los periodos pre y posnatales, así como los trabajadores incapacitados por accidente de trabajo, serán considerados como

trabajadores activos y se computarán los días de incapacidad como días laborales.

- Los trabajadores domésticos y los trabajadores incapacitados por un accidente o enfermedad no profesional no participarán en el reparto de utilidades.

Los trabajadores tienen derecho a participar de un 10% de la utilidad gravable* de la empresa y, de acuerdo al artículo 123 de la Ley Federal del Trabajo, la utilidad repartible se divide en dos partes iguales:

- El 50% se reparte entre los trabajadores en forma directamente proporcional al número de días trabajados por cada trabajador en el año. Para efectos del reparto se consideran los días efectivamente trabajados y aquellos que la empresa está obligada a pagar al salario, aun cuando no laboren los trabajadores, como son: días festivos, los periodos pre y posnatales, descansos semanales, descansos obligatorios, vacaciones y los días amparados como permisos con goce de sueldo.
- El 50% restante se reparte en forma directamente proporcional al monto del salario devengado por cada trabajador durante el año. Para efectos del reparto se considera exclusivamente el salario nominal; es decir, el salario en efectivo por cuota diaria, sin considerar tiempo extra, gratificaciones, etcétera.

Para los trabajadores de confianza que gocen de un salario superior al del trabajador sindicalizado de más alto salario dentro de la empresa, o a falca de éste al trabajador de planta con la misma característica, el salario máximo a considerar para el cálculo del reparto es el salario del trabajador sindicalizado y/o de planta incrementado en 20%.

Cuando los patrones personas físicas perciban ingresos por honorarios, arrendamiento o intereses, el monto máximo a repartir a sus trabajadores no excederá de un mes de salario.

Como ejemplo de un reparto de utilidades, supongamos que se tiene una pequeña empresa constituida de 8 trabajadores:

<u>Nombre</u>	<u>Puesto</u>	<u>Salario anual devengado</u>	<u>Días trabajados</u>
Antonio R.	Gerente general	\$ 194,400	365
Isaac A.	Supervisor (confianza)	\$ 117,600	365
Mario G.	Conductor (planta)	\$ 12,000	120
Jesús A.	Trabajador (sindicalizado)	\$ 49,200	365
Sara R.	Vendedora (planta)	\$ 56,060	290
Sonia D.	Vendedora (planta)	\$ 70,000	350
José Z.	Trabajador (sindicalizado)	\$ 44,350	365
Luis M.	Trabajador (eventual)	\$ 4,320	48

*La utilidad gravable es la utilidad bruta. Esto es, la utilidad antes del pago de impuestos.

Supongamos que la utilidad bruta de la empresa fue de \$ 1'850,000.00; por tanto la utilidad a repartir entre los trabajadores es de \$185,000.00: \$ 92,500.00 se reparten en forma directamente proporcional al número de días trabajados durante el año y \$ 92,500.00 se reparten en forma directamente proporcional al salario recibido.

El gerente general y el trabajador Luis M. no tienen derecho al reparto.

El salario anual más alto de los trabajadores sindicalizados y/o de planta es el de Sonia D., por tanto el salario base del reparto para el supervisor será de:

$$70,000 + 20\% \text{ de } 70,000 = \$84,000$$

En la siguiente tabla se muestra el número de días trabajados y el salario base de reparto para cada trabajador. Asimismo, se muestra la parte que le toca a cada uno por los días trabajados y por el salario devengado, así como la cantidad total. Se deja como ejercicio para el lector la verificación de las cantidades repartidas a cada uno de los trabajadores.

<u>Trabajador</u>	<u>Días laborados</u>	<u>Salario base del reparto</u>	<u>Parte prop. por días trabajados</u>	<u>Parte prop. por salario</u>	<u>Suma total</u>
Isaac A.	365	\$ 84,000	\$ 18,200.81	\$ 24,619.00	\$ 42,819.81
Mario G.	120	\$ 12,000	\$ 5,983.83	\$ 3,517.00	\$ 9,500.83
Jesús A.	365	\$ 49,200	\$ 18,200.80	\$ 14,419.70	\$ 32,620.50
Sara R.	290	\$ 56,060	\$ 14,460.92	\$ 16,430.25	\$ 30,891.17
Sonia D.	350	\$ 70,000	\$ 17,452.83	\$ 20,515.82	\$ 37,968.65
José Z.	365	\$ 44,350	\$ 18,200.81	\$ 12,998.23	\$ 31,199.04

SOLUCIÓN

La ecuación de variación es:

$$VS = kT^3$$

Por tanto:

$$k = V S/T^3$$

Con los datos iniciales se obtiene el valor de k:

$$k = (5)(50)/83$$

$$k = 0.48828125$$

Despejando S de la ecuación de variación se tiene:

$$5 = kT^3/V$$

$$S = (0.48828125)(5^3)/3$$

$$S = 20.3450520833$$

EJEMPLO 4.12

El total de gasolina consumida por un automóvil que viaja con velocidad constante varía conjuntamente con la distancia recorrida y con el cuadrado de la velocidad. Si un automóvil consume 25 litros al recorrer 230 km a la velocidad de 60 km/hr, ¿cuánto consumirá si recorre 530 km a 75 km/hr?

SOLUCIÓN

Sea G el total de gasolina consumida; d la distancia recorrida y v la velocidad. La ecuación de variación es:

$$G = kv^2$$

Por tanto:

$$k = G/d v^2$$

$$k = 25/(230)(60^2)$$

$$k = 3.0193236 \times 10^{-5}$$

El valor de G para los nuevos valores de distancia y velocidad es:

$$G = (3.0193236 \times 10^{-5})(530)(75^2)$$

$$G = 90 \text{ litros}$$

EJEMPLO 4.13

Una fábrica produce 6,000 camisas en 5 días utilizando 30 trabajadoras. ¿Cuántas camisas se producirán en 3 días con 25 trabajadoras?

SOLUCIÓN

La información se puede disponer de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcccl} 6,000 & \text{camisas} & (C) & - & 5 & \text{días} & (D) & - & 30 & \text{trabajadoras} & (T) \\ ? & \text{camisas} & & & - & 3 & \text{días} & & - & 25 & \text{trabajadoras} \end{array}$$

Para obtener la ecuación de variación se procede manejando las variables de dos en dos y suponiendo que las demás permanecen constantes. En este problema se tiene que, suponiendo constante el número de trabajadoras, a más camisas producidas, más días se emplean en producirlas; luego, estas cantidades son directamente proporcionales:

$$C = k_1 D$$

en donde k_1 es la constante de proporcionalidad.

Si, ahora, suponemos que los días trabajados permanecen constantes, se tiene que a más personas trabajando, más camisas se producen; por tanto, estas cantidades son directamente proporcionales:

$$C = k_2 T$$

en donde k_2 es la constante de proporcionalidad. Combinando las ecuaciones anteriores se tiene:

$$C = k_1 k_2 D T$$

Es posible sustituir las constantes k_1 y k_2 por una única constante k :

$$C = k D T$$

La ecuación anterior es la ecuación de variación buscada y significa que el número de camisas producidas varía en forma directamente proporcional al número de días trabajados y al número de trabajadoras empleadas.

El valor de k es:

$$k = C / D T$$

$$k = 6,000 / (5)(30)$$

$$k = 40$$

Por tanto, el nuevo valor de C será: $C = (40)(3)(25)$

$$C = 3,000 \text{ camisas}$$

EJEMPLO 4.14

Cinco hombres trabajando 8 horas al día han hecho 80 metros de una barda en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 8 hombres, trabajando 6 horas diarias, para hacer 100 metros de la misma barda?

SOLUCIÓN

5 hombres (H) - 8 horas/día (D) - 80 metros (M) - 10 días (T)

8 hombres - 6 horas/día - 100 metros - ? días

Como a más hombres trabajando, menos días se tardan en construir la barda, entonces estas cantidades son inversamente proporcionales:

$$HT = k_1$$

Como a menos horas por día trabajadas, más días se tardan en construir la barda, entonces estas cantidades son inversamente proporcionales:

$$D T = k_2$$

Como a más días trabajando en la construcción de la barda, más metros se construyen, estas cantidades son directamente proporcionales:

$$T = k_3 M$$

Combinando las tres ecuaciones anteriores, se tiene:

$$H D T = k_1 k_2 k_3 M$$

Si $k_1 k_2 k_3 = k$, entonces:

$$HDT = k M$$

La ecuación anterior es la ecuación de variación del problema. La ecuación dice que el número de hombres trabajando en la construcción de una barda es directamente proporcional al número de metros construidos e inversamente proporcional al número de días de trabajo y al número de horas diarias de trabajo.

Despejando k , se tiene: $k=HDT/M$

$$k = (5)(8)(10)/80$$

$$k=5$$

Por tanto:

$$t=k M/H D$$

$$T = (5)(100) (8)(6)$$

$$T = 10.4 \text{ días}$$

EJEMPLO 4.15

En un concurso de matemática financiera se repartió un premio de \$ 10,000.00 entre los 3 finalistas, en forma inversa al tiempo que se tardaron en resolver el conjunto de problemas y al número de problemas mal hechos. Si un concursante tardó 60 minutos en resolver los problemas y tuvo 3 mal; otro concursante tardó 50 minutos y tuvo 2 problemas mal y el tercero tardó 40 minutos y tuvo 4 mal, ¿cuánto recibió cada concursante?

SOLUCIÓN

De acuerdo al enunciado del problema se tiene que:

$$c t n = k$$

en donde c es la cantidad a recibir por cada concursante, t es el tiempo empleado en la resolución de los problemas y n es el número de problemas que resultaron mal.

Sea:

x = cantidad de dinero que recibe uno de los concursantes.

y = cantidad de dinero que recibe otro de los concursantes.

z = cantidad de dinero que recibe el tercer concursante.

Por tanto:

$$(x)(60)(3) = k$$

$$(y)(50)(2) = k$$

$$(z)(40)(4) = k$$

Es decir:

$$x = k/180$$

$$y = k/100$$

$$z = k/160$$

Por otro lado se sabe que:

$$x + y + z = 10,000$$

Esto es:

$$k/180 + k/100 + k/160 = 10,000$$

Al resolver la ecuación anterior se tiene que:

$$k = 458,598.726115$$

Por tanto:

$$x = k/180 = 458,598.726115/180 = \$ 2,547.77$$

$$y = k/100 = 458,598.726115/100 = \$ 4,585.99$$

$$z = k/160 = 458,598.726115/160 = \$ 2,866.24$$

Ejercicios 4.2

1. A es directamente proporcional a B y a C, e inversamente proporcional a D. Si A = 100 cuando B=50, C=8yD=4, encuentre B si A = 25, C = 10 y D = 18.
2. X varía directamente con el cuadrado de Y, e inversamente con la raíz cuadrada de Z. Si X = 1,953 cuando Y = 1,960 y Z = 1,987, encuentre Y si X = 2,000 y Z = 1,000.
3. El interés simple ganado en un periodo determinado varía conjuntamente con el capital y la tasa de interés. Si \$ 3,850.00 devengaron \$ 471.63 de interés al 2.45% mensual, encuentre el interés devengado para el mismo periodo por \$ 5,000.00 al 2.97% mensual.
4. La cantidad de pintura necesaria para pintar una columna cilíndrica varía conjuntamente con el radio y la altura de la columna. Compare la cantidad de pintura necesaria para pintar una columna de 7 m de alto y 60 cm de radio con la cantidad de pintura requerida para una columna de 8 m de alto y 45 cm de radio.
5. El gerente de una tienda departamental estima que el total de ventas es

directamente proporcional a los gastos de publicidad e inversamente proporcional al número de competidores presentes en la misma zona. Actualmente invierte \$ 100,000.00 mensuales en publicidad y las ventas mensuales promedio son de \$ 2'000,000.00. Tiene dos competidores importantes. Si incrementa la publicidad a \$ 150,000.00 cada mes con el fin de hacer frente a un competidor adicional, estime el valor de las ventas mensuales.

6. Una fábrica de encendedores desechables encuentra que el precio de venta de cada encendedor que se produce varía directamente con el costo de producción e inversamente con la raíz cuadrada del número de encendedores producidos. El costo de producción de 50,000 encendedores es de \$ 67,500.00 y el precio unitario de venta al mayorista es de \$ 2.90. Si el precio unitario de venta se incrementa en \$ 0.50, ¿cuántos encendedores se deberán producir con el fin de tener un costo de producción de \$ 75,000.00?
7. *Una ciudad de 250,000 habitantes recibe agua a través de una tubería maestra de 89 cm de diámetro. ¿Qué diámetro se necesitará para una población de 800,000 habitantes?
8. Cuatro máquinas que fabrican latas de aluminio para envasar refresco, jugos o cerveza, trabajando 6 horas diarias, han hecho 432,000 envases en 5 días. Una de las máquinas falla cuando faltan por hacer 216,000 envases, que deben ser entregados dentro de dos días. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar las máquinas que quedan para cumplir el pedido?
9. La duración de un viaje por ferrocarril varía en forma directamente proporcional a la distancia recorrida e inversamente proporcional a la velocidad. La velocidad es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad de Diesel consumido por kilómetro recorrido, e inversamente proporcional al número de vagones del tren. Para recorrer 60 km en una hora y llevando 20 vagones, una máquina requiere 20 litros de Diesel. ¿Cuánto Diesel se consumirá en un viaje de 70 km hecho en 90 minutos con 23 vagones?
10. Una empresa construye un barco empleando 30 trabajadores durante 50 días, trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días serán necesarios para construir otro barco igual, si hay 27 trabajadores y trabajan 10 horas diarias?
11. Una empresa fabrica 1,000 pares de calcetines con 5 trabajadores utilizando el 60% de la maquinaria, en 3 días a razón de 8 horas/día. ¿Cuántos días serán necesarios para fabricar 2,350 pares de calcetines utilizando 7 trabajadores y ocupando la maquinaria al 100% a razón de 6 horas/día?
12. Un campamento militar con 250 hombres, tiene provisiones para 30 días a razón de 3 comidas diarias cada hombre. Si se refuerzan con 53 hombres, ¿cuántos días durarán las provisiones si cada hombre come sólo 2 veces al día?
13. El patio de una casa mide 10 m de largo y 6 m de ancho y se encuentra pavimentado con 300 adoquines. ¿Cuántos adoquines serán necesarios para pavimentar otro patio cuyas medidas son 15 m de largo y 12 m de ancho?
14. Se emplean 15 hombres durante 5 días, trabajando 4 horas/día, para cavar una zanja de 12 m de largo, 6 m de ancho y 5 m de profundidad. ¿Cuántos días

necesitarán 12 hombres, trabajando 6 horas/día, para cavar otra zanja de 15 m de largo, 2 m de ancho y 7 m de profundidad, en un terreno de triple dificultad?

15. Se pagan \$ 645.00 por el transporte de 3 toneladas de naranja a 100 km de distancia. ¿Cuánto habrá que pagar por el transporte de 7 toneladas de naranja a 185 km de distancia?
16. Tres profesores impartieron clases particulares a un ejecutivo, el cual pagó \$ 40,950.00 en total. El primer profesor trabajó 2 horas diarias durante 45 días; el segundo, una hora diaria por 30 días y el tercero, 3 horas diarias durante 25 días. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
17. Un padre de familia va a repartir \$ 1,000.00 entre sus tres hijos en forma directa a su calificación mensual e inversa a sus faltas de conducta en el mes. A continuación se muestran las calificaciones y las faltas de los 3, hijos. ¿Cuánto le toca a cada uno?

	<u>Calificación</u>	<u>Faltas de conducta</u>
Roberto	85	2
Hilda	95	3
Alejandro	100	5

18. Una compañía tomó el acuerdo de dar una gratificación de \$ 90,000.00 repartidos entre 3 supervisores en forma directa a sus años de servicio e inversa a sus sueldos quincenales. Los años de servicio son: 10, 14 y 19 y sus sueldos, en el mismo orden, son: \$ 3,500.00, \$ 5,000.00 y \$ 6,850.00. ¿Cuánto le toca a cada uno?
19. Se va a repartir una utilidad de \$ 200,000.00 entre 3 socios en proporción directa a los capitales aportados y al tiempo que trabajó cada socio en el negocio. El primero aportó \$ 40,800.00 y trabajó 8 meses; el segundo aportó \$ 60,000.00 y trabajó 12 meses y el tercero aportó \$ 75,000.00 y trabajó 6 meses. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
20. Se reparte una gratificación entre 3 cajeros bancarios, en forma directamente proporcional a los años de servicio e inversamente proporcional a sus faltantes reportados.

<u>Nombre</u>	<u>Años de servicio</u>	<u>Número de faltantes</u>	<u>Gratificación</u>
Víctor	5		\$ 16,981.13
Rosa María	7	8	\$ 29,716.98
Rogelio	10	12	

Encuentre:

- a) El número de faltantes de Víctor.
- b) La gratificación correspondiente a Rogelio.
- c) La cantidad total repartida entre los cajeros.