Unidad 4

- Probabilidad

PROBABILIDAD

Introducción

Los ORÍGENES de las matemáticas de la probabilidad se remontan al siglo XVI. Las primeras aplicaciones se relacionaban básicamente con los juegos de azar. Los jugadores gananciosos utilizaron el conocimiento de la teoría de la probabilidad para desarrollar estrategias de apuesta. Incluso actualmente son muchas las aplicaciones que comprenden juegos de azar, como en diversas loterías, en casinos, en las carreras de caballos y en los deportes organizados. Sin embargo, el uso de la probabilidad va más allá de los juegos de azar. En la actualidad, el gobierno, las compañías particulares y las organizaciones profesionales y no lucrativas adoptan la teoría de la probabilidad en su cotidiano proceso de toma de decisiones.

Independientemente de su aplicación particular, el empleo de las probabilidades indica que existe algún elemento aleatorio o de incertidumbre relativo a la ocurrencia o no ocurrencia de algún evento futuro. Así, en muchos casos puede ser virtualmente imposible predecir qué pasará, pero es posible establecer lo que podría pasar. Por ejemplo, si se tira una moneda, por lo regular no se puede decir con seguridad si caerá cara o cruz. Sin embargo, combinando el raciocinio, la experiencia y los datos históricos, con frecuencia es factible decir cuán probable es algún evento futuro.

Existen numerosos ejemplos de casos semejantes en los negocios y en las actividades del gobierno. Predecir cuánta demanda tendrá un producto nuevo, estimar el costo de producción, pronosticar las fallas en las cosechas, comprar seguros, contratar a un nuevo empleado, presupuestar, predecir la reacción de los gobiernos extranjeros ante un cambio en la política de defensa, calcular qué impacto tendrá en la inflación una rebaja impositiva, etc., son algunos de los ejemplos en los que interviene algún elemento aleatorio.

Las probabilidades son útiles, ya que pueden servir para desarrollar estrategias. Por ejemplo, algunos automovilistas parecen mostrar una mayor tendencia a aumentar la velocidad si creen que existe un riesgo pequeño de ser multados; los inversionistas estarán más dispuestos a invertir su dinero si las posibilidades de ganar son buenas; y usted probablemente se llevará el impermeable si la probabilidad de lluvia es alta. En forma semejante, una compañía puede estar más dispuesta a negociar con un sindicato si existe una severa amenaza de huelga, a invertir en la compra de equipo nuevo de creer que existe una buena posibilidad de recuperar ese dinero, y a emplear una persona eficiente, etc.

El punto central en todos estos casos es la capacidad de cuantificar cuán probable es determinado evento. En este capítulo se proporcionan definiciones y reglas que se pueden utilizar para obtener probabilidades.

Las probabilidades se utilizan para expresar cuán probable es determinado evento.

PROBABILIDAD DE UN EVENTO

Las probabilidades se plantean con respecto a algún evento. El “evento” en cuestión puede ser que llueva, haya ganancias, caiga cara, se obtengan rendimientos de por lo menos 6%, se termine el curso, se obtengan buenas calificaciones, etc. La probabilidad de algún evento A, representada como F(A), es un número que va del 0 al 1, y que indica cuán probable es la ocurrencia del evento A. Cuanto más cerca se encuentre el número de 1.00, tanto mayor es la probabilidad de que dicho evento A ocurra; cuanto más cercano sea el número a 0, menor es la probabilidad de que el evento A ocurra. A un evento imposible se le asigna una probabilidad 0, mientras que a un evento del cual se tiene la certeza que ocurrirá, se le asigna una probabilidad 1.00. Cuando el metereologo anuncia que la “probabilidad de que haya precipitación pluvial es cercana a 0”, en realidad está diciendo que es altamente improbable que se presente cualquier precipitación medible durante el periodo de predicción (el pronosticador sabe por experiencia que nada es imposible en lo que respecta al clima, por lo que generalmente se abstiene de asignar una probabilidad cero).

Las probabilidades se pueden expresar en múltiples formas, incluyendo decimales, fracciones y porcentajes. Por ejemplo, la posibilidad de lluvia se puede establecer como 20%, 2 de 10, 0.20, o bien, $^{1}/_{5}$.

La probabilidad de que un evento ocurra está dada mediante un número que va de 0 a 1.00.

ESPACIO MUESTRAL Y EVENTOS

Uno de los conceptos matemáticos fundamentales, utilizados en el estudio de la probabilidad es el de conjunto. Este es un grupo de objetos o elementos que tienen ciertas características comunes. Por ejemplo, los habitantes de Monterrey, las estaciones de ferrocarril de Brasil, ríos de Europa, las farmacias del estado de Jalisco, un embarque de calculadores y estudiantes de una misma clase constituyen ejemplos de conjuntos. Es importante definir cuidadosamente qué constituye el conjunto de interés para estar en condiciones de decidir si un objeto dado es o no un elemento del conjunto.

Un conjunto es un grupo bien definido de elementos u objetos.

Hay dos formas de describir los elementos de un conjunto. Uno, es enumerar todos, o los suficientes de ellos, de manera que quede de manifiesto que forman parte del conjunto. Dicha enumeración se encierra entre llaves. Un segundo método de indicar un conjunto es establecer una regla, o bien, definir las características comunes de los elementos de un conjunto. Considérense los siguientes ejemplos:

Conjunto A = {Pérez, Alvarez, Sánchez}

Conjunto B = {todos los enteros positivos menores que 9}

Conjunto C = {ganadores en el primer "round"}

Asimismo, la probabilidad sólo tiene significado en el contexto de un espacio muestra!, que es el conjunto de todos los posibles resultados de una muestra o "experimento".* El término "experimento" sugiere que el resultado es incierto antes de llevarse. a cabo observaciones. Los resultados de un experimento se denominan eventos.

Un espacio muestra! es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento o muestra. *Los resultados de un experimento se conocen como eventos.*

Por ejemplo, se puede tirar una moneda 10 veces y anotar en cuántas ocasiones cayó cara. El espacio muestral de este experimento sería entonces el número posible de caras que pudiera resultar: 0, 1, 2, . . . , 10. De otra manera, el experimento se podría concentrar en el número de cruces en 10 tiradas.

Otro experimento podría consistir en inspeccionar las medidas de seguridad contra accidentes de una fábrica. El espacio muestral se compone de la cantidad posible de accidentes o peligros que pudieran descubrirse: 0, 1, 2, 3, . . . , 00.

Considérese ahora el experimento de "sacar una sola carta de un mazo de 52 naipes". Los resultados posibles se enumeran en la figura 3.1. Hay 52 eventos elementales en el espacio muestral. Otros eventos pueden considerarse como combinaciones de tales eventos elementales. Por ejemplo, el evento "sacar un naipe de corazones" se puede satisfacer por cualquiera de trece eventos elementales. Por otra parte, el evento "sacar un naipe de cinco" consta de cuatro eventos elementales, y el evento "la carta es roja" consiste de 26 eventos elementales, o sea la mitad de los elementos del espacio muestral.

Los cálculos de probabilidades toman en consideración cómo se relacionan entre sí diversos eventos. Los términos "complemento", "mutuamente excluyentes" y "colectivamente exhaustivos" se utilizan para describir algunas de dichas relaciones.

El complemento de un evento consta de todos los resultados del espacio muestral que no forman parte de él. De ahí que, el complemento de "el naipe es un corazón" es el conjunto de todas las cartas que no son corazones (es decir, tréboles, diamantes y espadas). Las otras 51 cartas constituyen el complemento de "la carta es un rey de diamantes". El complemento de un evento se puede señalar con prima. De este modo, el complemento del evento A es A´.

---

* *Los términos "experimento' y "muestra" suelen emplearse indistintamente en estadística para hacer referencia al proceso de realizar observaciones.*

Los eventos son mutuamente excluyentes si no presentan elementos en común. Así, al sacar una sola carta, los eventos: el naipe es un corazón” y “el naipe es un diamante” son mutuamente excluyentes ya que una carta no puede ser corazón y diamante a la vez. Por el contrario, los eventos “la carta es un corazón” y “la carta es una figura” no son mutuamente excluyentes, ya que algunos corazones son figuras.

Se dice que los eventos son colectivamente exhaustivos si por lo menos uno de ellos debe ocurrir durante un experimento, Así, “la carta es un corazón”, “la carta es un diamante”, “la carta es un trébol” y “la carta es una espada” son colectivamente exhaustivos; agotan todas las posibilidades. Lo mismo ocurre con los eventos “la carta es roja” y “la carta es negra”.

Juego o palo			
Trèboles (negros)	Diamantes (rojos)	Corazones (rojos)	Espadas (negras)
♣ K	♦ K	♥ K	♠ K
♣ Q	♦ Q	♥ Q	♠ Q
♣ J	♦ J	♥ J	♠ J
♣ 10	♦ 10	♥ 10	♠ 10
♣ 9	♦ 9	♥ 9	♠ 9
♣ 8	♦ 8	♥ 8	♠ 8
♣ 7	♦ 7	♥ 7	♠ 7
♣ 6	♦ 6	♥ 6	♠ 6
♣ 5	♦ 5	♥ 5	♠ 5
♣ 4	♦ 4	♥ 4	♠ 4
♣ 3	♦ 3	♥ 3	♠ 3
♣ 2	♦ 2	♥ 2	♠ 2
♣ A	♦ A	♥ A	♠ A

FIGURA 3.1 Baraja de 52 cartas.

Por último, algunas veces es útil observar que un evento y su complemento son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

El complemento de un evento consta de todos los demás resultados del espacio muestral.

Los eventos son mutuamente excluyentes si no tienen elementos en común, o si no pueden ocurrir al mismo tiempo.

Los eventos son colectivamente exhaustivos si no es posible obtener otro resultado para un experimento dado.

A continuación se presentarán otros ejemplos. Estos eventos se considerarán como complementos:

1. Caras o cruces con solo tirar una moneda una vez.
2. Resultar herido o no en un accidente.
3. Atrapar o no la pelota.
4. Contestar o no el teléfono.

Tales eventos se consideran mutuamente excluyentes.

1. La persona tiene un hermano, la persona tiene dos hermanos, la persona tiene tres hermanos.
2. Las caras de un dado.
3. Jorge obtuvo A en matemáticas, B en matemáticas, C en matemáticas, menos de C en matemáticas.

Estos eventos se consideran colectivamente exhaustivos:

1. Cualquiera de los complementos enumerados anteriormente.
2. Las caras de un dado.
3. Las calificaciones de matemáticas de Jorge (antes mencionadas).

Suele ser útil representar gráficamente un espacio muestral, dado que esto simplifica la visualización de los elementos del espacio muestral. Esto se puede llevar a cabo utilizando un diagrama de Venn, que indica los espacios muestrales y los eventos mediante círculos, cuadrados o cualquier otra forma geométrica conveniente. En la figura 3.2 se ilustran algunos ejemplos de diagramas de Venn.

En la figura 3.3 se presenta el uso de diagramas de Venn para ilustrar el complemento, eventos que son mutuamente excluyentes y que no lo son, así como eventos que son mutuamente excluyentes a la vez que colectivamente exhaustivos.

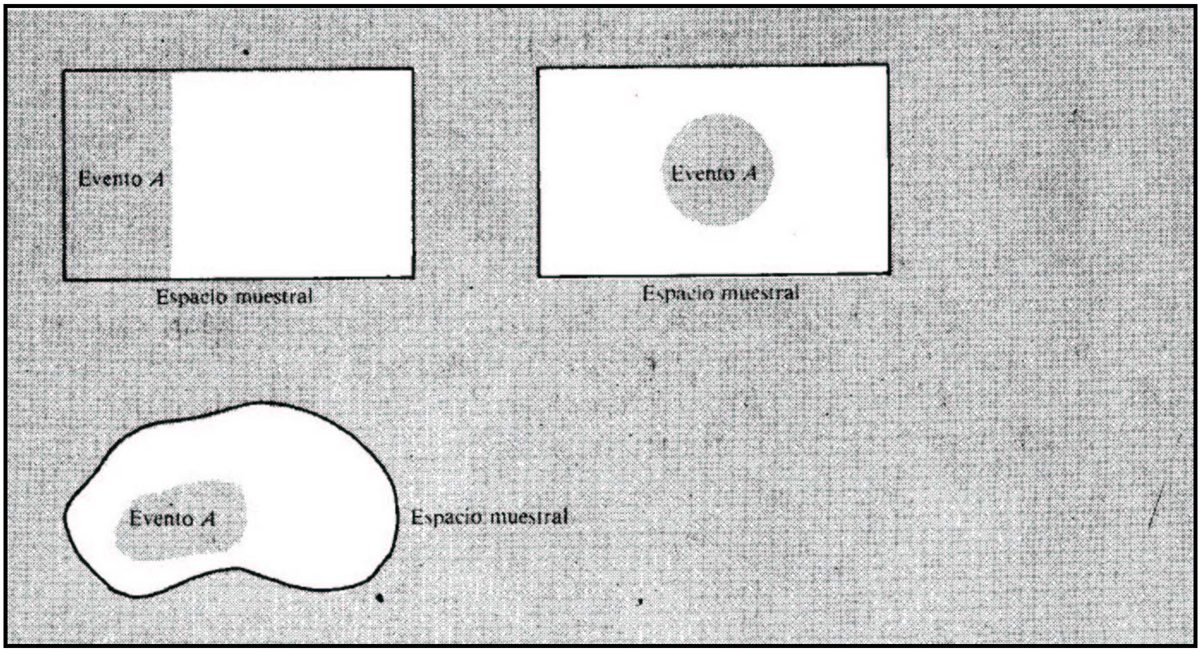


FIGURA 3.2 Algunos ejemplos de diagramas de Venn.

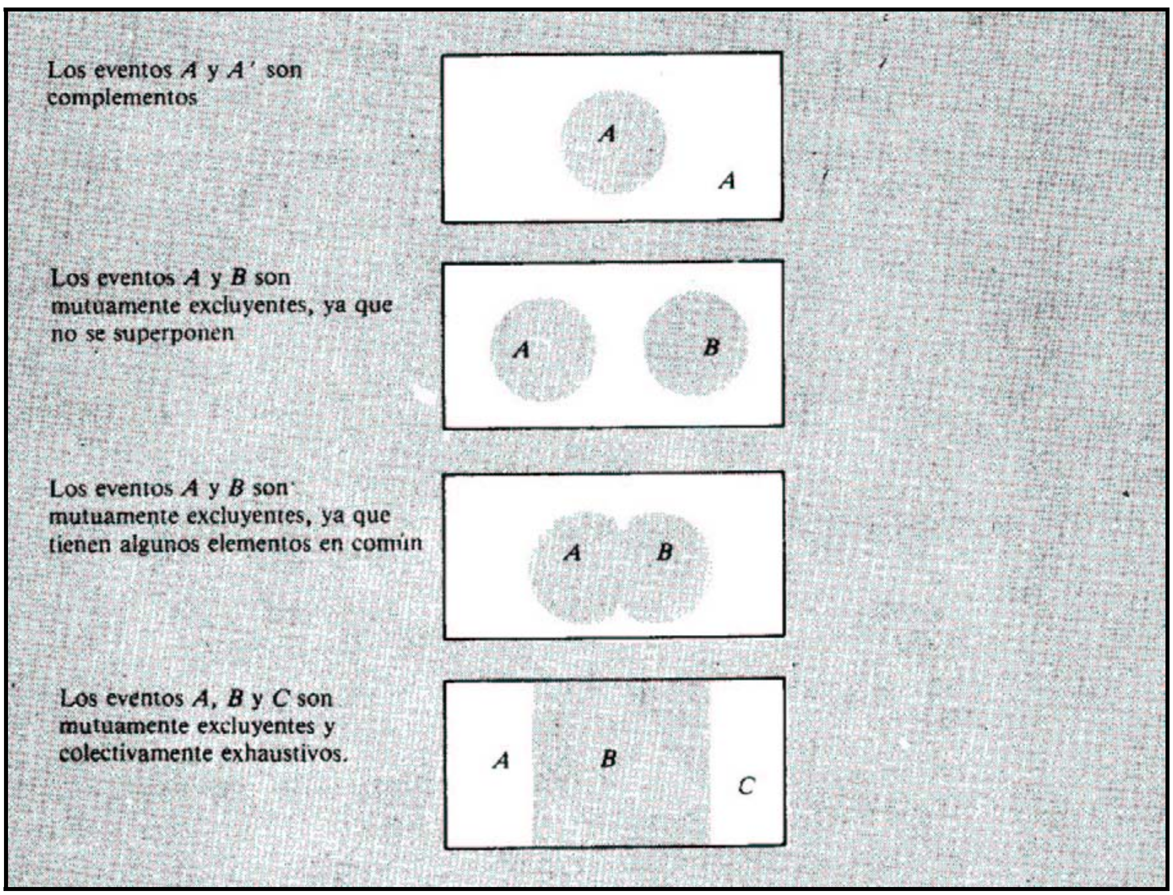


FIGURA 3.3 Los diagramas de Venn se pueden utilizar para representar eventos complementarios, mutuamente excluyentes y no mutuamente excluyentes, y eventos que son, tanto mutuamente excluyentes como colectivamente exhaustivos.

Ahora, como un espacio muestral consta de todos los posibles resultados de un experimento, se deduce que por lo menos debe presentarse uno de estos en dicho espacio. En otras palabras, la probabilidad del espacio muestral es 100%, o bien, 1.00. Además, como todo evento su complemento tienen valor en lo referente a las posibilidades del espacio muestral, se deduce que $P(A) + P(A´) = 1.00$. Por ejemplo, cuando se tira una moneda, es posible suponer que si no cae de canto, entonces se dice que la probabilidad de que caiga cara o cruz es de 1.00. Y si de algún modo se sabe que $P(cara) = 0.40$ entonces automáticamente se establece $P(cruz) = 0.60$ (es decir, 1.00 - 0.40).

En este punto, se puede afirmar lo siguiente:

1. La probabilidad de cualquier evento A se representa mediante un valor que puede variar de 0 a 1.00:

$$0.00 \leq P(A) \leq 1.00$$

2. La probabilidad representada por el espacio muéstral es 100% P(un evento en el espacio muestral) = 1.00
3. La probabilidad de que un evento no ocurra es 1.00 menos la probabilidad de que sí lo haga:

$$1.00 - P(A) = P(A') \text{ o } P(A) + P(A') = 1.00$$

EJERCICIOS

1. Identifique el experimento y el espacio muestral para cada uno de los siguientes ejemplos:
   a. Presentar un examen de matemáticas y anotar las calificaciones que pueden variar de 0 a 100.
   b. Someter a examen médico a posibles jugadores de fútbol y aprobarlos o reprobarlos.
   c. Pesar objetos y anotar sus pesos. En el pasado su peso no era menor que 6 kgs o mayor que 30 kgs.
2. Explique brevemente cada uno de los siguientes términos:
   a. Conjunto
   b. Experimento
   c. Espacio muestral
   d. Evento
   e. Diagrama de Venn
   f. Complemento de un evento
   g. Eventos mutuamente excluyentes
   h. Eventos colectivamente exhaustivos
3. ¿Cuáles de los siguientes pares de eventos son mutuamente excluyentes?

Evento A	**Evento B**

a.	*Lluvia*	*no lluvia*
b.	*B en el examen de química*	*C en el mismo examen*
c.	*Conducir un auto*	*caminar*
d.	*Conducir un auto*	*hablar*
e.	*Nadar*	*sentir frío*
f.	*Ganar un juego*	*perder un juego*
g.	*Vencer en un juego*	*empatar un juego*
h.	*Sacar una reina de un mazo de naipes*	*sacar una carta roja*

4. Establezca cuál de los siguientes conjuntos son colectivamente exhaustivos:
   a. Obtener A o C en un examen
   b. Ganar, perder o empatar un partido de fútbol
   c. Un envase vacío o lleno
   d. Feliz o triste
   e. Feliz o infeliz
   f. Ser ascendido o no
   g. Un árbol pequeño, mediano o grande
5. Determine el complemento para cada evento:
   a. Ganar un juego de béisbol
   b. Ganar un partido de fútbol
   c. Sacar un corazón de un mazo de 52 cartas
   d. Sacar una carta roja de un mazo de 52 cartas
   e. Sacar un dos o un tres en la tirada de un dado
   f. Menos de 10 defectos
   g. Diez o menos defectos
6. Proporcione tres ejemplos de experimentos estadísticos, diferentes de los que se han mencionado anteriormente.
7. Elija uno de los experimentos enumerados para el ejercicio 6:
   a. Identificar espacio muestral
   b. Dar un ejemplo de un evento seguro
   c. Proporcionar un ejemplo de un evento seguro
   d. Enunciar un ejemplo de un evento probable

TRES FUENTES DE PROBABILIDADES

Antes de profundizar en la forma cómo se utilizan las probabilidades, será conveniente saber de cierta manera de dónde provienen. Hay tres formas de calcular o estimar probabilidades. El enfoque clásico se emplea cuando los espacios muestrales tienen resultados igualmente probables; el enfoque empírico se basa en la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento con respecto a un gran número de ensayos repetidos; y el enfoque subjetivo utiliza estimaciones personales de la probabilidad, basadas en el grado de confianza. Los primeros dos enfoques se consideran objetivos, en tanto que el último, como su nombre lo indica, es subjetivo.

Objetivos

Clásico (resultados igualmente probables) — Empírico (datos históricos)

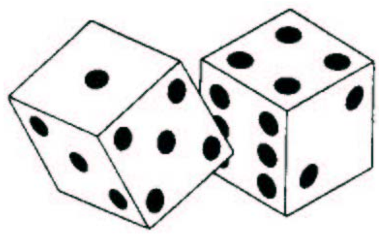
Subjetivo

Opinión personal

Seleccionar el enfoque depende de la naturaleza de la situación. A medida que se avance en la lectura de este libro, quedará de manifiesto que ciertas situaciones se inclinan más por aceptar un enfoque que las otras.

Enfoque clásico

Este enfoque es el de las situaciones que tienen resultados igualmente probables. Los juegos de azar, entre los que se encuentran el tiro de monedas y de dados o juegos de cartas, comúnmente presentan la característica de tener resultados igualmente probables.



Cuando los resultados son de ese tipo, la probabilidad de cada resultado es simplemente una función del número de resultados posible:

$$P(\text{cada resultado}) = \frac{1}{\text{número de resultados posibles}}$$

Si cada carta de un mazo de 52 naipes tiene la misma posibilidad de ser seleccionada, la probabilidad de sacar cualquier carta será *1/52*: P(A) = 1 carta/52 cartas. El espacio muestral de tirar una moneda presenta dos resultados: caras y cruces. De ahí que, si los dos resultados son igualmente probables (es decir, la moneda está "equilibrada"), la probabilidad de que caiga cara es

$$P(\text{cara}) = \frac{1}{2}$$

y la probabilidad de que caiga cruz es

$$P(\text{cruz}) = \frac{1}{2}$$

Y en forma similar se puede calcular la probabilidad de obtener una determinada cara al tirar un dado "equilibrado". Puesto que hay seis resultados en el espacio muestral, la probabilidad de cada uno deberá ser

$$P(\text{una cara cualquiera}) = \frac{1}{6}$$

Y si se saca una canica de una urna en la que haya 321, la probabilidad de obtener una cualquiera es

$$P(\text{una canica cualquiera}) = \frac{1}{321}$$

si suponemos que las canicas se han mezclado con anterioridad a la selección.

El enfoque clásico también se puede aplicar a eventos que comprenden dos o más resultados. Por ejemplo, se puede querer determinar la probabilidad de sacar una de las cuatro reinas de un mazo de 52 cartas, o bien, la probabilidad de obtener un número que sea menos que cuatro al tirar un dado. En éstos y en casos semejantes es necesario identificar primeramente el número de resultados "favorables", y después dividir ese número entre el número total de resultados del espacio muestral. En otras palabras, la probabilidad de algún evento A se expresa como se ve a continuación:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{número de resultados asociados con el evento } A}{\text{número total de resultados posibles}}}$$

Por ejemplo, la probabilidad de sacar una reina, según. esta definición, es

$$P(\text{reina}) = \frac{4 \text{ reinas}}{52 \text{ cartas}} = \frac{4}{52}$$

En forma semejante, la probabilidad de tirar un dado y obtener un valor de tres, o me nor (es decir, un uno, un dos o un tres) es

$$P(\text{tres o menos}) = \frac{3 \text{ caras}}{6 \text{ caras posibles}} = \frac{3}{6}$$

Si un evento es imposible, tiene una probabilidad 0. Por ejemplo, la probabilidad de obtener 9 puntos con sólo tirar el dado una vez es 0, ya que no hay caras marcadas con el 9 en un dado común: *P(nueve)* = $^{0}/_{6}$ = 0.

Por el contrario, si un evento es cierto, debe tener una probabilidad de 1.00, o bien, del 100%. La probabilidad de una de las seis caras al tirar un dado, es *P*(uno, dos, tres, cuatro, cinco o seis) = $^{6}/_{6}$ = 1.00, si se supone con toda razón que el dado no caerá de lado.

La interpretación de una probabilidad clásica, como 0.25, es que si el experimento se repitiera un gran número de veces, un evento que presenta una probabilidad de 0.25 ocurrirá casi el 25% de las veces.

Las posibilidades y las probabilidades están estrechamente relacionadas. De hecho, las posibilidades son otra forma de expresar probabilidades. La única diferencia entre posibilidades y probabilidades es que las primeras comparan el número de resultados favorables con el de no favorables, mientras que las probabilidades establecen una comparación entre la cantidad de resultados favorables con el número total posible. Es decir, en lo que respecta a probabilidades, se tiene:

$$\frac{\text{número de resultados de la categoría } A}{\text{número total de resultados posibles}} = \frac{\text{número de resultados de } A}{\text{número en } A + \text{número que no están en } A}$$

y para las posibilidades se tiene

$$\frac{\text{número de resultados de la categoría } A}{\text{número de resultados que no están en } A}$$

Las posibilidades se pueden expresar en forma fraccionaria, según se mostró anteriormente, o bien, se pueden expresar en la forma equivalente de una razón:

posibilidades en favor de *A* = número de resultados de *A*: número de otros resultados

Considérense algunos ejemplos. Supóngase que se tiene una urna con 10 canicas: 8 rojas y 2 verdes. La probabilidad de elegir una canica verde en el primer intento es:

$$P(\text{verde}) = \frac{2}{2+8}$$

que se puede reducir a $^1/_5$. Las *posibilidades* en favor de las verdes son 2 : 8, que se pueden reducir a 1 : 4. También

$$P(\text{roja}) = \frac{2}{8+2} = \frac{8}{10}$$

o bien $^4/_5$, en tanto que las posibilidades de sacar una roja son 8 : 2, o bien, 4 : 1.

Las posibilidades en favor de un evento equivalen a la razón entre el número de resultados favorables y el número de resultados no favorables.

Las posibilidades de que caiga cara, al tirar una moneda son 1 : 1 (que se lee "uno a uno"). Una expresión equivalente es que las posibilidades están 50 : 50 en favor de que caiga cara.

Las posibilidades en contra de un evento son

posibilidades en contra = número de resultados que no están en A: número de resultados de A

De este modo, las posibilidades en contra de tirar un dado y obtener dos puntos serían 5 : 1, y las posibilidades en contra de sacar un rey de un mazo de 52 cartas sería 48 : 4. Consultar la tabla 3.1.

Una característica importante de las probabilidades clásicas es que proporcionan una explicación de la probabilidad intuitiva y fácil de visualizar, especialmente cuando se explican en términos de casos sencillos, como el tiro de una moneda o de un dado. Además, en la vida real existen numerosos ejemplos análogos a éstos. No obstante, la característica más significativa del enfoque clásico, es que es la base del muestreo aleatorio, concepto fundamental en la mayor parte de la teoría de la inferencia estadística moderna. Por tanto, el término "muestra aleatoria" generalmente denota que todos los elementos de una población tienen la misma posibilidad de ser incluidos en la muestra.

TABLA 3.1 Posibilidades y probabilidades comparadas

			Posibilidades	
Experimento	Evento	P(evento)	En favor	En contra
lanzar una vez una moneda	cara	$\frac{1}{2}$	1 : 1	1 : 1
tirar una vez un dado	cae 3	$\frac{1}{6}$	1 : 5	5 : 1
sacar una carta de una baraja de 52	sacar un 6 rojo	$\frac{2}{52}$	2 : 50	50 : 2
sacar una carta de una baraja de 52	sacar una sota de diamantes	$\frac{1}{52}$	1 : 51	51 : 1

Frecuencia relativa a largo plazo

El enfoque clásico de la asignación de probabilidades se ve limitado a situaciones en las que los resultados son igualmente probables. Como cabría pensar, son muchos los casos en los que los resultados no son de ese tipo. Por ejemplo, supóngase que se tiene una moneda un tanto irregular y esto le hace preguntarse si es igualmente probable que caiga cara o cruz. Una forma de dar respuesta, a esta pregunta es obtener algunos datos empíricos en un intento por estimar las probabilidades. De este modo, puede ser razonable pensar en lanzar la moneda cierto número de veces y observar los resultados a modo de experimento sencillo, para probar el supuesto de que se obtienen resultados igualmente probables. Si se tira la moneda, digamos 100 veces, y cae cara 60 puede ser razonable estimar la probabilidad de caras respecto de tiradas futuras como $^{60}/_{100} = 0.60$. De manera semejante, si los informes de laboratorio indican que cuando a 25 ratones se les administraron dosis iguales de un fármaco las lenguas de 20 de ellos adquirieron un color verde claro, entonces es posible utilizar este porcentaje ($^{20}/_{25} = 0.80$) como una estimación de la probabilidad real de que este evento ocurra en condiciones idénticas.

Por tanto, según el enfoque de frecuencia relativa de la probabilidad, se tiene la siguiente definición:

$$P(A) = \frac{\text{número de veces que ocurre } A}{\text{número total de ensayos u observaciones}}$$

Actualmente no es del todo esencial realizar un “experimento” para obtener datos de muestreo. En muchos casos, se dispondrá de información “histórica”, la cual se puede utilizar precisamente de la misma manera. Estos datos históricos pueden estar publicados como resultado de ensayos anteriores o simplemente como información acumulada en los archivos de una empresa. Por ejemplo, los registros de una compañía de bienes raíces pueden revelar que en un periodo de 16 días, la frecuencia de casas vendidas por día fue de:

Número de casas vendidas	*Número de días*
0	*3*

1	*2*
2	*5*
3	*6*
	16

Si suponemos que el pasado es representativo del futuro (lo que no siempre es el caso), se pueden determinar las siguientes probabilidades: $P(0) = {}^{3}/_{16}$, $P(1) = {}^{2}/_{16}$, $P(2) = {}^{5}/_{16}$ y $P(3) = 6/_{16}$.

De esta manera, de acuerdo con el concepto de frecuencia a largo plazo de la probabilidad, imaginemos que este mismo conjunto de condiciones se repite muchas veces y posteriormente tratemos de contestar la pregunta, “¿qué porcentaje de veces ocurrirá el evento en cuestión?” Por ejemplo, se vendieron dos casas en 5 de 16 días, por lo que la estimación de la probabilidad de que ocurra tal acontecimiento sería ${}^{5}/_{16}$. En forma semejante, cabría estimar la probabilidad de vender tres casas en un día en ${}^{6}/_{16}$. Así, mediante el enfoque empírico, se considera la probabilidad como la proporción o frecuencia relativa con la que ocurre un evento.

Cuando se emplea el enfoque empírico, es importante tomar en cuenta los siguientes puntos:

1. La probabilidad obtenida de esa manera es únicamente una estimación del valor real.

El solo hecho de tirar una moneda 10 veces y obtener cuatro caras no es garantía de que caerán cuatro caras cada vez que se hagan 10 tiradas. De ahí que la prueba empírica generalmente no nos proporcione una probabilidad exacta.

2. Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, tanto mejor será la estimación de la probabilidad.

Es importante la cantidad de observaciones que se lleven a cabo en términos generales, cuanto mayor sea ésta (es decir, el tamaño de la muestra), mejor será el cálculo de la frecuencia relativa. En páginas posteriores se tratará este asunto con mayor detalle. Por ahora, se tendrá que aceptar una explicación intuitiva: considérese que sólo se lanza la moneda una vez, e intente dilucidar si caerá cara. La muestra siempre resultará, ya sea en 100% de caras o en 0. Incluso una muestra de dos observaciones debe dejar cierta duda respecto a la probabilidad verdadera de que caiga cara. Por otra parte, después de cien o más tiros indudablemente se tendrá mayor confianza para evaluar la probabilidad de que caiga cara. Teóricamente, la definición de frecuencia relativa de la probabilidad de A es la razón o fracción de veces que el evento A ocurre, a medida que aumenta al infinito el número de observaciones.

3. La probabilidad es propia de sólo un conjunto de condiciones idénticas a aquéllas en las que se obtuvieron los datos.

La validez de emplear el enfoque de frecuencia relativa depende de la “igualación” de dos conjuntos de condiciones. Es evidente que fuera de las ciencias fisicas, suele resultar difícil o imposible acatar las condiciones con exactitud. Por desgracia, en la mayoría de las situaciones empresariales no es posible controlar todos los factores que intervienen. Con esto se sugiere que las proporciones resultantes deben considerarse como aproximaciones menos exactas que las que se pueden obtener mediante una experimentación más controlada. En consecuencia, el grado de confianza que se le da a estas probabilidades debe tomar en cuenta el grado de discrepancia que hay entre las condiciones en las que se reúnen los datos y aquéllas en las cuales se habrán de aplicar las probabilidades resultantes.

Posibilidades y frecuencias relativas

Cuando se utilizan frecuencias relativas, la definición correspondiente a las posibilidades se convierte en

posibilidades en favor de *A* = número de veces que *A* ocurre: número de veces que *A* no ocurre

posibilidad en contra de *A* = número de veces que *A* no ocurre: número de veces que *A* ocurre

Por ejemplo, en el caso de la moneda, 60 veces cayó cara y 40 veces cruz. Por tanto, la estimación de las posibilidades de que caiga cara en la primera tirada sería 60 : 40, en tanto que el cálculo de las posibilidades de que no caiga cara sería de 40 : 60. En forma similar, si el meteorólogo afirma que la probabilidad de lluvia es de 20% (lo cual también se puede expresar como $^1/_5$), se refiere esencialmente a que las posibilidades en favor de la lluvia son de 20% : 80%, o bien, 1 : 4.

Enfoque subjetivo de las probabilidades

Las probabilidades obtenidas mediante el enfoque clásico o el empírico reciben el nombre de probabilidades objetivas, ya que se derivan de hechos. Sin embargo, existen numerosas situaciones en las que no se puede emplear el enfoque objetivo -es decir, situaciones en las que los resultados no son igualmente probables, y no se dispone fácilmente de datos históricos. En estos casos, se debe hacer una evaluación “subjetiva” de la probabilidad. Por ejemplo, ¿se enamorará usted la próxima semana? ¿Qué calificación obtendrá en su siguiente examen? ¿Cuándo estallará la huelga laboral? ¿Crecerá un árbol derecho y alto? ¿Se podrá recobrar una persona gravemente enferma? En ejemplos como éstos alguien debe establecer la “probabilidad” del evento en dichas condiciones.

A menudo es útil imaginar un gran número de situaciones como las anteriores, y después tratar de contestar esta pregunta: “¿qué porcentaje de estas situaciones producirá el evento en cuestión?” Esto se puede llevar a cabo aun cuando no sea práctico realizar dicho experimento, y, excepto por el hecho de que generalmente los datos no se pueden recopilar, el enfoque subjetivo es muy semejante al de frecuencia relativa. Por lo tanto, la probabilidad subjetiva se define como:

La probabilidad subjetiva es una evaluación personal de la posibilidad de que ocurra un evento.

Las probabilidades subjetivas son el resultado de un esfuerzo por cuantificar nuestros. sentimientos o creencias respecto a algo. Los abogados, los médicos y casi todos los hombres de negocios utilizan este enfoque satisfactoriamente, a pesar de que dicho enfoque presenta ciertas desventajas, entre las cuales se encuentran las siguientes:

1. Las estimaciones subjetivas suelen ser difíciles de comprobar si son cuestionadas.
2. Los prejuicios pueden influir. Las ideas preconcebidas respecto a lo que debería suceder pueden afectar la objetividad, así como los sentimientos acerca de lo que uno quiere que suceda. Algunas veces es difícil eliminar estos prejuicios, ya que por lo regular son inconscientes. La capacidad, experiencia y actitud profesional pueden ayudar a superar tales dificultades.

EJERCICIOS

1. Con una sola carta de un mazo de 52 cartas bien barajado, señale la probabilidad - de obtener las siguientes:

   a. Una sota b. Una carta con figura.

   c. Una carta roja d. Un diamante

   e. Un diez de tréboles f. Un nueve rojo o un ocho negro

2. Enumere los posibles resultados al tirar un solo dado. Calcule la probabilidad de cada resultado y sume cada uno de ellos.
3. Un dado no cargado se tira una sola vez; halle qué probabilidad hay de obtener lo siguiente.

   a. Un seis b. Un cinco, seis o siete

   c. Una cara con un número par d. Un número menor de cuatro

4. Hay 50 canicas en una urna:

Color	*Número*
Azul	*20*
Rojo	*15*
Naranja	*10*
Verde	*5*
	50

   Las canicas se mezclan y se selecciona una. Obtenga la probabilidad de que la que se saque sea:

   a. Verde b. Azul

   c. Azul o verde d. Diferente a roja

   e. Roja o verde f. Amarilla

   g. Diferente de amarilla

5. Se numeran diez fichas del 0 al 9, y se colocan en una urna. Si mezcladas una vez saca una ficha, determine la probabilidad de que sea:

   a. El número 3 b. Un número impar

c. Un número menor que 4 d. El número 10

6. El neumático del auto de un individuo tiene un vidrio o un clavo y el 20% del neumático es visible. Si el automovilista se detiene, ¿cuál es la probabilidad de que la piedra o clavo quede en la parte visible?
7. Hay 100 canicas en una urna. Cincuenta son rojas, treinta, blancas y el resto, azules.
   a. ¿Qué porcentaje de las canicas son rojas?
   b. Si se mezclan las canicas y se saca una de ellas, obten, a P(roja).
   c. Determine la probabilidad de que la canica seleccionad no sea roja.
   d. Calcule la probabilidad de que la canica sea azul.
   e. Halle la probabilidad de que la canica sea roja o azul.
8. ¿Cuál es la probabilidad de adivinar el día de la semana (por ejemplo, martes) en que nació Napoleón? ¿George Washington? ¿Qué suposiciones ,arfa? ¿Le parece razonable dicha suposición?
9. Sólo se probará un fusible de un grupo de 10. Determine el P(defectuoso) si
   a. Un fusible está dañado.
   b. Dos fusibles están dañados.
   c. Tres están dañados.
10. Se debe cambiar una bujía de un motor de seis por estar defectuosa. Si dos de ellas se encuentran colocadas de tal manera que resulta difícil cambiarlas:
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que la bujía defectuosa se encuentre en e e sitio “difícil”?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que la bujía defectuosa no esté en dicho sitio “difícil”?
    c. ¿Cuál es la probabilidad de que el automovilista cargue todo el conjunto de bujías?
11. Determine las posibilidades favorables de sacar una reina de un mazo de 52 cartas. ¿Cuáles son las posibilidades en contra de esto?
12. Obtenga las posibilidades favorables de sacar una carta con figura, de un mazo de 52 naipes.
13. ¿Cuáles son las posibilidades favorables de tirar una moneda dos veces y de que en ambas ocasiones caiga cara. (Sugerencia: se deberán considerar todos los resultados posibles, tales como HT, TT, etc.)
14. La probabilidad de que llueva es del 30%. ¿Cuáles son las posibilidades de que llueva? ¿De que no llueva? (Recuerde que la probabilidad se define como la

razón de formas favorables con respecto a las formas totales, y que el total es igual a favorable + no favorable.)

15. Un pronosticador deportivo establece que las posibilidades de que el equipo de los "Cachorros" llegue a la serie mundial, son 38 : 52.

    a. ¿Cuál es la probabilidad de que este equipo llegue a la serie mundial, según esta predicción?

    b. ¿Cuáles son las posibilidades en contra de que esto ocurra?

16. Nueve de diez veces que Juan telefonea a su esposa a las cuatro de la tarde en punto, ella está hablando con su mamá, por lo que oye la señal de ocupado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga señal de ocupado si hoy también llama a las cuatro horas en punto? ¿Cuáles son posibilidades de que el teléfono esté ocupado?

17. Una muestra aleatoria de 40 prisioneros indica que diez tienen la presión sanguínea alta. Estime la probabilidad que presentará otro presidiario, al ser examinado, de tener la presión sanguínea alta. ¿Cuáles son las posibilidades de que no tenga la presión sanguínea alta?

18. Los datos reunidos por el administrador de un supermercado indican que 915 de 1500 compras dominicales exceden de $ 10.00 (dólares). Calcule la probabilidad de que cualquier cliente dominical gastará más de $ 10.00 (dólares).

19. Un camión cargado con 10 000 cajas de pañuelos desechables llega al almacén. En las cajas hay un letrero que dice "400 pañuelos", pero una revisión de 300 cajas revela que 45 de ellas contienen menos de 400 pañuelos. Calcule la probabilidad de que cualquier otra caja de la carga contenga menos de 400 pañuelos.

20. En una encuesta acerca del tránsito que hay de las 5 a las 6 a.m. en una sección de una autopista estatal, se observó que de 200 automóviles sometidos a una revisión de seguridad, al azar, 25 tenían neumáticos en mal estado. Estime la probabilidad de que un auto que se detiene en ese lapso en la misma sección de la autopista no tenga neumáticos defectuosos.

21. Los datos locales sobre el clima de los últimos cien años indican que la temperatura más alta registrada en el primer día del verano excede de 30°C en 79 de los años examinados.

    a. Calcule la probabilidad de que este año el primer día de verano la temperatura exceda de 30°C.

    b. ¿A qué supuesto llegaría en lo referente a la semejanza que hay entre esos años? ¿Se trata de una suposición razonable?

22. Los registros del servicio de salas de emergencia de un hospital indican lo siguiente en lo referente a un periodo de dos años:

    a. ¿Qué supuesto se deberá hacer antes de utilizar el enfoque de frecuencia relativa a largo plazo para generar probabilidades con estos datos?

ataque del corazón	*12%*
enfermedades respiratorias	*20%*
víctimas de accidentes	*32%*
envenamiento	*16%*
otros	*20%*
	100%

b. Suponiendo que esto sea razonable, encontrar P(accidente o ataque al corazón).

c. ¿Cuál es la probabilidad de que los pacientes no sufran una enfermedad respiratoria?

23. Se tira una moneda 10 veces, obteniéndose seis caras. La misma moneda se arroja 10 veces más, dando como resultado cuatro caras. a. Estimar P(cara) sobre la base de la primera muestra de 10 observaciones. b. Calcular Pícara) sobre la base de la segunda muestra de 10 observaciones. c. Estimar P(cara) con base en la muestra combinada de 20 observaciones.

24. Repita el ejercicio 23 en el caso de P(cruces).

25. Juan y Tomás se encuentran una moneda vieja. Revisándola cuidadosamente resulta que la moneda ha sido alterada, de manera que un lado tendrá más posibilidades que el otro. Juan decide verificarlo, por lo que lanza la moneda 40 veces, observando que 24 veces cae cara. Posteriormente, Tomás lanza la moneda 50 veces y obtiene 28 caras.

    a. ¿Es posible afirmar que Juan o Tomás obtuvieron definitivamente una frecuencia relativa a largo plazo? ¿Por qué?

    b. Si se elige uno de los dos resultados, ¿Cuál podría elegirse, y por qué?

26. Un vendedor de seguros estima que la probabilidad de vender un seguro de vida por $ 10 000 a un matrimonio de recién casados es de $^{2}/_{5}$. ¿Qué posibilidades hay de que esto suceda, suponiendo que la valoración sea correcta?

27. Un alumno cree que las posibilidades que tiene de aprobar el examen de admisión para la escuela de medicina son de 2 : 13. ¿Cuál es la estimación subjetiva del alumno de la probabilidad de ser aprobado?

28. Un entrenador de un equipo de fútbol escolar calcula que la probabilidad de que su equipo gane el partido de esta semana es de $^{4}/_{7}$. ¿Qué posibilidades de perder concordaría con el cálculo de entrenador?

29. Estime la probabilidad de que llueva el próximo domingo. ¿En que factores basaría su cálculo?

30. El presidente de un banco estima que existe una probabilidad del 90% de que una rebaja impositiva redunde en un gasto inflacionario, de ser aprobada por el Congreso. Interprete el 90%.

LAS MATEMÁTICAS DE LA PROBABILIDAD

Hasta ahora nos hemos concentrado en las diversas definiciones de probabilidad y en la forma como dichas definiciones se pueden utilizar para determinar la probabilidad de cierto evento. Estas ideas son importantes, pero no proporcionan la información suficiente para poder comprender realmente en qué forma se pueden utilizar las probabilidades en la toma de decisiones.

Muchas aplicaciones de la estadística requieren de la determinación de probabilidades de combinaciones de eventos. Existen dos categorías de combinaciones. Supóngase que se han identificado dos eventos de interés en el espacio muestral, *A* y *B*. En algunas situaciones será necesario encontrar la probabilidad *P(A y B)*, que es la probabilidad de que ambos eventos ocurran. Otras veces desearemos encontrar la probabilidad de que ocurra ya sea *A o B, P(A o B)*. Por ejemplo, supóngase que hay dos ascensores en un edificio. Partiendo de datos históricos se puede obtener la probabilidad de que un ascensor esté funcionando. Alguien podría preguntar; "¿cuál es la probabilidad de que ambos estén funcionando?" Esto denota *P(A y B)*. O bien, alguien desearía saber, "¿qué probabilidad hay de que ninguno de los dos esté funcionando?" Esto implica *P(A o B)*.

Es importante poder identificar cuál de las dos combinaciones se habrá de utilizar. La clave real es la siguiente:

"ambos" implica P(A y B)

"ya sea... o" implica P(A o B)

Cálculo de la probabilidad de que ocurran dos eventos: P(A y B)

La probabilidad de que dos eventos ocurran recibe el nombre de probabilidad conjunta, y su cálculo difiere, dependiendo de si los eventos en cuestión son independientes o no.

Se considera que dos eventos son independientes entre sí, cuando la ocurrencia de un evento no está relacionada con la ocurrencia del otro. Si se tiran dos dados, saber el número de puntos obtenido por un dado no servirá para predecir cuanto se obtendrá con el otro. Asimismo, colocar un texto de matemáticas junto a la cabecera de la cama y obtener uña calificación alta en el examen de matemáticas quizá tampoco tengan relación. Lo mismo sucedería respecto al sexo (es decir, varón o hembra) y al IQ.

Por otra parte, si los eventos son dependientes, entonces saber que uno ha ocurrido puede ser útil para predecir la ocurrencia del otro. Una flor necesita agua para crecer. Un niño generalmente llora cuando se lastima. Un espejo suele romperse si se le deja caer. Saber que una flor no ha sido regada puede indicar algo en lo referente a la probabilidad de su crecimiento. Cuando se observa que un niño se ha lastimado, se espera que llore. Y aún antes de que el espejo caiga al piso, prevemos que se requerirá la escoba.

Se dice que dos o más eventos son independientes si la ocurrencia o no ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del(os) otro(s).

Si dos eventos son independientes, entonces la probabilidad de que ambos ocurran es igual al producto de sus probabilidades individuales o "marginales":

$$P(A \text{ y } B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo 1 Se tiran dos monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas caigan cara?

Solución:

Es razonable suponer que los resultados de tirar las dos monedas son independientes entre sí. Además, se sabe que las monedas tienen *P(cara) = i*. Por tanto, *P(ambas caras)* equivale a:

$$\begin{array}{ccccc} \text{tirada 1} & & \text{tirada 2} & & \text{ambas} \\ \left(\frac{1}{2}\right) & \times & \left(\frac{1}{2}\right) & = & \frac{1}{4} \end{array}$$

Supóngase que se quiere aplicar esto a tres monedas. ¿Qué probabilidad se tiene de que las tres monedas caigan cara?

$$\begin{array}{ccccccc} \text{tirada 1} & & \text{tirada 2} & & \text{tirada 3} & & \text{las 3} \\ \left(\frac{1}{2}\right) & \times & \left(\frac{1}{2}\right) & \times & \left(\frac{1}{2}\right) & = & \frac{1}{8} \end{array}$$

Ejemplo 2 Un tercio de los votantes registrados en una comunidad rural son mujeres, y 40% de ellas votaron en la última elección presidencial. Suponiendo que estos dos eventos son independientes, hallar la probabilidad de seleccionar aleatoriamente de una lista global, a una mujer que haya votado en la última elección presidencial.

Solución:

$$P(\text{mujeres que votaron en la última elección}) = {}^{1}/_{3}\,(0.40) = 0.133$$

Ejemplo 3 Juan llega tarde a su casa para cenar el 25% de las veces. La cena se retrasa el 10% de las veces. Si los dos sucesos no están relacionados, ¿qué probabilidad hay de que ambos ocurran?

Solución:

$$P(\text{ambos se retrasen}) = P(\text{Juan se retrase})\ P(\text{la cena se retrase}) = (0.25)(0.10) = 0.025 \text{ ó } 2.5\%$$

Ejemplo 4 Se va a inspeccionar un enorme cargamento de cajas de chocolates rellenos de cacahuate. Los informes indican que el 2% de las cajas no están completamente llenas. De seleccionarse dos cajas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas estén incompletas, suponiendo que este cargamento sea igual al anterior (es decir, 2% de cajas incompletas).

Solución:

La probabilidad de que la primera caja seleccionada esté defectuosa es del 2%. Sin embargo, si se supone que la primera caja no se regresa al embarque antes de sacar la segunda, la probabilidad de que esta última esté incompleta variará ligeramente, dependiendo de los resultados de la primera caja. No obstante, si el cargamento es grande, el impacto será muchísimo menor y, para objetivos prácticos, P(incompleto) permanecerá casi igual. Por tanto

$$P(\text{ambas incompletas}) = (0.02)(0.02) = 0.0004$$

Si dos eventos *no son independientes*, el cálculo de *P(A y B)* deberá tomar esto en consideración. Supóngase que se tienen dos urnas con canicas. La primera contiene ocho rojas y dos blancas. La segunda contiene cinco rojas y cinco blancas. De este modo

	Roja	Blanca	Totales
Urna Y	8	2	10
Urna Z	5	5	10

Al sacar una canica de una de las urnas, de seleccionarse la primera, la probabilidad de que la canica sea roja es $^{8}/_{10}$. Si se elige la segunda, la probabilidad de que sea roja será $^{5}/_{10}$. Por tanto, *P*(roja) depende de la urna que se vaya a elegir. De esta manera, la probabilidad condicional de seleccionar una canica roja, suponiendo la urna *Y*, es $^{8}/_{10}$. Mediante símbolos esto se representará como *P*(roja | urna *Y*). La línea vertical | significa "suponiendo la urna *Y*" o bien "dada la urna *Y*", o bien "si se selecciona la urna *Y*". Por otra parte, es evidente que

$$P(\text{roja} \mid \text{urna } Z) = {}^{5}/_{10}$$

$$P(\text{blanca} \mid \text{urna } Y) = {}^{12}/_{10}$$

$$P(\text{blanca} \mid \text{urna } Z) = {}^{5}/_{10}$$

Supóngase ahora que las urnas no están marcadas, y que la probabilidad de elegir cualquiera de las dos es $^{1}/_{2}$: $P(Y) = {}^{1}/_{2} = P(Z)$. Cuál es la probabilidad de sacar una canica roja de la urna *Z*? En el cálculo se deben considerar dos aspectos: para empezar, la probabilidad de elegir la urna *Z*, y además la probabilidad de obtener una canica roja, suponiendo que se eligió esta última:

$$P(\text{urna } Z) = {}^{1}/_{2} \quad P(\text{roja} \mid \text{urna } Z) = {}^{5}/_{10}$$

$$P(\text{urna } Z \text{ y roja}) = P(\text{urna } Z)\text{P}(\text{roja} \mid \text{urna } Z)$$

$$= ({}^{1}/_{2})\,({}^{5}/_{10}) = {}^{5}/_{20} = {}^{1}/_{4}$$

De manera semejante, podemos calcular

$$\boldsymbol{P}(\textbf{urna } \boldsymbol{Y})\boldsymbol{P}(\textbf{roja} \mid \textbf{urna } \boldsymbol{Y}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{8}{10}) = \tfrac{8}{20} = \mathbf{0.40}$$

De este modo, como regla general, se puede decir que la probabilidad conjunta de dos eventos dependientes es igual a la probabilidad de un evento multiplicado por la probabilidad condicional del otro:

$$P(A \text{ y } B) = P(A)P(B \mid A)$$

Dado que no tiene importancia saber qué evento es A y cuál es B, se llega a la siguiente expresión:

$$P(A \text{ y } B) = P(B)\, P(A \mid B)$$

Obsérvese que si dos eventos son mutuamente excluyentes como, “la canica es roja” y “la canica es blanca”, entonces sus probabilidades condicionales son 0, ya que, por definición, no pueden ocurrir ambos. Es decir

$$P(\text{roja} \mid \text{blanca}) = 0 \text{ y } P(\text{blanca} \mid \text{roja}) = 0$$

Por último, cuando dos eventos son independientes, saber que un evento ha ocurrido no nos dice nada respecto al otro. Por tanto

$$P(A \mid B) = P(A) \text{ y } P(B \mid A) = P(B)$$

Una importante aplicación de las probabilidades condicionales es el teorema de Bayes, que se estudiará en la última sección de este capítulo.

Cálculo de la probabilidad de que por lo menos *P(A o B)*

La regla de adición se utiliza para determinar la probabilidad de que ocurra alguno de los dos eventos o ambos. El cálculo difiere, según sean los eventos mutuamente excluyentes o no.

Cuando los eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que uno suceda (por definición, no puede presentarse más de uno) equivale a la suma de cada una de sus probabilidades. En el caso de dos eventos A y B se tiene:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Por ejemplo, la probabilidad de que al tirar un dado se obtenga un resultado de cinco o seis puntos es

$$P(\text{cinco}) + P(\text{seis}) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{6}$$

Del mismo modo, la probabilidad de sacar al primer intento una carta de corazones o una de tréboles de un mazo de 52 cartas, es

$$P(\text{corazones}) + P(\text{tréboles}) = \tfrac{13}{52} + \tfrac{13}{52} = \tfrac{26}{52} = \tfrac{1}{2}$$

Cuando dos eventos no son mutuamente excluyentes, ambos pueden suceder. En esta situación, el cálculo de la probabilidad debe tener en cuenta el hecho de que ya sea uno de ellos, o ambos, pueden ocurrir. Como ejemplo, supóngase que se quiere determinar la probabilidad de sacar un trébol o un 10 de un mazo de 52 cartas. Como una carta puede ser ambos casos, los eventos “diez” y “trébol” no son mutuamente excluyentes. Simplemente sumar sus probabilidades individuales exagerará la probabilidad real, ya que el 10 de tréboles se contará dos veces, una vez como diez y una vez como trébol, según se observa en la figura 3.4. En consecuencia, se debe restar la probabilidad de que se superpongan si se quiere evitar tener este problema. En un mazo de 52 cartas hay 13 tréboles, 4 cartas con el número 10, y un 10 de tréboles. Por tanto, $P(\text{tréboles}) = {}^{13}/_{52}$, $P(\text{dieces}) = {}^{4}/_{52}$, y $P(\text{diez de tréboles}) = {}^{1}/_{52}$. Así

$$P(\text{trébol o número diez o ambas cosas}) = P(\text{tréboles}) + P(\text{dieces}) - P(\text{diez de tréboles})$$
$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

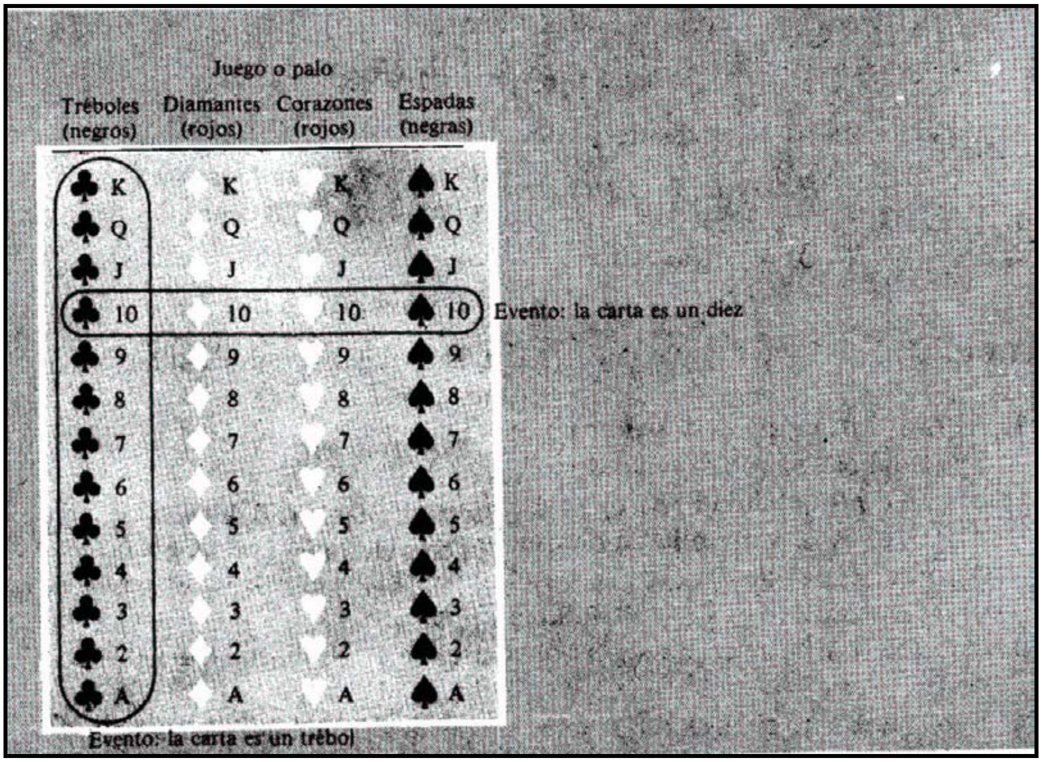


FIGURA 3.4 Los eventos "trébol" y "diez'.' se superponen.

Otra forma de interpretar lo anterior es comprobar y observar que se ha incluido la probabilidad de que ambos se presenten en dos formas; es decir, como la probabilidad de un trébol y también como la de un diez. Por tanto, se debe restar la probabilidad conjunta de obtener una carta que sea número diez y una que sea de tréboles. La probabilidad conjunta es el producto de las dos probabilidades marginales* $(\frac{13}{52}$ y $\frac{4}{52})$, o bien, $\frac{13}{52} \times \frac{4}{52}$, lo cual suma $\frac{13}{52} + \frac{4}{52} - (\frac{13}{52})(\frac{4}{52}) = \frac{16}{52}$.

En términos generales, se puede decir que si dos resultados, *A* y *B*, por ejemplo, son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que *A o B* o ambos ocurran, es igual a la suma de la probabilidad de *A* más la probabilidad de *B*: *P(A o B) = P(A) + P(B)*. Si dos resultados no son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ya sea que *A o B*, o ambos ocurran, es igual a la suma de la probabilidad de *A* más la probabilidad de *B* menos la probabilidad de que ambos ocurran: *P(A) + P(B) - P(A) • P(B)*.

REGLAS DE PROBABILIDAD
P(A o B), en el caso de eventos mutuamente excluyentes:
P(ya sea que A o B ocurran) = P(A) + P(B) para eventos que no sean mutuamente excluyentes:

* *Esto supone que los eventos son independientes. En general, es necesario conocer el valor de P(A y B).*

P(ya sea que A o B o ambos ocurran) = P(A) + P(B) - P(A y B) P(A y B), para eventos independientes:

P(A y B) = P(A)P(B) para eventos dependientes:

P(A y B) = P(B) + P(A | B) o P(A)P(BIA)

EJERCICIOS

1. Al tirar un par de dados no cargados.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos dados caigan en seis?
   b. ¿Qué probabilidad hay de que ambos dados caigan en dos?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos dados caigan en números pares?
2. Al tirar un par de dados, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean iguales? (Sugerencia: Utilice la probabilidad condicional.)
3. Conteste las mismas preguntas del ejercicio 1, pero esta vez respecto a tres dados.
4. Determine la probabilidad de sacar una sota de diamantes de un mazo de naipes, valiéndose de la siguiente información:

   A = diamante *P(A y B) = P(A)P(B | A)*

   B = sota

   Ahora utilice *P(A y B) = P(B)P(A | B)*, manteniendo *A* = diamante y *B* = sota.
5. Las descomposturas de máquinas son independientes entre sí. Se tienen cuatro máquinas, cuyas respectivas probabilidades de avería son 1%, 2%, 5% y 10% en un día particular, calcule las siguientes probabilidades:
   a. Todas se descomponen el mismo día.
   b. Ninguna se descompone.
6. Se vendieron 200 boletos para una rifa y usted compró dos de ellos. El premio es una docena de plátanos congelados. Los boletos se mezclarán muy bien en una gran urna, y un chimpancé amaestrado sacará los dos boletos ganadores.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que compró un boleto gane?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que usted obtenga un premio? ¿Dos premios? ¿Tres premios?
7. De.los estudiantes de una preparatoria, 30% son de primer año, 35% de segundo 20% de tercer y el resto son repetidores. Si uno de los alumnos ganó un millón de pesos en una lotería estatal, calcule las siguientes probabilidades:
   a. De que el alumno sea de tercer año.
   b. Que el alumno sea de primer o de segundo año.

c. Que el alumno no sea de primer año.

d. Que el Estado se niegue a entregarle el premio, por ser menor de edad.

8. Suponga que *P(A) = 0.30, P(B) = 0.80 y P(A y B) = 0.15.*

a. ¿Son mutuamente excluyentes *A y B*. Explíquelo.

b. Encuentre *P(B')*

c. Obtenga *P(A o B)*.

9. Suponga que *A o B* son dos eventos mutuamente excluyentes y que *P(A)* = 0.31 y *P(B)* = 0.29

a. ¿Son *A y B* colectivamente exhaustivos? Explíquelo.

b. Encuentre *P(A o B)*.

c. Obtenga *P(A o B)'*.

d. Halle *P(A y B)*.

10. Al tirar tres veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga cruz las tres veces? ¿Qué probabilidad hay de que esto no suceda?

11. Si en cada uno de los tres lotes de marcos para cuadros, un 10% presenta defectos de fabricación, ¿qué probabilidad hay de que un inspector no encuentre algún defecto si inspecciona cada uno de los tres lotes?

12. Al lanzar una moneda al aire cuatro veces, se presentan las siguientes probabilidades en lo referente al número de caras que se obtendrán:

$$P(O) = 0.0625$$
$$P(1) = 0.2500$$
$$P(2) = 0.3750$$
$$P(3) = 0.2500$$
$$P(4) = 0.0625$$

Halle la probabilidad en cada uno de los casos siguientes, de que caigan:

a. Una o dos caras.

b. Menos de tres caras.

c. Cinco caras.

d. Más de tres caras.

e. Menos de dos o más de tres caras.

13. El periódico informa que hay el 40% ¢e probabilidades de que hoy llueva. Luis considera que las posibilidades de que apruebe su examen de estadística son 3 : 5. Suponiendo que estos eventos son independientes, determine lo siguiente:

a. *P*(que llueva y apruebe)

b. *P*(que no llueva y no apruebe)

14. Al sacar una carta de dos mazos de 52 naipes. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los siguientes eventos?

    a. Ambas rojas.

    b. Ambas tréboles.

    c. Ambas con figura (J, K, Q de cualquier tipo).

    d. Un corazón y un diamante.

    e. Un trébol y un corazón o un diamante.

15. ¿Cuáles serian sus respuestas al ejercicio anterior si las dos cartas se sacan del mismo mazo sin regresar la primera carta a su lugar antes de sacar la segunda?

16. Las probabilidades de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 6 7 accidentes durante un fin de semana entre la 1 a.m. y 6 a.m., son, respectivamente, 0.08, 0.15, 0.20, 0.25, 0.18, 0.07, 0.04 y 0.01. Calcule la probabilidad de que en cualquier fin de semana entre esas horas de la mañana suceda lo siguiente:

    a. Menos de tres accidentes.

    b. Tres o menos accidentes.

    c. Exactamente tres accidentes.

    d. Ningún accidente.,

    e. Más de siete accidentes.

17. Una compañía que fabrica cristalería cuenta con un proceso de inspección que consta de cuatro pasos. Los directivos de la compañía afirman que la probabilidad de que un artículo defectuoso no sea detectado es de casi el 20%. Con esta cifra del 20%, encuentre la probabilidad de que un artículo defectuoso pase las cuatro etapas de inspección sin ser detectado. ¿Cuál sería su respuesta si se agregara una quinta etapa, con una probabilidad de 50% de detectar los artículos defectuosos?

18. La probabilidad de que una máquina produzca una tuerca hexagonal aceptable es del 90%. Si las piezas sucesivas son independientes entre sí (un supuesto generalmente razonable, si el proceso está “bajo control”), encuentre la probabilidad de obtener lo siguiente:

    a. Dos piezas seguidas qué no sean aceptables.

    b. Una pieza aceptable y una pieza defectuosa, en ese orden.

    c. Una pieza aceptable y una pieza defectuosa, en cualquier orden.

    d. Tres piezas defectuosas seguidas.

19. Obtenga la probabilidad de que Alexander Hamilton y Thomas Jefferson hayan nacido el mismo día de la semana.

20. Si en la anterior pregunta se cambiara la palabra “día” por “mes”, ¿en qué forma se estaría simplificando el supuesto? ¿Por qué?

21. Muchos fanáticos de los deportes conocen la habilidad de Jaime alias, el Romano para pronosticar quienes serán los equipos ganadores en fútbol. Observaron que sucede a razón de 0.80. Jaime elige los ganadores de los cuatro partidos próximos. Encuentre probabilidades de que:

    a. Todos los pronósticos de los juegos sean correctos.

    b. Ninguno sea correcto

    c. Uno sea incorrecto.

    d. Tres sean incorrectos.

22. Una compañía de exploración petrolera perfora un pozo si considera que existe por lo menos un 25% de posibilidad de encontrar petróleo. Si perfora cuatro pozos, a los que se les asignan las probabilidades 0.3, 0.4, 0.7 y 0.8:

    a. encontrar la probabilidad de que de ninguno de los pozos se obtenga petróleo, utilizando las cifras de la compañía.

    b. calcular la probabilidad de que los cuatro pozos produzcan petróleo.

    c. ¿cuál es la probabilidad de que los pozos con una probabilidad de 0.3 y 0.7 produzcan petróleo, y los otros no?

23. Miguel tiene dos juguetes viejos. En las mañanas frías hay un 20% de posibilidad de que uno no funcione, y un 30% de que el otro tampoco:

    a. Encuentre la probabilidad de que ninguno funcione.

    b. Halle la probabilidad de que solamente uno funcione.

24. Una florería garantiza que “el 90% de las semillas que contienen sus paquetes germinarán”. Suponga que cada semilla tiene un 90% de probabilidad de que germine, y que cada paquete contiene cinco semillas.

    a. Encuentre la probabilidad de que ninguna germine.

    b. Calcule la probabilidad de que todas germinen.

25. José espera ansiosamente las calificaciones de dos cursos que recientemente terminó. Considera que hay 0.80 de probabilidad de obtener A en literatura y un 0.40 de probabilidad de obtener A en filosofía. Encuentre las probabilidades de estos resultados:

    a. Ambas calificaciones sean A.

    b. Ninguna sea A.

    c. En literatura obtenga A, pero

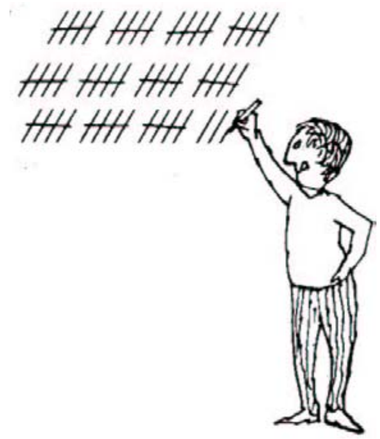
    d. Ninguna de las anteriores no en filosofía

26. Un paquete que contiene una mezcla de semillas de flores de distintos colores contiene cuatro semillas para flores rojas, tres para amarillas, dos para moradas y una para color naranja.
    a. Si se selecciona una semilla de la mezcla, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja o naranja?
    b. Si se sacan dos semillas del paquete, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean amarillas? ¿Rojas?
    c. Si se sacan tres semillas, ¿cuál es la probabilidad de que una sea color naranja y dos sean amarillas
    d. Si se escogen tres semillas, ¿cuál es la probabilidad de que una sea color naranja?
27. Continuando con el mismo ejercicio, si cada semilla tiene un 60% de probabilidad de germinar, ¿cuáles son las probabilidades de llegar a los siguientes resultados?
    a. Todas germinen, excepto las de color naranja.
    b. Germinen todas las amarillas.
    c. Ninguna de las amarillas germine.

TÉCNICAS DE CONTEO

Para utilizar el enfoque clásico de la probabilidad (a priori), es necesario conocer el número total de resultados posibles de una muestra o experimento. Las técnicas de conteo generalmente se utilizan como un medio para determinar el número total de resultados. Ya se presentaron diversas técnicas de conteo sencillas. Por ejemplo, en muchas de las ilustraciones anteriores fue conveniente listar los resultados. Esto nos permitió verificar objetivamente los resultados para ver si se consideraron todos los ordenamientos posibles.

Un refinamiento de la técnica de listado es utilizar los árboles de decisión, que proporcionan una base racional para desarrollar una lista de resultados. Sin embargo, cuando es considerable el número de resultados, los métodos de listado se hacen muy engorrosos, y es necesario recurrir a fórmulas matemáticas para determinar el número total de resultados posibles. Considérense cada uno de los siguientes métodos.



Supóngase que un estudiante presenta un examen con 20 preguntas de verdaderofalso. Supóngase también que está adivinando todas las preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que resuelva correctamente el examen? Para solucionar este problema en primer lugar es necesario determinar el número total de resultados posibles (modelo). Por ejemplo, puede decidir contestar todas las preguntas con verdadero o todas con falso, bien, puede alternar verdadero y falso, o mezclarlas aleatoriamente.

Más que intentar resolver este problema directamente, será más instructivo explorar primero las versiones por etapas. Por tanto, imagínese que el examen consta de una sola pregunta. Las posibilidades serían V o F. Si fueran dos preguntas, estas posibilidades serían VV, VF, FV, FF. En el caso de que fueran tres preguntas, las posibilidades serían VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF. Evidentemente, a medida que aumenta el número de preguntas, aumenta el número de resultados, pero en una proporción más rápida según se muestra a continuación.

Número de preguntas	1 2 3 4
Número de resultados	2 4 8 16

De hecho, a menos que la cantidad de elementos que se habrá de considerar sea muy pequeño, el número de resultados puede ser bastante grande. En estos casos puede ser muy tedioso utilizar el listado. Quizá más importante aún es el hecho de que es fácil examinar algunas de las posibilidades.

Los diagramas de árbol proporcionan un método sistemático de enumeración de los resultados así como una presentación visual. Estos diagramas se pueden elaborar fácilmente y son más iluminadores que las simples listas. En la figura 3.5 se presenta un diagrama de árbol para tres preguntas de verdadero-falso. Como los estudiantes tienen dos opciones posibles para cada pregunta, V o F, el árbol presenta dos ramas en cada pregunta.

Al ampliar el diagrama de árbol, es posible enumerar los resultados con más preguntas de verdadero-falso. Sin embargo, no sería práctico hacerlo, debido a que el número de posibilidades aumenta considerablemente. Sin embargo, lo que realmente se requiere, es determinar el número total de resultados; no se obtendría nada al identificar cada uno de ellos. Por fortuna, hay una forma sencilla de estimar el número total sin tener realmente que contar-cada resultado en forma aislada.

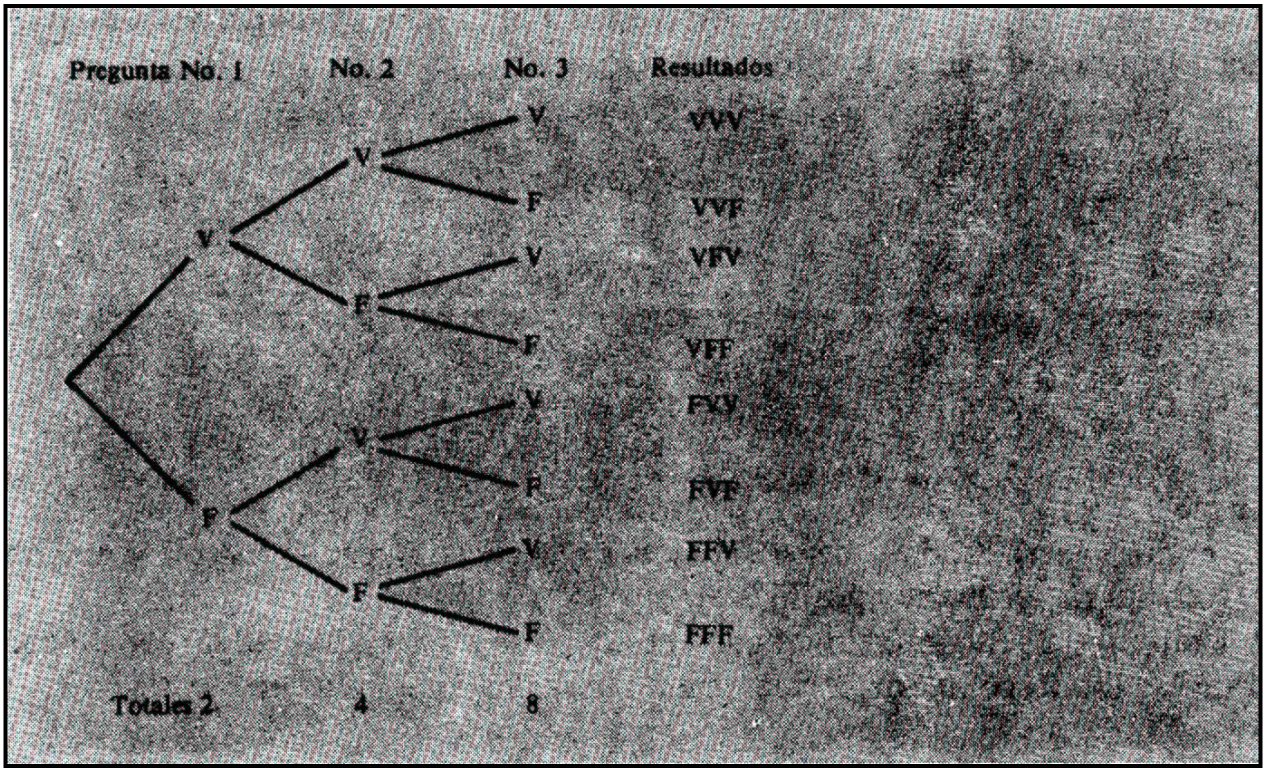


FIGURA 3.5 Empleo de un diagrama de árbol para determinar las ordenes posibles.

Principio de multiplicación

El diagrama de árbol ilustra que cada pregunta sucesiva duplica el número total de resultados posibles, dado que cada nueva pregunta proporciona dos opciones más. Esto trae como consecuencia que cuando existe un número de decisiones secuenciales que se deban tomar (como una respuesta de verdadero o falso para cada pregunta), el número total de resultados posibles será el producto de la diversidad de formas en que cada pregunta (decisión) se pueda hacer. De este modo

Número de preguntas	Resultados totales
1	2 = 2
2	2 x 2 = 4
3	2 x 2 x 2 = 8
4	2 x 2 x 2 x 2 = 16

Si esto fuera un examen de opción múltiple, digamos con cuatro opciones por pregunta, y sólo fueran tres preguntas, el número total de resultados posibles sería 4 x 4 x 4 = 64. Si hubiera cuatro opciones para la primera pregunta, cinco para la segunda y tres para la tercera, la respuesta sería 4 x 5 x 3 = 60. Ahora se deberá aplicar el principio de multiplicación para encontrar cuántas formas de contestar las 20 preguntas del examen de verdadero-falso existen. Con dos opciones para cada una de las 20 preguntas, se tendría

$$2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{20}$$

Es poco común resolver problemas como éstos a mano, no obstante, se examinará por lo menos un método simplificado de los cálculos.

$$\underbrace{2\times2}\times\underbrace{2\times2}\times\underbrace{2\times2}\times\underbrace{2\times2}\times\underbrace{2\times2}\times\underbrace{2\times2}\times\underbrace{2\times2}\times\underbrace{2\times2}\times\underbrace{2\times2}\times\underbrace{2\times2} = 2^{20}$$

$$\underbrace{4 \times 4} \times \underbrace{4 \times 4} \times \underbrace{4 \times 4} \times \underbrace{4 \times 4} \times \underbrace{4 \times 4} = 4^{10}$$

$$\underbrace{16 \times 16} \times \underbrace{16 \times 16} \times 16 = 16^{5}$$

$$256 \times 256 \times 16 = 1\,048\,576$$

En términos generales, de haber n decisiones secuenciales, cada una con *m* opciones, el número total de resultados posibles es m^n.

Por último, la probabilidad de que el estudiante pueda adivinar el modelo correcto para de ese modo contestar correctamente todas las preguntas es:

$$\frac{1}{1\,048\,576}$$

El principio de multiplicación del número de opciones para cada decisión es una regla general sobre la que se basan dos técnicas adicionales: la de permutaciones y la de combinaciones. Estas técnicas son útiles en casos en los que cada decisión disminuye el número de opciones restantes en lo que respecta a decisiones -ulteriores.

Permutaciones y combinaciones

Cuando el orden en que se disponen los términos es importante, el número total de resultados posibles recibe el nombre de permutación. Por ejemplo, en lo referente a las respuestas a un examen de opción múltiple, existe un significado especial relacionado con el orden. Cuando el orden carece de un significado particular, el número total de posibles resultados se conoce como combinación. Por ejemplo, un comité que consta de dos personas, digamos, el Sr. Pérez y el Sr. Sánchez, sería igual al formado por el Sr. Sánchez y el Sr. Pérez. En forma similar, tanto la suma como el producto de dos números no se ven afectados por cuál es el primero y cuál el segundo:

$$10 + 5 = 5 + 10 \qquad 10 \times 5 = 5 \times 10$$

Considérense en primer lugar las permutaciones. Supóngase que hay cuatro equipos de béisbol en un campeonato. ¿En cuántas formas pueden quedar los marcadores finales? Imagínese que se tienen que llenar cuatro casillas: ganador, segundo, tercero y último lugar. La casilla del ganador se podría llenar con cualquiera de los cuatro equipos. Esto haría que quedaran tres casillas por llenar, y tres equipos por seleccionar. De este modo, el segundo lugar sería uno de los tres equipos. El tercer lugar sería uno de los dos equipos y uno de ellos quedaría en el último sitio. El número total de resultados sería

$$\underset{(1o.)}{4} \times \underset{(2o.)}{3} \times \underset{(3o.)}{2} \times \underset{(4o.)}{1} = 24$$

Si hubiera seis equipos, el resultado sería

6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720

Si se seleccionan los equipos del primero al último, en orden inverso (del último al primero), o en cualquier otro orden, el resultado final será el mismo. Por ejemplo, seleccionar primero el que ocuparía el ultimo lugar produciría 1 x 2 x 3 x 4 = 24.

Cuando se trabaja con permutaciones, cada decisión comprende una opción menos que la anterior. Una forma simplificada de representar estas progresiones es utilizar el símbolo “!”. Por ejemplo, 4 x 3 x 2 x 1 se puede escribir como 4! El signo de admiración significa “factorial”, y “4!” se lee “cuatro factorial”. A continuación se ilustran algunos ejemplos de factoriales:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$
$$12! = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cdots \times 2 \times 1 = 479\,001\,600$$

Los factoriales aumentan considerablemente a medida que se incrementa el número. Por fortuna, no es generalmente necesario desarrollar un factorial por completo, ya que cuando se utilizan suelen presentarse en grupos, y es posible eliminarlos. Por ejemplo

$$\frac{5!}{7!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{\cancel{5!}}{7 \times 6 \times \cancel{5!}} = \frac{1}{7 \times 6} = \frac{1}{42}$$

$$\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 4 \times 3 = 12$$

$$\frac{40!}{38!} = \frac{40 \times 39 \times \cancel{38!}}{\cancel{38!}} = 40 \times 39 = 1560$$

$$\frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2 \times 1 \times \cancel{3!}} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Los factoriales algunas veces comprenden operaciones de adición y sustracción. Cuando los números están dentro del paréntesis y el signo factorial fuera, es necesario completar la adición o sustracción antes de determinar el factorial:

$$(5-3)! = 2! \qquad (\text{no } 5! - 3!)$$

$$(9-2)! = 7!$$

$$(3+1)! = 4!$$

$$\frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{3!\cancel{5!}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2}$$

Obsérvese que se elimina el 5! y no el 3! La respuesta sería la misma, independientemente de qué número se eliminara, pero el esfuerzo es menor cuando se suprime el factorial mayor.

Cero factorial equivale a 1. Es decir 0! = 1. Una explicación intuitiva es la siguiente: si hubiera una cantidad de sillas vacías, ¿cuántas ordenaciones diferentes serían posibles si ninguna persona llegara a sentarse? La respuesta es: una sola; con todas las sillas vacías. (Si esto le parece confuso, imagínese a dos personas y tres sillas; después a una persona y tres sillas; y por último, a ninguna persona.)

Si, en una carrera hay siete caballos, ¿cuántas ordenaciones de ganador, segundo lugar y tercer lugar son posibles? Intuitivamente (mediante el principio del multiplicación) se observa que hay 7 x 6 x 5 = 210 posibles resultados. Utilizando las permutaciones, se plantearía la pregunta para siete elementos (caballos, en este caso), ¿cuántas ordenaciones de tres de los elementos son posibles? En términos generales, el número de permutaciones de n objetos tomando x a un tiempo equivale a *n ! (n -)!* De manera más formal, se tiene que:

$$_nP_x = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Por tanto, el número de formas en las que se pueden ordenar tres objetos de un grupo de siete es

$$_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times (\cancel{4!})}{\cancel{4!}} = 210$$

Ocasionalmente nos enfrentamos a una situación en la que algunos de los elementos son idénticos o indistinguibles entre sí. Por ejemplo, supóngase que se tienen tres monedas de 5 centavos y dos de 10 centavos. A menos de que se haga un esfuerzo especial para observar las fechas de las monedas, o para diferenciarlas de alguna otra manera, las tres monedas de 5 centavos no se podrían distinguir. Igual sucedería con las dos monedas de 10 centavos. Debido a esto, no todas las permutaciones parecerán únicas. Un arreglo sería CCCDD. Aplastar las dos monedas de 10 centavos no cambiaría la apariencia externa de su ordenación. De ahí que, algunas de las ordenaciones diferentes se pierden y se deben suprimir del número total posible, ya que el concepto básico de una permutación establece que cada ordenación será diferente.

Ahora, si las monedas se identificaran (en forma temporal), digamos como C1, C2, C3 y D1, D2, se observaría que hay 2! ordenaciones diferentes en la referente a las monedas de 10 centavos y 3! ordenaciones respecto a las monedas de 5 centavos. Además, hay 3! (2!) ordenaciones cuando se consideran las monedas de 5 y las de 10 centavos, que se deberán restar del número total de permutaciones para encontrar el número de permutaciones distinguibles. Esto se puede llevar a cabo al dividir el número total de permutaciones, suponiendo que los elementos se puedan distinguir, debido al número de modelos que se pierden, ya que los primeros no se pueden reconocer realmente. En el caso de las tres monedas de 5 y las de 10 centavos, esto resulta

$$\frac{5!}{3!(2!)} = 10$$

En términos generales, el número de permutaciones que se pueden distinguir en el caso de n elementos, cuando hay n_1 elementos imposibles de reconocer de un tipo, n_2 de otro tipo, etc., es

$${}_nP_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3! \cdots n_k!}$$

donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Ejemplo 5 ¿Cuántas ordenaciones diferentes de ocho letras se pueden hacer utilizando las letras R R R R U U U N?

Solución:

Hay ocho letras: 4 eres (R), 3 ues (U) y 1 ene (N), las cuales dan lugar a

$${}_8P_{4,3,1} = \frac{8!}{4!3!1!} = 280$$

Cuando el orden carece de importancia, el término “combinación” se utiliza para denotar la diversidad de posibles agrupamientos. La selección de los miembros de un comité es un ejemplo en el que el orden no es un factor. Otro, es seleccionar dos platillos de verduras de un menú en el que hay cinco opciones. Escoger papas y zanahorias sería equivalente a zanahorias y papas. Estos grupos equivalentes se deben eliminar del número total de permutaciones a fin de determinar el número de combinaciones. Esta es la misma situación que se observó en el caso de permutaciones indistinguibles y, de hecho, se procedió exactamente de la misma manera. De este modo, en el caso de las verduras, cada grupo de dos dará lugar a sólo dos permutaciones, pero a una sola combinación. En otras palabras, el número de permutaciones es dos veces el número de combinaciones. En la selección de dos tipos de verduras a partir de una lista de cinco, las permutaciones posibles son

$${}_5P_2 = \frac{5!}{3!} = 20$$

El número de combinaciones equivale a la mitad de ese resultado, esto es, 10. Mediante símbolos, se representa el número de combinaciones de la siguiente manera:

$$ {}_5C_2 = \frac{5!}{2!3!} = 10 $$

En forma más general, para grupos de tamaño x, obtenidos de una lista de n elementos, el número de combinaciones posibles es

$$ {}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{x} $$

Ejemplo 6 ¿Cuántos comités diferentes de tres miembros se pueden seleccionar a partir de un grupo de 10 personas?

Solución:

$$ {}_{10}C_3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!(3 \times 2)} = 120 $$

Ejemplo 7 Suponga que queremos formar un comité constituido por una mujer y dos hombres, a partir de un grupo de cuatro mujeres y seis hombres. ¿Cuántas ordenaciones diferentes son posibles?

Solución:

mujeres hombres

$$ ({}_4C_1)\ \ ({}_6C_2) = \left(\frac{4!}{3!1!}\right)\left(\frac{6!}{4!2!}\right) = 4 \times 15 = 60 $$

REGLAS DE CONTEO

Regla de multiplicación: producto del número de selecciones respecto de una secuencia de decisiones.

Permutaciones: número de ordenaciones cuando el orden es importante.

$$ {}_nP_x = \frac{n!}{(n-x)!} $$

Permutaciones distinguibles: se emplean cuando, al parecer, algunos elementos son idénticos, pero el orden es importante.

$$ {}_nP_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} $$

Combinaciones: se utilizan cuando el orden no es importante. i

$$ {}_nC_x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} $$

Comparación entre permutaciones y combinaciones

Cuando el orden es importante, el número posible de resultados se determina mediante permutaciones. Cuando el orden carece de importancia las combinaciones producen el número total de resultados posible. Además, el número posible de combinaciones siempre será menor que el de permutaciones.

Por ejemplo, supóngase que a una persona se le muestran cuatro colores de un muestrario de pinturas, y se le pide que seleccione tres de ellos. El número de conjuntos de tres que se podrían seleccionar constituiría el número de combinaciones, dado que el orden no sería un factor. Por otra parte, sí se pregunta ahora que escoja tres colores y los jerarquice según el que le parezca mejor, el orden en este caso sí sería importante, y los conjuntos de colores jerarquizados equivaldrían a las permutaciones. En la tabla 3.2 se ilustra la comparación entre combinaciones y permutaciones.

Es interesante observar que cuando hay dos grupos de elementos indistinguibles, el número de combinaciones es igual al número de permutaciones. Por ejemplo, ¿en cuántas formas puede un estudiante contestar un examen de 10 preguntas de verdadero-falso con cinco verdaderas y cinco falsas?

$$ {}_{10}P_{5,5} = \frac{10!}{5!5!} \qquad {}_{10}C_5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5!5!} $$

Se utilizará este resultado en el estudio de la distribución binomial.

TABLA 3.2 Una comparación de permutaciones y combinaciones

Seleccionar tres colores
Colores por seleccionar: rojo, azul, verde, naranja

Combinaciones	Permutaciones
$_nC_x = \binom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$	$_nP_x = \dfrac{n!}{(n-x)!}$
	$_4P_3 = \dfrac{4!}{1!} = 24$
$_4C_3 = \binom{n}{x} = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = 4$	
RAV	RAV, RVA, AVR, ARV, VAR, VRA
RAN	RAN, RNA, ANR, ARN, NAR, NRA
RVN	RVN, RNV, VNR, VRN, NVR, NRV
AVN	AVN, ANV, VNA, VAN, NVA, NAV

EJERCICIOS

1. Determine cada uno de los siguientes:

   a. 2 !   b. 5 !   c. 10 !   d. 1 !   e. 0 !

2. Calcule lo siguiente:

   a. $\binom{3}{2}$ b. $\binom{4}{4}$ c. $\binom{5}{1}$ d. $\binom{9}{6}$

3. Determine el número de permutaciones:

   a. $_3P_2$ b. $_4P_4$ c. $_5P_1$ d. $_9P_6$ e. $_1P_0$

4. Un vendedor de autos nuevos quiere impresionar a sus clientes potenciales con la cantidad posible de diferentes combinaciones de que se dispone. Un modelo presenta tres tipos de motores, dos transmisiones, cinco colores de carrocería y dos colores de interiores. ¿Cuántas posibilidades de elección respecto a estas opciones hay?

5. Las placas de matrícula de automóvil de un Estado tienen tres letras seguidas de cuatro números.

a. ¿Cuántas placas diferentes serían posibles si se utilizaran todas las letras y números?

b. Cuántas placas diferentes serían posibles si no se utilizan la letra O y el cero?

c. ¿Cuántas placas diferentes son posibles si la palabra “sex” no está permitida, pero sí los ceros y las letras O?

d. ¿Cuántas placas son posibles si la palabra “sex”, así como la letra O y el número cero no están permitidos.

6. ¿Cuántas palabras distinguibles de nueve letras se pueden obtener de la palabra inglesa BLUEBEARD si se permite palabras sin sentido?

7. Tres ruedas, cada una con los dígitos del 0 al 9, se disponen como en una máquina tragamonedas, de manera que cada rueda pueda girar en forma individual.

   a. ¿Cuántas diferentes ordenaciones de números son posibles?

   b. ¿Cuántas ordenaciones que tengan el dígito 1 en la posición intermedia son posibles?

8. El administrador de un restaurante revisa botellas de vino y acepta o rechaza cada botella. Si 10 botellas son sometidas a inspección, ¿en cuántas formas diferentes puede ocurrir lo siguiente? (Sugerencia: la única característica distinguible es la aceptación o el rechazo.)

   a. Se acepta una botella. b. Se aceptan dos. c. Se aceptan tres.

9. Las parejas para un baile escolar se eligen colocando los nombres de las chicas en una urna, y el de los muchachos, en otra, seleccionándolos después al azar. Si hay 10 jóvenes y 10 chicas, ¿cuántas parejas se pueden formar? Si un muchacho y una chica se agregan al grupo (manteniéndose un total de 10 jóvenes y 10 chicas), ¿cuál es la probabilidad de que formen pareja si éstas se seleccionan al azar?

10. El menú de un restaurante recomienda cinco posibilidades de elección de carne o pescado, tres tipos de ensalada, dos platillos con papas y cuatro con verduras. ¿Cuántas comidas son posibles?

11. Si en un torneo de básquetbol participan 36 equipos, ¿cuántos pueden ser los resultados de los equipos en lo referente a los primeros tres lugares?

12. ¿De cuántas formas diferentes puede un supervisor seleccionar un equipo de cinco de ocho personas que trabajan para él?

13. Se tira siete veces una moneda. ¿Cuáles pueden ser los resultados?

   a. Cinco caras. b. Cuatro caras. c. Todas caras d. Una cara.

14. En el restaurante Joe's Pizza y Taco Parlor se lista la variedad de pizzas de 30 cm: jamón, champiñones, pimientos, anchoas y pepperoni. Usted sólo tiene dine-

ro para comprar dos (todas cuestan lo mismo). ¿Entre cuántas pizzas habrá de escoger?

15. Demuestre que para ordenaciones de dos tipos de objetos, el número de permutaciones distinguibles iguala al número de combinaciones.

REGLA DE BAYES*

La regla de Bayes es un método para verificar las probabilidades (anteriores) existentes, basándose en la información obtenida por el muestreo. La siguiente es una explicación intuitiva de cómo se lleva a cabo la revisión de probabilidades y por qué es útil tomarla en cuenta.

Considerese el caso de un individuo que apresuradamente besa a su mujer una mañana lluviosa, coge una de las tres bolsas que están sobre la mesa de la cocina y se dirige de prisa hacia su trabajo. Poco después, conforme se dirige a su trabajo, se le ocurre pensar que pudo haber tomado una bolsa equivocada. Una de ellas contenía su almuerzo: dos emparedados de jamón. Otra, en cambio, contenía el almuerzo de su hija: un emparedado de jamón y uno de crema de cacahuate (la cual él detesta). La tercera bolsa contenía la basura. Un momento de reflexión lo convence de que como había tres bolsas, la probabilidad de que haya tomado la bolsa correcta es de sólo 3 .

Inmediatamente coge la bolsa y saca un emparedado. Después de inspeccionarlo se da cuenta que es de jamón. Por supuesto, siente gran alivio al descubrir que por lo menos no tomó la bolsa de la basura. En ese punto, el tránsito se ha detenido completamente. En lugar de ver de qué es el otro emparedado, el hombre decide calcular la probabilidad de que haya tomado su propio almuerzo (es decir, la probabilidad de que el otro emparedado también sea de jamón). Recuerda que la probabilidad se define como la razón del número de resultados favorables al número total de resultados posibles. Observa que, de haber tomado realmente la bolsa de su almuerzo, entonces habrá dos formas de descubrir si el segundo emparedado es de jamón. Si trae el almuerzo de su hija, sólo habrá una forma. De este modo, hay tres formas en las que pudo obtener un emparedado de jamón, y dos de ellas se pueden considerar favorables. En este punto, la probabilidad de que haya tomado la bolsa correcta, es de i , dada la evidencia de la muestra.

Los automóviles se empiezan a mover nuevamente, y una ligera sonrisa aparece en los labios del individuo. Confiadamente mete su mano en la bolsa y saca el otro emparedado. Un rápido vistazo le indica que se equivocó: el emparedado es de crema de cacahuate y no de jamón, lo que le demuestra que la probabilidad es una medida de qué tan posible es un evento y no una garantía de que ocurra. Una vez más, los autos se han detenido por completo. El hombre murmura para sí algo con respecto a comprar un aparato para la basura.

Con un aparato para la basura, quizá sólo habría dos bolsas en la mesa cuando él salga de casa: la suya y la de su hija. Si tomara una y después comprobara su contenido de la misma forma rumbo a su trabajo, y encontrara un emparedado de

* *Material optativo. Esta sección se puede omitir sin que se pierda continuidad.*

jamón, ¿cuál sería la probabilidad de que hubiera tomado la bolsa correcta? La respuesta seguiría siendo 3 . Para conocer la razón, recuérdese que la evidencia de la muestra (emparedado de jamón) fue la misma que antes, y que en el caso anterior, una vez que se vio un emparedado, la bolsa de basura dejó de formar parte del problema. En otras palabras, mediante la evidencia muestra¡ el aparato para la basura no tiene caso.

Independientemente de que el individuo se haya dado cuenta o no, utilizó de manera intuitiva el teorema de Bayes para determinar la probabilidad que tenía de haber tomado la bolsa con el almuerzo que le correspondía. Sin duda, Bayes mismo conocía bien el método intuitivo de resolución de problemas de este tipo. Quizá él también se dio cuenta de que un método formal sería de utilidad en la resolución de problemas semejantes, pero mucho más complejos. Quizá razonó de la siguiente manera: si un evento puede ocurrir en más de una forma, entonces la probabilidad de que suceda en una forma particular sería igual a la razón de la probabilidad de que se presente la forma respecto a la probabilidad de que ocurra. En el ejemplo anterior, la probabilidad de obtener un emparedado de jamón equivale a la probabilidad de elegir la primera bolsa y obtener un emparedado de jamón, más la probabilidad de elegir la, segunda y encontrar uno de jamón más la probabilidad de escoger la tercera bolsa y obtener uno de jamón. De este modo, la probabilidad a posteriori (revisada) de que tenga la bolsa correcta es

$$P(\text{almuerzo correcto}) = \frac{P(\text{bolsa correcta y un emparedado de jamón})}{P(\text{jamón})}$$

Se puede presentar esto en una forma más detallada:

$$P(\text{almuerzo correcto} \mid \text{emparedado de jamón}) \quad \frac{P \text{ emparedado de jamón de la bolsa correcta}}{P \text{ todas las formas de obtener un emparedado de jamón}}$$

$$\frac{P(\text{b.c.})\ P(\text{e.j.} \mid \text{b.c.})}{P(\text{b.c.})P(\text{e.j.} \mid \text{b.c}) + P\text{a.h.})P(\text{e.j.} \mid \text{a.h.}) + P(\text{b})P(\text{e.j.b.})}$$

b.c. = bolsa correcta
e.j. = emparedado de jamón
a.h. = almuerzo de la hija
b. = basura

Si se coloca la información en forma tabular, las cifras son más fáciles de visualizar. De este modo

	Contenido		
	Jamón	Crema de cacahuate	Basura
Su bolsa	2	—	—
Bolsa de la hija	1	1	—
Bolsa de basura	—	—	1

Cambiando estas cifras a porcentajes, y recordando que la probabilidad anterior (antes de tomar la muestra) de elegir cada bolsa era de $^1/_3$, se elabora la siguiente tabla.

		Contenido			
Probabilidad a priori		Jamón	Crema de cacahuate	Basura	Totales
$\frac{1}{3}$	Su bolsa	1.00	0.00	0.00	1.00
$\frac{1}{3}$	Bolsa de la hija	0.50	0.50	0.00	1.00
$\frac{1}{3}$	Basura	0.00	0.00	1.00	1.00
1.00					

Forma especifica

Evidencia de la muestra

La probabilidad de elegir inicialmente cualquiera de las bolsas es de $^{1}/_{3}$. Estas son las probabilidades a priori que se revisarán utilizando la información muestra¡ (de que un emparedado de jamón se saque de la bolsa). Los valores dentro de la tabla son las probabilidades de encontrar un emparedado de jamón suponiendo que se tomó inicialmente una bolsa específica. Por ejemplo, habría una probabilidad cero de encontrar un emparedado de jamón si se hubiera tomado la bolsa de basura, un 50% de probabilidad de tener el emparedado de jamón si se eligiera el almuerzo de la hija y un 100% de probabilidad de sacar el emparedado de jamón si el individuo mencionado hubiera elegido su propia bolsa.

Formalmente calcularemos la probabilidad de que el hombre seleccione la bolsa correcta, suponiendo que él encuentra el emparedado de jamón.

$$P(\text{bolsa correcta dado el jamón}) = \frac{\frac{1}{3}(1.00)}{\frac{1}{3}(1.00) + \frac{1}{3}(0.50) + \frac{1}{3}(0.00)} = \frac{2}{3}$$

Esta misma idea se expresó en la figura 3.6.

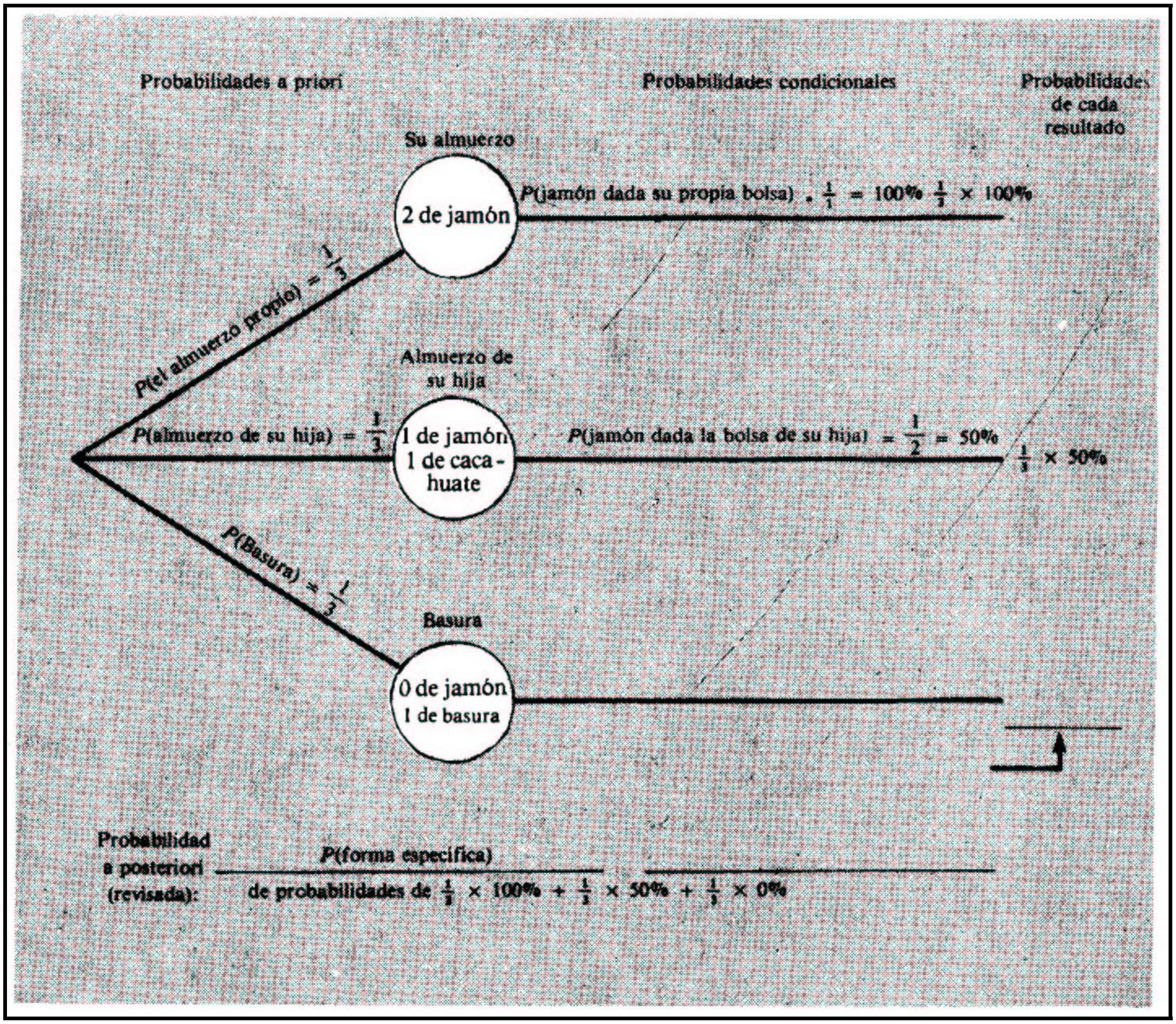


FIGURA 3.6 Cálculo de la probabilidad de haber tomado la bolsa con el almuerzo propio.

El teorema de Bayes es una técnica que se utiliza para verificar las estimaciones iniciales de la probabilidad con base en los datos de la muestra.

Ejemplo 8 Suponga que tenemos cuatro urnas con 10 canicas de colores en cada una de ellas. En la siguiente tabla se resume el contenido de las urnas.

	Color de las canicas			
	Roja	Blanca	Azul	Totales
A	1	6	3	10
B	6	2	2	10
C	8	1	1	10
D	0	6	4	10

Se elige una de las urnas en forma arbitraria, y de ella se saca una sola canica. Si la canica es roja ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado de la urna B?

Solución:

Para resolver este problema (o cualquier problema semejante) necesitamos dos cosas: 1) la probabilidad anterior a seleccionar cada urna, y 2) la probabilidad de que ocurra el evento en cuestión (la canica roja en este caso). Las probabilidades a priori serían 4 para cada urna, ya que hay cuatro, y se puede suponer que cada una presenta la misma probabilidad de ser seleccionada. La probabilidad de sacar una canica roja de una urna determinada es la razón de canicas rojas al total de canicas en dicho recipiente. La siguiente tabla muestra estas probabilidades (que se calcularon utilizando la información de la tabla anterior).

		Color			
Probabilidad anterior	Urna	Rojo	Blanco	Azul	Totales
$\frac{1}{4}$	*A*	**0.10**	0.60	0.30	1.00
$\frac{1}{4}$	*B*	**0.60**	0.20	0.20	1.00
$\frac{1}{4}$	*C*	**0.80**	0.10	0.10	1.00
$\frac{1}{4}$	*D*	**0.00**	0.60	0.40	1.00

La probabilidad de que se saque la canica roja de la urna B es

$$P(\text{urna } B \mid \text{roja}) = \frac{\frac{1}{4}(0.60)}{\frac{1}{4}(0.10) + \frac{1}{4}(0.60) + \frac{1}{4}(0.80) + \frac{1}{4}(0.00)} = \frac{6}{15}$$

De hecho, la probabilidad de que la canica roja se extraiga de cualquier otra urna, se puede calcular de la misma manera.

$$P(\text{urna } A \mid \text{roja}) = \frac{\frac{1}{4}(0.10)}{\frac{1}{4}(0.10) + \frac{1}{4}(0.60) + \frac{1}{4}(0.80) + \frac{1}{4}(0.00)} = \frac{1}{15}$$

$$P(\text{urna } C \mid \text{roja}) = \frac{\frac{1}{4}(0.80)}{\frac{1}{4}(0.10) + \frac{1}{4}(0.60) + \frac{1}{4}(0.80) + \frac{1}{4}(0.00)} = \frac{8}{15}$$

$$P(\text{urna } D \mid \text{roja}) = \frac{\frac{1}{4}(0.00)}{\frac{1}{4}(0.10) + \frac{1}{4}(0.60) + \frac{1}{4}(0.80) + \frac{1}{4}(0.00)} = \frac{0}{15}$$

$$\text{Total: } \frac{15}{15}$$

Se deberán observar dos cosas. Una, que la suma de las probabilidades de las diferentes urnas (formas en que puede “ocurrir” la canica roja es 1.00 (es decir, $^{15}/_{15}$). La otra es que el denominador es el mismo para los cuatro cálculos.

Las personas que constantemente toman decisiones, suelen utilizar el teorema de Bayes para verificar las estimaciones de probabilidades a la luz de los resultados de las pruebas o ensayos. En esencia, los resultados de las pruebas son considerados como evidencias de la muestra.

Ejemplo 9 Un estudio reciente indica que el 70% de todos los estudiantes de preparatoria tiende a utilizar las "fantasías" como un mecanismo para superar la frustración causada por la resolución de problemas estadísticos, y que el 30% no lo hace por esa razón. Un inteligente asistente de profesor elaboró una prueba para medir si un alumno fantaseaba o no. Sin embargo, el ensayo no está del todo perfeccionado (la beca por seis años del susodicho profesor no ha sido renovada). Generalmente, el examen produce un resultado positivo para el 60% de los estudiantes que utilizan fantasías, y un resultado negativo para el 40% restante. En el caso de los no fantasiosos, el examen resulta positivo para el 20%, y negativo, para el 80%.

Esta información se puede resumir en forma tabular.

		Resultados de las pruebas	
Probabilidad a priori		Positivo	Negativo
0.70	Fantasiosos	0.60	0.40
0.30	No fantasiosos	0.20	0.80
1.00			

Utilizando el teorema de Bayes, es posible determinar la probabilidad (a posteriori) de que una persona utilice fantasías, obteniendo un resultado positivo:

$$P(\text{fantasiosos} \mid \text{positivo}) = \frac{0.70(0.60)}{0.70(0.60) + 0.30(0.20)} = \frac{0.42}{0.42 + 0.06} = \frac{7}{8} = 0.88$$

Estamos en condiciones de considerar una expresión general para el teorema de Bayes. De existir un número de "estados de la naturaleza" (como, bolsas sobre la masa o urnas con canicas, o tener respecto a no tener), cada uno con 1 o más resultados o eventos de muestreo posibles, asociados con ellos (así como el emparedado de jamón, la canica roja o un resultado positivo en el examen), la representación tabular de éstos sería:

$$\begin{array}{ll|cccc|} & & E_1 & E_2 & \cdots & E_j \\ \hline & S_1 & P(E_1|S_1) & P(E_2|S_1) & \cdots & P(E_j|S_1) \\ \text{Estados posibles} & S_2 & P(E_1|S_2) & P(E_2|S_2) & \cdots & P(E_j|S_2) \\ \text{de la naturaleza} & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & S_i & P(E_1|S_i) & P(E_2|S_i) & \cdots & P(E_j|S_i) \\ \hline \end{array}$$

Por ejemplo, la probabilidad de que un resultado muestral, digamos E2 ocurra como consecuencia de un estado particular de la naturaleza, digamos, S1, se puede calcular de esta manera:

$$P(S_1|E_2) = \frac{P(S_1)P(E_2|S_1)}{P(S_1)P(E_2|S_1) + P(S_2)P(E_2|S_2) + \cdots + P(S_i)P(E_2|S_i)}$$

El caso general sería

$$P(S_i|E_j) = \frac{P(S_i)P(E_j|S_i)}{P(S_1)P(E_j|S_1) + P(S_2)P(E_j|S_2) + \cdots + P(S_i)P(E_j|S_i)}$$

La esencia del teorema de Bayes es la revisión de las estimaciones iniciales de la probabilidad (a priori), dada la evidencia de la muestra. Las estimaciones revisadas reciben el nombre de probabilidades a posteriori. Las bases para la verificación son los resultados de una muestra particular más el conocimiento de las probabilidades condicionales (es decir, las probabilidades respecto a cada resultado muestral, suponiendo un estado específico de la naturaleza).

EJERCICIOS

1. Los registros policiacos revelan que sólo el 10% de las víctimas de accidentes que llevaban cinturones de seguridad sufrieron heridas graves, en tanto que el 50% de los que no usaron, sufrieron también serias heridas. La policía estima que el 60% de las personas que viajan en automóviles emplean los cinturones de seguridad. Se llama a la policía para investigar un accidente en el que una persona resulta seriamente herida. Estime la probabilidad de que llevara puesto el cinturón de seguridad en el momento del choque. El conductor del otro auto no sufrió heridas graves. Determine la probabilidad de que este último llevara puesto el cin-turón de seguridad.
2. Una compañía constructora propone una rebaja en un proyecto de construcción. Si el principal competidor también propone una, hay solamente 0.25 de probabilidad de que se le conceda a la compañía. Si el competidor no hace ninguna rebaja, existe una oportunidad de á de que la compañía obtenga el trabajo. Hay 0.50 de probabilidad de que el competidor haga la rebaja.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía constructora obtenga el trabajo?
    b. ¿Qué probabilidad hay de que el competidor haga la rebaja si su compañía constructora obtiene el trabajo?
3. Eduardo conoce a una nueva chica en la mitad de las fiestas a las que asiste. Tres cuartas partes de las veces en que conoce a una nueva joven, se divierte, pero la probabilidad de que se divierta cuando no conoce una nueva chica es solamente del 10%. Eduardo acaba de decirle que se está divirtiendo ¿cuál es la probabilidad de que haya conocido una nueva joven?
4. Tres máquinas producen piezas fundidas de metales no ferrosos. La máquina A produce 1% de piezas defectuosas, la máquina B, 2%, y la máquina C, 5%. Cada máquina produce s de la producción total. Un inspector examina una pieza fundida, y determina que no está defectuosa. Estime las probabilidades de que dicha pieza haya sido producida por cada máquina.
5. Un granjero estima que cuando un jardinero experimentado planta árboles, el 90% crecerá en tanto que cuando un novato lo hace, sólo crece el 50%. Si un árbol plantado anteriomente no crece, encuentre la probabilidad de que lo haya

plantado el jardinero novato, dado que este tipo de jardineros generalmente plantan lo de los árboles.

RESUMEN

La probabilidad es un número que indica cuán posible es algún evento futuro. Las probabilidades se determinan ya sea mediante la realización de una serie de ensayos y la observación de la frecuencia relativa de ocurrencia del evento en cuestión (o bien, tratando datos históricos como series de ensayos idénticos), dándose cuenta que los eventos (o resultados) son igualmente posibles, o bien, cuando éstos no sean posibles, mediante el empleo de juicios subjetivos. Resulta útil para la comprensión y utilización de las probabilidades, imaginar el espacio muestral de todos los resultados posibles de una muestra o experimento.

Las reglas de probabilidad fueron ideadas para ayudar en el cálculo de eventos que sean, por sí mismos, combinaciones de otros. La regla de adición se utiliza cuando se desea obtener la probabilidad de que ocurran uno de dos eventos, o ambos. Hay dos variaciones a la regla, una para eventos que son mutuamente excluyentes y otra para eventos que no lo son. En forma semejante, la regla de multiplicación, que se utiliza para determinar la probabilidad de que ocurran dos eventos, posee dos variantes, una para eventos dependiente y otra para independientes.

Las reglas de tonteo son útiles, en la determinación del número de formas en que algo puede ocurrir, particularmente cuando hay una gran diversidad de ellas.

TEMAS DE REPASO

1. Describa brevemente los tres enfoques para la asignación de probabilidades.
2. ¿Por qué es importante el tamaño muestral en el enfoque de frecuencia relativa?
3. ¿Qué ventajas o desventajas presenta el enfoque subjetivo respecto a los otros dos métodos?
4. Explique esta proposición: Puede haber un grado de subjetividad en el enfoque de frecuencia relativa.
5. ¿Qué son,las posibilidades y. cómo se relacionan con las probabilidades?
6. Defina los siguientes términos: mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos, complemento.
7. ¿Qué es un espacio muestral? ¿Qué es un evento?
8. ¿Qué son los diagramas de Venn y cuál es su utilidad?
9. ¿Qué significa la expresión “eventos independientes”?
10. Defina lo que significa probabilidad conjunta. ¿Cómo se determina la probabilidad conjunta cuando los eventos son independientes?

11. La probabilidad de que un evento ocurra más la probabilidad de que no lo haga se suma siempre a determinado número. ¿Cuál es el número y por qué siempre se les debe sumar las probabilidades?
12. ¿Cuál es la regla de adición de la probabilidad respecto a eventos mutuamente excluyentes? ¿En lo relativo a eventos que no son mutuamente excluyentes?
13. Enuncie la diferencia entre permutación y combinación.
14. ¿Cuál es la función de las técnicas de conteo?
15. ¿Qué relación hay entre las técnicas de conteo y la probabilidad clásica?
16. Explique el principio de multiplicación.
17. ¿Qué ventaja tiene la regla de multiplicación con respecto a un árbol de decisión?
18. ¿Qué es un factorial?
19. ¿Cómo se utiliza el teorema de Bayes?
20. Defina la probabilidad a posteriori.
21. Defina la probabilidad a priori.
22. En forma matricial, ¿cuáles probabilidades son condicionales?
23. En forma matricial, ¿por qué las probabilidades de las filas siempre suman 1.00? ¿Deben las probabilidades de la columna también sumar 1.00? ¿Por qué?
24. ¿Qué significa el término “estados de la naturaleza”?

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

1. Explique por qué cada uno de los siguientes resultados son erróneos:

   a. $P(A) = -0.45$ b. $P(A) = 1.30$
   c. $P(A) = 0.60$ y $P(A') = 0.60$ d. $P(A \text{ ó } B) = 1.04$

2. La probabilidad de que una película cinematográfica gane un premio por la mejor actuación es de 0.30, la probabilidad de obtener un premio en dirección es de 0.20 y la probabilidad de ser premiada en ambos casos es de 0.05.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que no obtenga premios?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos gane un premio?
3. José le pidió una cita a una chica para ir al autocinema el sábado en la noche. El considera que hay una probabilidad de 50: 50 de que la chica acepte. Piensa que existe un 80% de probabilidades de que para esa fecha ya estuviera arreglado su auto. Sin embargo, el autocinema ha establecido una política bastante poco imaginativa: cierra en caso de lluvia. El periódico local informa que la posibilidad de que llueva en la noche del sábado es del 20%. Encuentre la probabilidad de

que llegue al autocinema llevando a la joven y su auto, y de que no llueva. ¿Cuál es la probabilidad de que salga con la chica, tenga listo el auto pero llueva?

4. Como parte de un concurso radiofónico, se le pide a un radioescucha que adivine un número de tres dígitos que se encuentra entre 000 y 999. Obtenga la probabilidad de que adivine el número utilizando:
    a. El enfoque de definición clásico.
    b. La regla de multiplicación en lo referente a los tres dígitos.
5. Encuentre la probabilidad de adivinar los primeros dos dígitos pero no el tercero en el problema anterior.
6. A un grupo de congresistas se les pide que jerarquicen, siete propuestas en términos del costo que representa para los causantes. Suponiendo que no se permite darle a dos la misma jerarquía ¿cuántas ordenaciones diferentes son posibles?
7. Ernesto Pérez, con base en los resultados anteriores, estima que su probabilidad de obtener par en determinado recorrido de golf es de alrededor del 60% por hoyo. Determine la probabilidad de que tenga par en los primeros tres hoyos, pero no en los siguientes dos. ¿Le parece razonable la suposición de independencia de los resultados? ¿Por qué?
8. Como el 10% de los alumnos de una enorme universidad tienen un IQ que sobrepasa los 145 puntos obtenga las probabilidades siguientes:
    a. Si de una lista total de alumnos se selecciona a uno, su IQ excederá de 145.
    b. Si se escogen cinco alumnos, ninguno tendrá un IQ superior a 145.
9. Arturo llega tarde a su trabajo el 25% de las veces. Suele olvidar su portafolio el 20% de las veces. Suponiendo que estos dos sucesos son independientes, encuentre las siguientes probabilidades:
    a. Que Arturo llegue tarde dos veces seguidas.
    b. Que Arturo llegue tarde y sin portafolio.
    c. Que Arturo llegue a tiempo y con portafolio.
    d. Que Arturo llegue a tiempo pero sin portafolio.
10. ¿De cuántas formas pueden cinco estudiantes escoger de una lista de 11 planes escolares si:
    a. dos alumnos no pueden tener el mismo plan?
    b. los alumnos son libres de escoger los planes?
11. El director de seguridad pública estima que el 5% de los automóviles estacionados en el centro de la ciudad se quedan con las llaves en el encendido.

Considera que hay un 10% de probabilidades de que estos autos sean robados, en oposición.