

Unidad 2

- Notación matemática.

2 | Notación matemática

2.1 | Introducción

En el transcurso del texto se hará evidente que el análisis estadístico de un conjunto de datos requiere, en general, de un buen número de operaciones aritméticas. Estas operaciones resultan ser suficientemente complicadas para expresarse por medio de palabras. Para salvar esta dificultad, dichas operaciones se expresan en términos de una o varias fórmulas. Entonces, dado un conjunto de datos, estos valores se substituyen en las fórmulas adecuadas.

El proceso de sumar varias cantidades, adición, es una de las operaciones más comunes en el análisis estadístico de datos. Así que se necesita un símbolo que indique al lector que debe proceder a sumar un conjunto de cantidades dado, ya sea éste el conjunto de observaciones de una muestra o, tal vez, un conjunto de cantidades calculadas a partir de las observaciones muestrales. El símbolo que denota el proceso de sumar es conocido como sumatoria. La notación de la sumatoria es familiar para algunos lectores pero desconocido para otros.

Si ésta le resulta desconocida, un repaso resultaría benéfico, entonces se sugiere que este capítulo sea leído cuidadosamente y que se trabajen los ejercicios al final de las secciones. En caso contrario, es decir, si la notación de sumatoria le resulta familiar, este capítulo puede ser omitido.

Para entender mejor la notación de sumatoria, se requiere tener familiaridad con dos conceptos del álgebra elemental: la notación funcional y la noción de sucesiones. La notación funcional es importante ya que a menudo se desea sumar alguna función de las observaciones de una muestra (por ejemplo, la suma de los cuadrados de las mediciones). Entonces, la función de las observaciones a sumar se expresa como una fórmula en notación funcional. Las

sucesiones son importantes ya que es necesario ordenar (identificar en un arreglo ordenado) las observaciones muestrales para poder referirse a aquellas mediciones que van a ser sumadas.

La lectura de este capítulo requiere de cierta paciencia para sobrellevar el aparentemente elevado nivel matemático de su contenido. Debe tenerse en cuenta que es necesario entender esta notación para entender las fórmulas que aparecen en los siguientes capítulos.

2.2

Notación funcional

Considere dos conjuntos de elementos (personas, números o cualquier objeto). Denote por x a un elemento del primer conjunto y por y a un elemento del segundo conjunto. Es posible establecer diversas reglas que definan alguna **relación** entre x y y . Si x y y son números enteros, es decir, que toman valores $1, 2, 3, \dots$, podríamos definir una relación al decir que $y = x + 2$.

Una relación que es de gran utilidad en las matemáticas es la **relación funcional** entre x y y .

Definición

Una **función** consiste de dos conjuntos y una regla de correspondencia específica entre los elementos de los conjuntos, de manera tal que a un elemento del primer conjunto le corresponde exactamente un elemento en el segundo conjunto.

Una función puede ser representada como una colección de parejas ordenadas de elementos (x, y) con x elemento del primer conjunto y y elemento del segundo. Comúnmente, x y y son variables que toman valores numéricos. Los dos conjuntos de elementos son, en este caso, los conjuntos de los valores que x y y pueden tomar, y la regla de correspondencia entre ellos una ecuación. Por ejemplo si se establece que x y y son números reales y que

$$y = x + 2$$

entonces y es una función de x . A un elemento x del primer conjunto (los números reales) le corresponde exactamente un valor y del segundo conjunto (también los números reales). Si $x = 1$, $y = 3$; si $x = -4$, $y = -2$ y así sucesivamente.

El área A de un círculo se relaciona con su radio r de acuerdo con la fórmula

$$A = \pi r^2.$$

Note que, asignando un valor a r , el valor de A puede determinarse por la fórmula. Esto es, A es una función de r . De igual forma se tiene que el perímetro de un círculo es una función del radio.

Como un tercer ejemplo de relación funcional, considérese un salón de clases con 20 estudiantes. Si x representa una persona y y representa su nom-

bre, ¿es y una función de x ? Para contestar, se debe examinar x y y a la luz de la definición. Nótese que a cada persona le corresponde un nombre. Si se especifica x , y queda únicamente determinado. Por lo que y es función de x . Es de notarse que para definir la regla de una relación funcional no se requiere que x y y tomen valores numéricos. En el capítulo 4 encontraremos una importante relación funcional de este tipo.

Una vez definida la relación funcional, se considera ahora la **notación funcional**. A menudo los matemáticos recurren al simbolismo para evitar repeticiones innecesarias. Por ejemplo en vez de decir: “El área A de un círculo es una función del radio r ”, los matemáticos escriben $A(r)$. La expresión

$$y = f(x)$$

quiere decir que y es una función de la variable que aparece entre paréntesis, en este caso x .

Considere la función de

$$y = 3x + 2$$

que en notación funcional se escribe

$$f(x) = 3x + 2$$

quedando entendido que $y = f(x)$.

La notación funcional es especialmente útil para indicar el valor de y cuando x toma un valor específico. En el ejemplo anterior se tiene que si $x = 2$,

$$y = 3x + 2 = 3(2) + 2 = 8$$

que se abrevia en notación funcional como $f(2) = 8$. Análogamente, $f(5)$ es el valor de la función si $x = 5$:

$$f(5) = 3(5) + 2 = 15 + 2 = 17$$

Esto es $f(5) = 17$.

Para obtener el valor de la función cuando x toma cualquier valor, por ejemplo $x = c$, se substituye el valor de c en lugar de x en la ecuación; así,

$$f(c) = 3c + 2.$$

Ejemplo 2.1

Considere la función de x :

$$g(x) = \frac{1}{x} + 3x$$

a. Obtenga $g(4)$.

$$g(4) = \frac{1}{4} + 3(4) = .25 + 12 = 12.25$$

b. Obtenga $g(0)$.

$$g(0) = \frac{1}{0} + 3(0)$$

La división por cero no está definida matemáticamente; entonces $g(0)$ no existe.

c. Obtenga $g(1/a)$.

$$g\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{1/a}\right) + 3\left(\frac{1}{a}\right) = a + \frac{3}{a} = \frac{a^2 + 3}{a}$$

Ejemplo 2.2 Sea $p(y) = (1 - a)a^y$. Obtenga $p(2)$ y $p(3)$.

$$p(2) = (1 - a)a^2$$

$$p(3) = (1 - a)a^3$$

Ejemplo 2.3 Sea $f(y) = 4$. Obtenga $f(2)$ y $f(3)$.

$$f(2) = 4 \quad f(3) = 4$$

Note que aquí $f(y) = 4$, independientemente del valor de y . Esto es, para cualquier valor de y el valor de la función es igual a 4.

Ejemplo 2.4 Sea $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x + 2$.

Obtenga el valor de $f[g(x)]$. El valor de $f[g(x)]$ se encuentra substituyendo $g(x)$ en el lugar de x en la función $f(x)$. Esto es

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= [g(x)]^2 + 1 = (x + 2)^2 + 1 \\ &= x^2 + 4x + 4 + 1 = x^2 + 4x + 5 \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$f[g(2)] = 2^2 + (4)(2) + 5 = 17$$

Ejercicios

2.1. Encuentre los siguientes valores para $f(y) = y - 2$:

- | | | |
|-------------|---------------|---------------|
| a. $f(0)$ | b. $f(1)$ | c. $f(-2)$ |
| d. $f(1/2)$ | e. $f(a + 3)$ | f. $f(1 - a)$ |

2.2 Encuentre los siguientes valores para $f(y) = (y^2 - 1)/y$:

- | | | |
|-----------|---------------|------------|
| a. $f(2)$ | b. $f(-3)$ | c. $f(-1)$ |
| d. $f(x)$ | e. $f(a - 1)$ | |

2.3 Si $g(y) = (1/y) - 1$, obtenga $g(1)$ y $g(2)$.

2.4 Si $p(x) = 3^x - 2$, obtenga $p(0)$, $p(1)$ y $p(2)$.

2.5 Si $f(i) = y_i$, obtenga $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$.

2.6 Si $f(y) = y^2 - 2y + 1$ y $g(y) = 1 - y$, obtenga los siguientes valores.

- | | |
|---------------|--------------|
| a. $f(-2)$ | b. $g(1/2)$ |
| c. $f(a + 1)$ | d. $f[g(y)]$ |

2.3

Sucesiones numéricas

El estadístico trabaja con muestras que son, en esencia, conjuntos de observaciones. Se puede hablar de la primera observación, la segunda y así sucesivamente. El introducir la notación matemática de sucesión sirve para denotar los datos y a la vez proporciona una aplicación de la notación funcional.

Un conjunto de objetos $a_1, a_2, a_3, \dots$, ordenados de tal forma que se pueda identificar al primero de ellos a_1 , al segundo a_2 , y así sucesivamente, es llamado una **sucesión**. Aunque los **elementos de la sucesión** $a_1, a_2, a_3, \dots$, pueden ser objetos cualesquiera, lo más común es que sean números. Por ejemplo los números

$$1, 5, 4, 8, 7, 11, 10$$

forman una sucesión ordenada de izquierda a derecha. Note que los elementos están ordenados sólo por su posición en la sucesión y que no necesariamente están ordenados en magnitud. Es posible que en un juego de baraja se esté interesado en sucesiones de cartas como

$$10, J, Q, K, A$$

Aunque algunas sucesiones no numéricas son de interés, aquí se tratará únicamente con sucesiones numéricas. En especial, los datos obtenidos en una muestra de una población se consideran como una sucesión de observaciones.

Mediante el uso de la notación funcional es posible escribir las sucesiones de una manera abreviada, escribiendo una fórmula para un elemento típico de la sucesión como función de su posición. Considérese por ejemplo la sucesión

$$3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

en la cual cada elemento de la sucesión es una unidad mayor que su predecesor. Si se denota por y a la variable de posición en la sucesión, y toma valores $1, 2, 3, \dots$, entonces, podemos escribir una fórmula para el elemento que ocupa la posición y de la siguiente manera:

$$f(y) = y + 2$$

Así el primer elemento de la sucesión es el elemento en la posición $y = 1$,

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

Asimismo, el segundo elemento es el que ocupa la posición $y = 2$ y está dado por

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

Es fácil cerciorarse que la fórmula funciona para cualquier elemento en la sucesión. El encontrar la fórmula (función) que define una sucesión requiere algo de práctica.

Ejemplo 2.5 En la sucesión:

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

encuentre la fórmula que define a un elemento típico en función de su posición en la sucesión. Nótese que cada elemento es el cuadrado de la variable posición; entonces

$$f(y) = y^2$$

Ejemplo 2.6 La fórmula para un elemento típico de la siguiente sucesión no es tan obvia:

$$0, 3, 8, 15, 24, 35, \dots$$

El elemento típico está dado por

$$f(y) = y^2 - 1$$

Es un hecho común que las letras x y y denoten una variable pero cualquier letra u otro símbolo puede ser usado, digamos i, j, k , o z . Si se desea, por ejemplo, referirse a un conjunto de observaciones y denotar las observaciones como la variable y , se puede escribir la sucesión de observaciones como

$$y_1, y_2, y_3, \dots$$

usando un subíndice para denotar un elemento particular en la sucesión. Como en este caso el símbolo y ha sido usado para denotar las observaciones, es necesario escoger otro símbolo para la variable de posición. Si se usa la letra i , un elemento típico está dado por

$$f(i) = y_i$$

Note que $f(1) = y_1, f(2) = y_2$ y así sucesivamente.

Ejercicios

- 2.7 Sea y la variable de posición de una sucesión y sea $3y - 1$ la fórmula para un elemento típico. Escriba los primeros cuatro elementos de la sucesión.
- 2.8 Sea y la variable de posición de una sucesión y sea $y^2 + 2$ la fórmula para un elemento típico. Es-

- criba los primeros cuatro elementos de la sucesión.
- 2.9 Obtenga la fórmula, en función de la variable de posición y , para un elemento típico de la sucesión
- $$2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

2.4 Notación de sumatoria

Como se verá en el capítulo 3, el análisis estadístico de un conjunto de datos requiere del uso de sumas de números. Es conveniente introducir una notación simple para indicar una suma. Considere, por ejemplo, la sucesión de números

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

y suponga que se desea referirse a la suma de los cuadrados de los primeros cuatro términos de la sucesión. En la notación de sumatoria ésto se escribiría como

$$\sum_{y=1}^4 y^2$$

La interpretación de la notación de sumatoria es sencilla. La letra griega Σ (sigma mayúscula), que corresponde a la “S” en el alfabeto latino y es la primera letra de la palabra “suma”, indica que han de **sumarse los elementos de la sucesión**. Un elemento típico de la sucesión aparece a la derecha del símbolo de sumatoria Σ y la variable de posición o índice aparece debajo de la Σ . En

nuestro ejemplo, y^2 es el elemento típico y y es la variable de posición y la sucesión implícita es

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

Surge ahora la pregunta de cuáles elementos de la sucesión han de ser incluidos en la suma. La posición del primer elemento en la suma aparece abajo del símbolo de sumatoria y el último arriba. La suma incluye todos los elementos ordenados del primero al último. En nuestro ejemplo la suma incluye todos los elementos, empezando por el primero y terminando en el cuarto:

$$\sum_{y=1}^4 y^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

Ejemplo 2.7

$$\sum_{y=2}^4 (y - 1) = (2 - 1) + (3 - 1) + (4 - 1) = 6$$

Ejemplo 2.8

$$\sum_{x=2}^5 3x = 3(2) + 3(3) + 3(4) + 3(5) = 42$$

Nótese que el elemento típico es una función del índice de la sumatoria únicamente. Si algún otro símbolo aparece en la fórmula del elemento típico, debe considerarse constante, es decir, no cambia de un término al otro de la sucesión.

Ejemplo 2.9

$$\sum_{i=1}^3 (y_i - a) = (y_1 - a) + (y_2 - a) + (y_3 - a)$$

En este ejemplo nótese que i es la variable de posición y que aparece como subíndice del elemento típico. Los símbolos y y a ocurren en la misma forma en cada uno de los términos de la suma.

Ejemplo 2.10

$$\sum_{i=1}^2 (x - i + 1) = (x - 1 + 1) + (x - 2 + 1) = 2x - 1$$

Observe que i es la variable de posición y por lo tanto x es constante.

Ejemplo 2.11

$$\left(\sum_{y=2}^4 y \right) - 1 = (2 + 3 + 4) - 1 = 8$$

Nótese la diferencia entre los ejemplos 2.7 y 2.11. El elemento típico en 2.7 es $(y - 1)$ mientras que y es el elemento típico en 2.11.

La notación de sumatoria será usada a lo largo del texto para escribir fórmulas que se usan en el análisis de los datos. El ejemplo a continuación ilustra la manera en que será usada la notación de sumatoria en el capítulo 3.

Ejemplo 2.12 Suponga que se seleccionan $n = 5$ compañías muebleras del total en el país. Sus tasas de ganancia, como porcentaje del precio de venta, son respectivamente 8.2, 6.8, 6.4, 8.1, y 7.3. Represente simbólicamente estas cantidades como $y_1 = 8.2$, $y_2 = 6.8$, $y_3 = 6.4$, $y_4 = 8.1$ y $y_5 = 7.3$.

a. Encuentre $\sum_{i=1}^n y_i$. b. Encuentre $\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$. c. Encuentre $\sum_{i=1}^n y_i^2$.

Solución Recuerde que el número de medidas en la muestra es $n = 5$. Procédase entonces a hacer los cálculos:

a. $\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^5 y_i = 8.2 + 6.8 + 6.4 + 8.1 + 7.3 = 36.8$

b. $\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i}{5} = \frac{36.8}{5} = 7.36$

c. $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^5 y_i^2 = (8.2)^2 + (6.8)^2 + (6.4)^2 + (8.1)^2 + (7.3)^2 = 273.34$

Ejercicios

2.10. Calcule las siguientes sumatorias:

a. $\sum_{y=0}^5 (y - 4)$

b. $\sum_{y=2}^6 (y^2 - 5)$

c. $\sum_{i=1}^4 (y_i - 2)$

d. $\sum_{i=1}^3 (y + 2i)$

2.11. Suponiendo que y es la variable de posición de una sucesión y que $y(y^2 - 1)$ es el elemento típico.

a. Escriba los primeros cuatro elementos de la sucesión.

b. Use la notación de sumatoria para expresar la suma de los cuatro primeros términos de la sucesión.
c. Calcule la suma de la parte b.

2.12. Suponiendo que y es la variable de posición para una sucesión y que la fórmula para el elemento típico es $(y - 3)^2$.

a. Escriba los cinco primeros términos de la sucesión.
b. Use la notación de sumatoria para expresar la suma de los cinco primeros términos de la sucesión.
c. Calcule la suma de la parte b.

2.5

Teoremas sobre sumatorias

Considere la sumatoria

$$\sum_{y=1}^3 5$$

El elemento típico es 5 y no cambia. Entonces la sucesión es

5, 5, 5, 5, . . .

y la sumatoria

$$\sum_{y=1}^3 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

Teorema 2.1

Sea c una constante, es decir un elemento que no contiene al índice de la sumatoria (la variable de posición), y y la variable de posición. Entonces

$$\sum_{y=1}^n c = nc$$

Demostración

$$\sum_{y=1}^n c = c + c + c + c + \cdots + c$$

y como la suma tiene n términos se tiene

$$\sum_{y=1}^n c = nc$$

Ejemplo 2.13

$$\sum_{y=1}^4 3a = 4(3a) = 12a$$

Ejemplo 2.14

$$\sum_{i=1}^3 (3x - 5) = 3(3x - 5)$$

Note que i es el índice de la sumatoria (variable de posición).

Hay un punto importante que debe considerarse al aplicar el teorema 2.1. En el teorema se establece que la suma empieza con el primer término de la sucesión, ($y = 1$). Si se tiene que la suma empieza con otro término distinto del primero, por ejemplo, $y = a$, entonces se tendrá

$$\sum_{y=a}^n c = (n - a + 1)c$$

El segundo teorema es ilustrado por el ejemplo 2.8. Note que 3 es un factor común en cada término, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{y=2}^5 3y &= 3(2) + 3(3) + 3(4) + 3(5) \\ &= 3(2 + 3 + 4 + 5) = 3 \sum_{y=2}^5 y \end{aligned}$$

Como se expresa en el siguiente teorema, la sumatoria de una constante por una variable es igual a la constante por la sumatoria de la variable.

Teorema 2.2

Sea c una constante. Entonces

$$\sum_{i=1}^n cy_i = c \sum_{i=1}^n y_i$$

Demostración

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n cy_i &= cy_1 + cy_2 + cy_3 + \cdots + cy_n \\ &= c(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = c \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

Note que el único requisito para la constante es que no dependa del índice de la sumatoria. Por ejemplo, en la expresión

$$\sum_{y=1}^4 x^2 y$$

el término x^2 no es una función de y , el índice de la sumatoria, y debe ser considerado constante, así

$$\sum_{y=1}^4 x^2 y = x^2 \sum_{y=1}^4 y = x^2(1 + 2 + 3 + 4) = 10x^2$$

Teorema 2.3

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n z_i$$

Demostración

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i + z_i) &= x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2 + x_3 + y_3 \\ &\quad + z_3 + \cdots + x_n + y_n + z_n \end{aligned}$$

Reagrupando se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i + y_i + z_i) &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) + (z_1 + z_2 + \cdots + z_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n z_i\end{aligned}$$

Esto es, la sumatoria de un elemento típico, que es a su vez una suma de términos, es igual a la suma de las sumatorias de los términos.

Los teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 pueden ser usados conjuntamente para simplificar sumatorias. Los siguientes ejemplos ilustran este punto.

Ejemplo 2.15

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^3 (x^2 + ax + 5) &= \sum_{x=1}^3 x^2 + \sum_{x=1}^3 ax + \sum_{x=1}^3 5 = \sum_{x=1}^3 x^2 + a \sum_{x=1}^3 x + 3(5) \\ &= (1 + 4 + 9) + a(1 + 2 + 3) + 15 = 6a + 29\end{aligned}$$

Ejemplo 2.16

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 (x^2 + 3i) &= \sum_{i=1}^4 x^2 + \sum_{i=1}^4 3i = 4x^2 + 3 \sum_{i=1}^4 i \\ &= 4x^2 + 3(1 + 2 + 3 + 4) = 4x^2 + 30\end{aligned}$$

Ejercicios

Utilice los teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 para simplificar y calcular las siguientes sumatorias.

2.13. $\sum_{x=1}^4 3x$

2.15. $\sum_{x=1}^4 (x^2 + 2)$

2.17. $\sum_{i=1}^4 (2y_i - 5)$

2.14. $\sum_{i=1}^4 x_i$

2.16. $\sum_{y=2}^5 (y^2 - 3y + 2)$

2.18. $\sum_{i=1}^n (y_i - 3)^2$

2.6

Resumen

Se han presentado dos tipos de notación matemática: la notación funcional y la notación de sumatoria. La primera se usa a su vez en la notación de sumatoria para escribir el elemento típico de la sumatoria como función del índice de la sumatoria (variable de posición). En el capítulo 4 se discuten otros usos de la notación funcional. La notación de sumatoria se usará en el capítulo 3 y en capítulos posteriores.

Ejercicios complementarios

2.19. Para $f(y) = 4y + 3$, calcule:

- a. $f(0)$ b. $f(1)$ c. $f(2)$ d. $f(-1)$
 e. $f(-2)$ f. $f(a^2)$ g. $f(-a)$ h. $f(1 - y)$

2.20. Para $f(y) = (y - 2)^2$, calcule

- a. $f(2)$ b. $f(-3)$ c. $f(-1)$
 d. $f(x)$ e. $f(a - 1)$

2.21. Para $f(x) = x^2 - x + 1$, calcule

- a. $f(-2)$ b. $f(a + b)$

2.22. Si $g(y) = (y^2 - 1)/(y + 1)$ encuentre

- a. $g(1)$ b. $g(-1)$ c. $g(4)$ d. $g(-a^2)$

2.23. Si $p(x) = (1 - a)^x$ encuentre $p(0)$ y $p(1)$

2.24. Si $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$ y $g(x) = x - 3$, calcule

- a. $f(1/2)$ b. $g(-3)$ c. $f(1/x)$
 d. $f[g(x)]$

2.25. Si $h(x) = 2$, calcule

- a. $h(0)$ b. $h(1)$ c. $h(2)$

Utilice los teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 para simplificar y calcular las siguientes sumatorias.

$$2.26. \sum_{y=1}^3 y^3$$

$$2.29. \sum_{i=1}^5 (x^2 + 2i)$$

$$2.32. \sum_{x=1}^4 (x + xy^2)$$

$$2.34. \sum_{i=1}^n (y_i - a)$$

$$2.27. \sum_{y=1}^3 6$$

$$2.30. \sum_{y=0}^5 (x^2 + y^2)$$

$$2.33. \sum_{i=1}^2 (y_i - i)$$

$$2.35. \sum_{i=1}^n (y_i - a)^2$$

$$2.28. \sum_{x=2}^3 (1 + 3x + x^2)$$

$$2.31. \sum_{x=0}^2 (x^3 + 2ix)$$

Calcule las sumas de los ejercicios 2.36 al 2.41 usando los siguientes conjuntos de observaciones.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y_i	3	12	10	-6	0	11	2	-9	-5	8	-7	4	-5

$$2.36. \sum_{i=1}^{13} 2y_i$$

$$2.38. \sum_{i=3}^{10} y_i^2$$

$$2.40. \sum_{i=1}^{13} (y_i - 2)^2$$

$$2.37. \sum_{i=1}^{13} (2y_i - 5)$$

$$2.39. \sum_{i=1}^{10} (y_i^2 + y_i)$$

$$2.41. \sum_{i=1}^{13} y_i^2 - \frac{1}{13} \left(\sum_{i=1}^{13} y_i \right)^2$$

Verifique las siguientes identidades. Cada identidad es una fórmula que se usará en capítulos posteriores. Los símbolos $\bar{x}$ y $\bar{y}$ que aparecen en las identidades se definen como

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

$$2.42. \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n}$$

$$2.43. \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n}$$

$$2.44. \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 \right]$$

$$2.45. \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

2.46. Suponga que los números 5, 1, 6, 2, 1, 3 representan una muestra de tamaño $n = 6$ tomado de una población. Sea $y_1 = 5$, $y_2 = 1$, $y_3 = 6$, $y_4 = 2$, $y_5 = 1$ y $y_6 = 3$.

- a. Calcule $\sum_{i=1}^n y_i$. b. Calcule $\sum_{i=1}^n y_i^2$.

2.47. Use los resultados del ejercicio 2.46 para calcular la cantidad indicada en el ejercicio 2.42.

2.48. Una muestra aleatoria de pérdidas mensuales

por robo en un supermercado proporciona las siguientes observaciones (en miles de dólares) 3.9, 3.8, 4.6, 3.2, 4.3, 4.1 y 3.8. Sean $y_1 = 3.9$, $y_2 = 3.8$, ..., $y_7 = 3.8$.

- a. Calcule $\sum_{i=1}^n y_i$. b. Calcule $\sum_{i=1}^n y_i^2$.

2.49. Use los resultados del ejercicio 2.48 para calcular la cantidad indicada en el ejercicio 2.44.