

Unidad 3

- Análisis de Decisiones

- 10.1 La población y la muestra
- 10.2 Certidumbre e incertidumbre
- 10.3 Análisis del problema de decisión
- 10.4 Decisiones de valor monetario esperado
- 10.5 Justificación de las decisiones de valor monetario esperado
- 10.6 El impacto económico de la incertidumbre
- 10.7 Toma de decisiones incluyendo información muestral
- 10.8 Otros temas en el análisis de decisiones
- 10.9 Resumen

10 Análisis de decisiones

10.1 La población y la muestra

Las pruebas de hipótesis y los métodos de inferencias vistos en los capítulos ocho y nueve se basan, en su totalidad, en información muestral. Se recordará que el objetivo de este enfoque, que se podría calificar de **clásico** o **empírico**, hacia la estadística, es el de inferir sobre ciertas características poblacionales; como lo son la media y la proporción de defectuosos; basando dichas inferencias en la información contenida en una muestra de la población. Sobre la población misma, se hacen ciertas suposiciones, ya sea sugeridas por su naturaleza o apelando al teorema central del límite. Sobre la base de estas suposiciones, se puede determinar la distribución muestral de la estadística de interés; y en consecuencia, se pueden construir los intervalos confidenciales apropiados o probar la hipótesis de interés.

El enfoque clásico fue extendido significativamente, durante la década de los sesentas, entre otros por R. Schlaifer, para permitir a la persona encargada de la toma de las decisiones, integrar sus percepciones sobre la incertidumbre y sus apreciaciones personales del problema, al esquema mismo de la toma de la decisión. Este enfoque moderno se conoce como **análisis de decisiones** y se podría definir como **el análisis lógico y cuantitativo de todos los factores que afectan una decisión**. Los encargados de la toma de decisiones, bajo este enfoque, se han visto forzados a participar más activamente en el proceso; y por otro lado, el mencionado enfoque les ha permitido tener ahora, como soporte, una serie de reglas consistentes con su lógica y experiencias personales, en contraste al uso mecánico de un conjunto de fórmulas y probabilidades tabuladas.

Una diferencia clara entre el enfoque clásico y el del análisis de decisiones, aparece en la consideración de los errores. En la estadística clásica, se emplean

las probabilidades α y β de los dos tipos de errores en un problema de prueba de hipótesis, para comparar las bondades de procedimientos alternativos. En las aplicaciones, este enfoque ha causado un apego desmedido a reglas y fórmulas, como lo es evidente en el sello casi religioso asociado al nivel de significancia $\alpha = .05$. Sabemos que hay que tener mucho cuidado al seleccionar α y β en una prueba de hipótesis. Estas probabilidades deben considerar las pérdidas asociadas a los errores que las definen, al mismo tiempo que cualquier otra información *a priori*, que pudiera no estar contenida en la información muestral. Pero es frecuente que en la práctica, el experimentador seleccione un valor arbitrario para α (por ejemplo $\alpha = .05$). Cuando la selección de α es arbitraria, el enfoque del análisis de decisiones sostiene que la consideración de la pérdida esperada proporciona un criterio más práctico y realista en la comparación de los procedimientos. Como se verá, el análisis de decisiones utiliza el concepto de ganancia o pérdida asociada a cada posible curso de acción disponible al encargado de la decisión, y entre ellos, selecciona aquel que maximiza su ganancia esperada (minimiza su pérdida esperada).

El propósito fundamental del análisis de decisiones es el incrementar la verosimilitud de buenos resultados, haciendo buenas decisiones. En donde se considera un buen resultado como aquel que gustaría que ocurriera, y una buena decisión, como aquella que es consistente tanto con la información disponible como con las apreciaciones del encargado de la toma de la decisión. El análisis de decisiones pretende establecer un esquema basado en toda la información disponible, ya sea ésta muestral, apreciativa o una combinación de ambas.

El análisis de decisiones no se encuentra en realidad en conflicto con el enfoque clásico hacia la inferencia estadística. La diferencia entre ellos estriba simplemente en el grado de formalidad de los procedimientos empleados y en el grado de participación del encargado de la decisión.

10.2 Certidumbre e incertidumbre

En las situaciones en las que se enfrenta una toma de decisiones, el encargado de dicha toma debe escoger una entre varias acciones o alternativas a seguir. A veces, tanto las posibles acciones como sus ganancias (consecuencias) son del conocimiento de la persona encargada de tomar la decisión. El inversionista que debe elegir entre varios tipos de inversión, el dueño de un comercio que debe decidir el nivel de inventario de determinado artículo y el ejecutivo que decide sobre presupuestos de operación, son todos ejemplos de toma de una decisión por un encargado, en donde la toma de la decisión consiste en elegir una dentro de una serie de posibilidades de acción. El encargado de decidir, sin embargo, es difícil que sepa con certeza cuál de las alternativas que tiene es la mejor, puesto que la ganancia que pueda traer como consecuencia cada una de ellas depende de los valores que tomen ciertas variables económicas. A estos valores se les llama genéricamente **los estados de la naturaleza** ya que representan eventos que pueden ocurrir o "estados de las cosas" sobre las cuales el encargado de la decisión no tiene control.

Es costumbre denotar a los estados de la naturaleza en un problema de decisión por los símbolos s_1, s_2, \dots, s_k . Esto es, el primer estado de la naturaleza es s_1 , el segundo s_2 , y así sucesivamente. **Se supone, en todo momento que los estados de la naturaleza son mutuamente excluyentes (no puede ocurrir que dos de ellos rijan al mismo tiempo), y colectivamente exhaustivos (todos los posibles estados están representados en el análisis).**

Suponga que son n las acciones o alternativas disponibles al encargado de tomar la decisión, y que se denotan por a_1, a_2, \dots, a_n . **También se supone que las alternativas son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivas.**

El significado preciso de los estados de la naturaleza y las alternativas en un problema particular es algo único para ese problema. Un inversionista desea invertir determinada cantidad en cuenta de ahorros, bonos del estado o en acciones de una mutualidad. Sus alternativas son precisamente las tres inversiones mencionadas mientras que los estados de la naturaleza que pudieran influenciar sus ganancias son los posibles estados del mercado de valores en el futuro próximo. Otro inversionista puede estar en disposición de invertir todo, parte o nada de su dinero en las mismas tres inversiones posibles. Sus alternativas representan todas las posibles maneras en las que puede distribuir su dinero entre las tres inversiones y son prácticamente ilimitadas en cuanto a número. En estos casos, se acostumbra agrupar algunas alternativas y eliminar otras para poder llegar a una solución analítica del problema de decisión. En todo problema se requiere de gran perceptividad e ingenio por parte del encargado de decidir para que se identifiquen alternativas y consecuencias y así puedan definirse los estados de la naturaleza que afectan los resultados.

Cuando el estado de la naturaleza s_j (que rige) es conocido, se dice que el encargado de decidir trabaja bajo **certidumbre**. Si ese no es el caso se dice que lo hace bajo **incertidumbre**.

La toma de decisiones bajo certidumbre es en general más fácil. El encargado sencillamente evalúa la ganancia (consecuencia) de cada alternativa y selecciona aquella acorde a su objetivo. Si el número de alternativas es muy grande, aun en el caso de certidumbre, la mejor decisión puede ser difícil de encontrar. Por ejemplo, considere el problema de hacer entregas a 100 residencias en una cierta área urbana. Hay literalmente miles de rutas para hacer las entregas y una que es la más económica (en cuanto a tiempo, recorrido, etc.) Si el mismo problema se plantea con 3 entregas, ahí sí se puede encontrar la ruta óptima haciendo una lista, ya que el número de alternativas es pequeño.

Bajo incertidumbre, el proceso de decidir es siempre más complicado. La teoría de la probabilidad y el concepto de esperanza matemática ofrecen herramientas que permiten establecer procedimientos lógicos para seleccionar la mejor alternativa. La estadística proporciona el marco para llegar a una decisión. El encargado de decidir, sin embargo, debe aportar su intuición y conocimientos previos del problema al marco mismo del proceso de decisión para que éste quede justificado teóricamente por un lado, y se sienta razonable intuitivamente. Son ingredientes esenciales para la toma de decisiones bajo incertidumbre, un buen marco teórico y un enfoque con sentido común. Sin ambos de ellos no se puede hacer gran cosa.

Para comprender mejor estas ideas, considere a un inversionista que desea invertir \$1000 en uno de tres posibles tipos de inversión. La inversión A es un

plan de ahorro con un interés del 6% anual. La inversión B es un bono del gobierno con un interés equivalente al $4\frac{1}{2}\%$ anual. Estas dos inversiones no presentan ningún riesgo y por ello no representan ningún tipo de incertidumbre al inversionista. Suponga que la inversión C consiste en acciones de un fondo mutualista con una redituabilidad variable según sus cotizaciones en el mercado de valores. El interés anual de la inversión C depende del comportamiento *incierto* del fondo.

Suponiendo que se invertirá todo el dinero en alguno de los tres tipos de inversión o no se invertirá, las alternativas del inversionista son:

- a_1 : No invertir
- a_2 : Invertir en A; 6% interés anual.
- a_3 : Invertir en B; $4\frac{1}{2}\%$ interés anual.
- a_4 : Invertir en C; interés incierto.

Las acciones a_1 , a_2 y a_3 traen ganancias que no dependen de ninguna consideración ajena, esto es, no hay incertidumbre al considerarlas. Es claro que entre éstas, a_2 **domina** a las alternativas a_1 y a_3 . En general se dice que una acción domina a una segunda acción, si la primera se prefiere siempre, esto es, sin importar el estado de la naturaleza. A menos de que el inversionista asociara otro tipo de consideraciones (por ejemplo patrióticas y así preferiría a_3), a_2 es preferible a a_3 pues el aumento en 6% de su capital es preferible al $4\frac{1}{2}\%$. Similarmente a_2 es preferible a a_1 , que representa el no aumentar en nada el capital y claramente a_1 es inferior como alternativa aun a a_3 .

Para analizar la inversión C se requieren otras consideraciones. Esta alternativa (a_4) tiene asociada una consecuencia (ganancia) incierta, que depende de la economía y que puede ser una buena ganancia, mala ganancia o quizás inclusive negativa. Por lo que se puede apreciar, no existe entonces una relación de dominancia entre a_2 (que es la mejor entre a_1 , a_2 y a_3) y a_4 .

Suponga que el inversionista cree que si el mercado está bajo ("flojo") durante el año venidero, entonces las acciones del fondo perderán 10%; si el mercado está estable, las acciones conservarán su precio y si el mercado crece, las acciones subirán 20%. Así, el inversionista define tres estados de la naturaleza.

- s_1 : Mercado flojo.
- s_2 : Mercado estático.
- s_3 : Mercado creciente.

Un estudio del mercado así como de las expectativas económicas del año en cuestión han llevado al inversionista a asignar a cada uno de estos estados inciertos, probabilidades subjetivas de materialización (realización) de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ respectivamente. La pregunta ahora es, ¿cómo puede usar el inversionista toda esta información como una ayuda para decidirse por la mejor alternativa? Se verá la respuesta en las secciones 10.3 y 10.4.

Ejercicios

- 10.1. Para cada uno de los problemas de toma de decisiones en negocios, haga una lista de las alternativas (acciones) que se le presentan al encargado de decidir, así como de los estados de la naturaleza que

pudieran afectar las ganancias (consecuencias).

- a. El lanzamiento al mercado de un nuevo tipo de refresco embotellado en una región determinada.
- b. La decisión referente al número de paquetes de pan que deben ordenarse diariamente en una tienda de alimentos, sabiendo que la demanda diaria varía entre 10 y 15 paquetes y que estos se echan a perder de un día para otro.
- c. La decisión que una constructora de inmuebles debe hacer respecto al número de casas-habitación que construirá en una zona determinada si cuenta con financiamiento suficiente hasta para siete casas.
- d. Decidir si se concursa o no para obtener el contrato de construcción de una obra pública.
- e. Decidir el precio al cual se lanza al mercado una

nueva "brocha de aire" para pintar.

- f. La decisión sobre la marca de automóvil que se comprará para formar una flotilla de "taxis" por una firma de transporte.

10.2. ¿Es la toma de decisiones bajo certidumbre siempre más fácil que bajo incertidumbre? Explique.

10.3. Escoja una decisión importante que haya tenido que hacer recientemente; como el escoger en donde estudiar o su empleo actual o quizás en donde invertir sus ahorros. Identifique las alternativas que se le presentaron y los estados de la naturaleza asociados a su problema. ¿En su problema enfrentó una toma de decisiones bajo certidumbre o bajo incertidumbre?

10.3 Análisis del problema de decisión

En cualquier problema en el cual se debe elegir una entre una serie de alternativas, se deben identificar primero todas las acciones que pueden llevarse a cabo y los estados de la naturaleza cuya ocurrencia podría afectar a la decisión. Asociada a cada acción posible, el encargado de decidir tendría una lista de ganancias (consecuencias). Esta lista corresponde a los valores numéricos que tiene la consecuencia asociada a esa acción y a la realización de cada posible estado de la naturaleza. En el caso de acciones no afectadas por incertidumbre, el valor numérico de las consecuencias será el mismo sin importar que estado de la naturaleza ocurra.

La lista de ganancias (valor numérico de las consecuencias) asociadas a cada resultado (acción-estado de naturaleza) posible se listan en una tabla referida como **tabla de ganancias** y definida como sigue:

Definición

Una **tabla de ganancias** es un listado tabular del valor numérico de las consecuencias asociadas a cada posible acción y estado de la naturaleza en un problema de decisión.

La tabla de ganancias se da usualmente en un reticulado en el cual los estados de la naturaleza se representan por las columnas y las distintas acciones por las filas. Si se denotan las acciones por a_1, a_2, \dots, a_n y los estados de la naturaleza por s_1, s_2, \dots, s_k , la tabla de ganancias para el problema de decisiones aparecería como la de la tabla 10.1. Las ganancias aparecen en cada una de las nk celdas de la tabla, esto es, una ganancia para cada combinación de acción-estado de la naturaleza.

En este momento resulta conveniente examinar con mayor detalle lo que se quiere dar a entender por ganancia. ¿Qué es lo que quiere lograr el encargado de tomar la decisión? Bajo el supuesto de que actúa racionalmente, tras de examinar sus alternativas, **seleccionará la acción que mejor satisfaga sus**

objetivos. Las ganancias o valores numéricos que él asigna como consecuencias de cada posible resultado (combinación acción-estado de la naturaleza) están dadas en unidades numéricas que sean consistentes con sus objetivos.

Tabla 10.1 *Tabla de ganancias*

ACCIÓN	ESTADO DE LA NATURALEZA				
	s_1	s_2	s_3	\dots	s_k
a_1					
a_2					
a_3					
\vdots					
a_n					

Es posible que estas unidades no tengan una representación en unidades monetarias o posiblemente representen una mezcla de utilidad económica y alguna otra cuantificación subjetiva como por ejemplo “impacto ambiental.”

El problema que sigue, ilustra la importancia de considerar objetivos distintos al usual de maximizar utilidades en el corto plazo.

Un doctor está ante el problema de medicinar a un grupo de obreros de una fábrica que muestran erupciones (“rash”) en la piel abdominal. El doctor desconoce el origen de este tipo de erupción aunque para casos similares sabe que un tratamiento barato con base en una loción medicinal funciona con bastante éxito. Al mismo tiempo, el doctor conoce un medicamento caro que podría aliviar las erupciones. De 20 pacientes, el doctor recetó la loción a 10 de ellos y el medicamento caro al resto. Después de 3 días, los 10 que recibieron el medicamento caro están curados completamente. De los 10 que fueron tratados con la loción, nueve quedaron completamente curados en 6 días y el décimo paciente no ha podido curarse.

El doctor decidió en lo futuro administrar el medicamento caro a todos los obreros que presentasen la erupción epidérmica. Es obvio que el costo del medicamento resultará sólo marginal si se consideran como medidas para las consecuencias (ganancias) la “tasa de curación” y “horas hombre perdidas.”

Una compañía va a construir una planta subsidiaria para la cual debe escoger entre dos sitios posibles. El más caro de ellos se encuentra en una área de alto índice de desempleo y con un bajo nivel de ingreso per-capita. La compañía decide construir en el sitio más caro. Es obvio que los ejecutivos de la compañía han querido maximizar algún objetivo de tipo social y no meramente el de gastar lo menos posible. Posiblemente al largo plazo el mejoramiento de la imagen de la compañía resulte más importante. Aquí, las consecuencias se medirán en unidades de “valor social” o “imagen lograda” y son esas unidades numéricas las que aparecerán en la tabla de ganancias correspondiente.

Los planes de defensa militar se hacen utilizando la probabilidad de una determinada consecuencia en daños para poder estudiar las alternativas. Las compañías de explotación forestal utilizan un modelo que combina las conse-

cuencias medidas en costo de siembra forestal y consideraciones de tipo ambiental y ecológico. Las expediciones científicas miden las consecuencias en términos de la utilidad de los hallazgos para la comunidad científica y para la comunidad en general.

A continuación se muestra un ejemplo de construcción de un **modelo de asignación de valores**. Este ejemplo consiste en la selección de una de tres alternativas bajo certidumbre ya que la consecuencia o efecto de cada alternativa es sabida.

Ejemplo 10.1 El presidente de una compañía manufacturera está considerando tres sitios potenciales en donde construir una planta subsidiaria. Para decidirse por el sitio en el cual se construirá, el presidente debe determinar hasta que grado cada sitio alternativo satisface los objetivos de la compañía. Estos objetivos son el minimizar los costos de transporte, minimizar el efecto de los impuestos locales y tener acceso a un conjunto grande de obreros semicalificados. Construya un modelo para las consecuencias y defina las medidas que permitan establecer la manera en que cada sitio satisface los objetivos de la compañía de minimizar costos de transporte, efectos de impuestos locales y tener un acceso a mano de obra semicalificada.

Solución Llámese a los tres sitios potenciales, A, B y C. Para determinar la medida para las consecuencias de cada alternativa, el presidente asigna en una escala 0 – 10, una calificación a cada sitio en cuanto al grado con el que satisface cada uno de los objetivos particulares de la compañía (transporte, impuestos y mano de obra) en donde 0 quiere decir totalmente insatisfactorio y 10 totalmente satisfactorio. Los resultados se muestran en la tabla 10.2.

Tabla 10.2 Puntajes para los tres sitios alternativos del ejemplo 10.1

OBJETIVO DE LA COMPAÑÍA	ALTERNATIVA		
	SITIO A	SITIO B	SITIO C
Costos de transporte	6	4	10
Costos de impuestos	6	9	5
Existencia de mano de obra	7	6	4

Para poder combinar las componentes de las consecuencias el presidente se pregunta por la importancia relativa de cada uno de los objetivos de la compañía. Suponga que ha decidido que el minimizar el costo del transporte es lo más importante y que de hecho es el doble en importancia que el minimizar el efecto de los impuestos o el tener acceso a mano de obra semicalificada. Con lo anterior lo que hace es asignar una ponderación (peso) de 2 al transporte y una ponderación de 1 tanto a impuestos como a mano de obra. La siguiente resulta como medida de las consecuencias o “ganancias.”

$$\text{ganancia (sitio A)} = 6(2) + 6(1) + 7(1) = 25$$

$$\text{ganancia (sitio B)} = 4(2) + 9(1) + 6(1) = 23$$

$$\text{ganancia (sitio C)} = 10(2) + 5(1) + 4(1) = 29$$

Es claro que antes de que un encargado de tomar una decisión pueda racionalmente evaluar un conjunto de alternativas, deberá **identificar claramente sus metas y objetivos**. Hecho lo anterior, deberá **definir una medida de la ganancia que permita, en efecto, ordenar los resultados de acuerdo a qué tanto satisfacen sus objetivos**. La medida de ganancia es entonces única para el encargado de decidir y sus preferencias y es única para cada problema que se presente.

Existen métodos avanzados que sirven para los casos de ganancias no monetarias y se presentan en cursos posteriores. Para simplicidad en la presentación y por ahorro de tiempo y espacio se supondrá en lo que resta de este capítulo, que las consecuencias son monetarias y que se medirán por una **utilidad** o una **pérdida relativa**.

Definición

La **pérdida relativa** $L_{i,j}$ al seleccionar la acción a_i , dado que el estado de la naturaleza es s_j , es la diferencia entre la ganancia máxima que podría hacerse si s_j ocurre y la ganancia que se obtiene al seleccionar a_i si s_j ocurre. Por construcción esta pérdida no puede ser negativa.

La pérdida relativa es cero si se escoge la acción óptima para cada estado de la naturaleza. Una pérdida relativa distinta de cero no implica que se haya perdido esa cantidad físicamente; sólo significa que si se hubiera seleccionado la mejor acción para ese estado de la naturaleza, s_j , se habría ganado $L_{i,j}$ adicionales.

Esta pérdida relativa se conoce también como “pesadumbre” y no está físicamente relacionada con pérdidas. En un sentido muy general, la pérdida relativa es una medida de la cantidad de ganancia que se perdió por tomar una acción particular en lugar de la óptima; todo esto para un estado dado s_j .

Una tabla en donde aparecen las pérdidas relativas en un análisis de decisiones se llama **tabla de pérdidas relativas** y una en la que se exhiban las utilidades se llama **tabla de utilidades**.

El proceso de decisión consiste en seleccionar, dentro de la lista de alternativas posibles, aquella acción que satisfaga de la mejor manera los objetivos del encargado de decidir. Esta decisión se llama **decisión óptima**. En las secciones 10.4, 10.7 y 10.8 se analizarán los procedimientos necesarios para lograr varios objetivos de tipo económico.

Ejemplo 10.2 Para el problema de inversión discutido en la sección 10.2, construya la tabla de pérdidas relativas.

Solución Denote las acciones “no invierta,” “seleccione la inversión A,” “seleccione la inversión B” y “seleccione la inversión C” por a_1 , a_2 , a_3 , y a_4 respectivamente. Denote por s_1 , s_2 y s_3 a los estados de la naturaleza que representan “mercado flojo,” “mercado estático” y “mercado creciente” respectivamente.

Las acciones a_1 , a_2 y a_3 no se veían afectadas en sus consecuencias por los estados de la naturaleza pero a_4 sí se veía afectada. Las utilidades asociadas a este problema se encuentran en la tabla 10.3.

Tabla 10.3 *Tabla de utilidades para el problema de inversión (en unidades de dolar)*

ACCIÓN	ESTADO DE LA NATURALEZA		
	s_1 "flojo"	s_2 "igual"	s_3 "creciente"
a_1 (no invertir)	0	0	0
a_2 (A)	60	60	60
a_3 (B)	45	45	45
a_4 (C)	-100	0	200

Se puede observar que si el estado de la naturaleza que rige es s_1 o s_2 , la mejor acción es a_2 , el plan del 6% de inversión. Pero si el mercado es creciente, esto es, s_3 rige, entonces la utilidad de \$200 (de la inversión C) es la mayor.

De la definición, la tabla de pérdidas relativas se construye de la tabla 10.3 y aparece en la tabla 10.4.

Tabla 10.4 *Tabla de pérdidas relativas (pesadumbres) para el problema de inversión*

ACCIÓN	ESTADO DE LA NATURALEZA		
	s_1 "flojo"	s_2 "igual"	s_3 "creciente"
a_1 (no invertir)	60	60	200
a_2 (A)	0	0	140
a_3 (B)	15	15	155
a_4 (C)	160	60	0

Ejemplo 10.3

Un comerciante debe decidir cada mañana cuantos artículos (de tipo perecedero) debe incluir en su inventario. Los artículos le cuestan \$2 cada uno y los vende a \$5 cada uno, obteniendo en cada artículo vendido una ganancia de \$3. Al final del día, un artículo no vendido representa una pérdida total. Construya la tabla de pérdidas relativas (pesadumbres).

Solución En este problema los estados de la naturaleza son los niveles de demanda que ocurren en el día y las distintas acciones son los posibles niveles de inventario. Las utilidades asociadas a cada acción y nivel de demanda se dan en la tabla 10.5 en donde se suponen niveles de inventario 1, 2 y 3, denotados por a_1 , a_2 y a_3 respectivamente. Similarmente las demandas están denotadas por s_1 , s_2 y s_3 . La tabla de pérdidas relativas aparece en la tabla 10.6.

Tabla 10.5 *Tabla de utilidades para el problema de demanda-inventario*

ACCIÓN-INVENTARIO	ESTADO DE LA NATURALEZA, DEMANDA		
	s_1 (1)	s_2 (2)	s_3 (3)
a_1 (1)	3	3	3
a_2 (2)	1	6	6
a_3 (3)	-1	4	9

Tabla 10.6 *Tabla de pérdidas relativas (pesadumbres) para el problema de demanda-inventario*

ACCIÓN-INVENTARIO	ESTADO DE LA NATURALEZA, DEMANDA		
	s_1 (1)	s_2 (2)	s_3 (3)
a_1 (1)	0	3	6
a_2 (2)	2	0	3
a_3 (3)	4	2	0

En el problema de inversión de la sección 10.2, los estados de la naturaleza que estarían vigentes no tenían ningún efecto en el resultado de las inversiones A y B. Para la inversión C, el estado de la naturaleza que ocurriese sí tenía un efecto en los resultados de la inversión. Esperamos que esto ilustre una aseveración hecha anteriormente: El juicio y apreciaciones personales así como el razonamiento subjetivo del encargado de decidir, se requieren para poder identificar los estados de la naturaleza relevantes al problema y para poder asignar a estos probabilidades para su ocurrencia.

La percepción, intuición y buen juicio del encargado de la toma de una decisión son entonces una parte integral del análisis en la toma de decisiones moderna.

Definición

Las probabilidades que representan la factibilidad de ocurrencia de cada uno de los estados de la naturaleza en un problema de decisión y que se han asignado antes de cualquier recopilación de muestras son llamadas **probabilidades *a priori***.

¿Cómo deben obtenerse las probabilidades *a priori*? Como se indicó en el ejemplo 10.2, en ocasiones es posible estimar las probabilidades de los distintos estados de la naturaleza por experiencia pasada. En este caso la probabilidad estimada sería simplemente la frecuencia relativa de ese estado de la naturaleza en el pasado. En otros problemas, sin embargo, la apreciación que se tenga sobre la posible ocurrencia de los estados de la naturaleza no es del tipo frecuencial. En estos casos, se requieren métodos para asignar probabilidades *a priori*. (Vea a Howard (1966) o Winkler (1972) que aparecen en las referencias, para algunas técnicas que suman opiniones personales en relación a probabilidades *a priori*.)

En resumen, no hay una respuesta sencilla respecto al cómo asignar probabilidades *a priori*. Como es frecuente que la decisión óptima sea muy sensible a pequeños cambios en las probabilidades *a priori*, el encargado de la toma de decisión busca entonces unas probabilidades *a priori* precisas y veraces. **Para conseguirlo, utiliza toda la información de que disponga y se apoya en su juicio y experiencia para procesar esa información e identificar lo mejor que pueda sus probabilidades *a priori*.**

No se profundizará más en el aspecto necesariamente subjetivo del marco en el cual se plantea la toma de decisiones y se supondrá que ya ha quedado formulado. En lo que resta de este capítulo, se presentan procedimientos lógi-

cos de selección de la mejor acción una vez que se hayan identificado todos los estados de la naturaleza, las ganancias (consecuencias) de cada acción-estado de la naturaleza y las probabilidades *a priori* respectivas.

Ejercicios

10.4. Reconstruya el proceso por el cual decidió estudiar en la universidad en la que actualmente está. Escoja otros dos lugares que pudo haber seleccionado y construya un modelo para la decisión como el visto en el ejemplo 10.1. Como medidas de las consecuencias, escoja calidad de la educación y medio ambiente social del lugar; califique en una escala de 0–10 cada concepto de cada posible lugar. Combine estos valores de acuerdo a la medida de importancia que usted les asigna. ¿Fue consistente con este análisis la decisión que hizo de estudiar en donde actualmente lo hace?

10.5. El dueño de un expendio de revistas compra los ejemplares de un semanario en \$0.60 cada uno y los vende en \$1.00. La evidencia pasada indica que la demanda semanal de esa revista es de 9 hasta 12. Si las revistas no vendidas no pueden devolverse al final de la semana, construya la tabla de utilidades semanales del dueño del expendio en relación a la revista bajo estudio y construya también la tabla de pérdidas relativas (pesadumbres).

10.6. Un investigador observa que las tasas variables de intercambio de monedas en flotación han creado incertidumbre para aquellos que trabajan en negocios de importación y exportación.* Por ejemplo, suponga el caso de un importador que está considerando una oferta de tapetes de piel de borrego

*W.D. Serfass, Jr., "You Can't Outguess the Foreign Exchange Market," *Harvard Business Review*, marzo-abril de 1976.

de Nueva Zelanda para distribuirlos en los Estados Unidos. Las recientes devaluaciones de la moneda de Nueva Zelanda (respecto al dólar) han creado una situación favorable en cuanto a precios competitivos, de los productos neozelandeses en el exterior, pero si la moneda flotase hacia arriba respecto al dólar, se tendría el efecto contrario. Si el importador acepta la oferta del productor de tapetes, él estima que sus ganancias son las que aparecen en la tabla, bajo cada una de tres posibles relaciones de cambio monetario que pudieren ocurrir entre la moneda neozelandesa y el dólar durante el siguiente año.

RELACIONES DE CAMBIO MONETARIO	GANANCIAS
Flotación hacia abajo respecto al dólar	\$30,000
Sin cambio	15,000
Flotación hacia arriba respecto al dólar	7,500

Si se acepta la oferta, el envío de tapetes por vía aérea tendría un costo anual de \$9,000 que tendría que pagar el importador.

- Identifique las alternativas y los estados de la naturaleza para el importador.
- Construya la tabla de utilidades para el importador.
- Construya la tabla de pérdidas relativas (pesadumbres) para el importador.

10.4 Decisiones de valor monetario esperado

Un procedimiento para tomar una decisión que utiliza la tabla de ganancias (consecuencias, utilidades, etc.) y las probabilidades *a priori* asociadas a cada estado de la naturaleza es referido como el procedimiento de valor monetario esperado.

Definición

Una **decisión de valor monetario esperado** consiste en la selección de una acción disponible basándose en la pérdida relativa esperada o bien en la utilidad esperada de cada acción.

La decisión de valor monetario esperada óptima es la selección con pérdida relativa esperada mínima o bien utilidad esperada máxima, dependiendo del objetivo del encargado de decidir. Se verá más adelante que las decisiones de pérdida relativa esperada mínima y las decisiones de utilidad esperada máxima están asociadas a las mismas decisiones óptimas.

El concepto de valor monetario esperado es una aplicación de la esperanza matemática (sección 5.5), en donde la pérdida relativa o bien la utilidad es la variable aleatoria y las probabilidades *a priori* representan a la distribución de probabilidad asociada a esta variable aleatoria. La pérdida relativa esperada para cada acción a_i se encuentra evaluando la fórmula que se da en el cuadro.

Evaluación de la pérdida relativa esperada usando probabilidades *a priori*

$$E(L_i) = \sum_{\text{todas las } j} L_{i,j} P(s_j) \quad i = 1, 2, \dots$$

en donde $L_{i,j}$ es la pérdida relativa al seleccionar la acción a_i siendo s_j el estado de la naturaleza que ocurre, y $P(s_j)$ es la probabilidad *a priori* de ocurrencia del estado s_j .

Si el interés es evaluar la utilidad esperada para cada acción, el análisis sería el mismo sólo que se substituirían las pérdidas relativas $L_{i,j}$ por las utilidades $G_{i,j}$ en la fórmula del cuadro. (El símbolo G representa una *ganancia*.)

Los siguientes ejemplos son para aclarar el procedimiento computacional que se requiere en la búsqueda de la decisión de valor monetario esperado.

Ejemplo 10.4 Refiérase al ejemplo 10.2. Encuentre la decisión óptima que minimiza la pérdida relativa esperada del inversionista.

Solución Las probabilidades *a priori* asociadas a los estados de la naturaleza s_1 , s_2 y s_3 son $P(s_1) = \frac{1}{4}$, $P(s_2) = \frac{1}{4}$ y $P(s_3) = \frac{1}{2}$. De ahí que las pérdidas relativas esperadas para a_1 , a_2 , a_3 y a_4 sean:

$$E(L_1) = \$60\left(\frac{1}{4}\right) + \$60\left(\frac{1}{4}\right) + \$200\left(\frac{1}{2}\right) = \$130$$

$$E(L_2) = \$0\left(\frac{1}{4}\right) + \$0\left(\frac{1}{4}\right) + \$140\left(\frac{1}{2}\right) = \$70$$

$$E(L_3) = \$15\left(\frac{1}{4}\right) + \$15\left(\frac{1}{4}\right) + \$155\left(\frac{1}{2}\right) = \$85$$

$$E(L_4) = \$160\left(\frac{1}{4}\right) + \$60\left(\frac{1}{4}\right) + \$0\left(\frac{1}{2}\right) = \$55$$

La acción a_4 , la de invertir en el fondo mutualista, es la decisión de valor monetario esperado óptimo ya que su pérdida relativa esperada es menor que la de las otras acciones.

Las acciones a_1 y a_3 pudieron haber sido eliminadas del análisis desde un principio ya que las ganancias que les están asociadas no eran nunca superiores a las de a_2 ; esto es, estaban dominadas. Se dejaron en el ejemplo sólo por razones ilustrativas.

Súponga que en lugar de trabajar con la tabla de pérdidas relativas se utiliza la de utilidades y con ella se calcula la utilidad esperada para cada acción:

$$E(G_1) = \$0\left(\frac{1}{4}\right) + \$0\left(\frac{1}{4}\right) + \$0\left(\frac{1}{2}\right) = \$0$$

$$E(G_2) = \$60\left(\frac{1}{4}\right) + \$60\left(\frac{1}{4}\right) + \$60\left(\frac{1}{2}\right) = \$60$$

$$E(G_3) = \$45\left(\frac{1}{4}\right) + \$45\left(\frac{1}{4}\right) + \$45\left(\frac{1}{2}\right) = \$45$$

$$E(G_4) = -\$100\left(\frac{1}{4}\right) + \$0\left(\frac{1}{4}\right) + \$200\left(\frac{1}{2}\right) = \$75$$

La acción con utilidad esperada máxima resulta ser a_4 , lo cual no es una coincidencia. En todos los casos la decisión óptima utilizando la pérdida relativa esperada o la utilidad esperada será la misma. Una demostración de lo anterior se sigue de la definición de pérdida relativa. **La diferencia entre las pérdidas relativas esperadas de dos acciones es igual en magnitud pero de signo contrario a la diferencia entre las utilidades esperadas de esas acciones.** Por ejemplo, en el ejemplo 10.4, si se observan las acciones a_2 y a_4 , se tiene que

$$E(L_4) - E(L_2) = \$55 - \$70 = -\$15$$

$$E(G_4) - E(G_2) = \$75 - \$60 = \$15$$

Usando cualquiera de los dos métodos, la acción a_4 es mejor que la a_2 por \$15.

Ejemplo 10.5 Habiendo hecho un registro de la demanda diaria del artículo perecedero descrito en el ejemplo 10.3, el comerciante pudo construir la siguiente distribución de probabilidad para los niveles de demanda diaria:

s_j	$P(s_j)$
1	.5
2	.3
3	.2
4 ó más	0

Encuentre el nivel de inventario que minimice la pérdida relativa esperada para el problema de demanda-inventario descrito en el ejemplo 10.5.

Solución Las frecuencias registradas en el pasado; las probabilidades *a priori* en este caso; aparecen en la tabla. Las pérdidas relativas esperadas se encuentran evaluando

$$E(L_i) = \sum_{j=1}^3 L_{i,j} P(s_j)$$

para cada nivel de inventario $i = 1, 2, 3$.

Se obtiene

$$E(L_1) = \$0(.5) + \$3(.3) + \$6(.2) = \$2.10$$

$$E(L_2) = \$2(.5) + \$0(.3) + \$3(.2) = \$1.60$$

$$E(L_3) = \$4(.5) + \$2(.3) + \$0(.2) = \$2.60$$

Así, la decisión óptima del comerciante es la de almacenar 2 unidades del artículo al inicio de cada día.

Nótese que en el ejemplo 10.5, las probabilidades *a priori* se asignaron a cada estado de la naturaleza con base empírica de registros históricos. Aun así, la subjetividad y la intuición están implícitas en este caso como lo muestra el hecho de que las frecuencias observadas en el pasado se piensan adecuadas para representar lo que ocurrirá en el futuro. En cualquier problema de decisión, las probabilidades *a priori* contienen toda la información disponible, empírica y subjetiva, relacionada con las posibilidades (factibilidades, verosimilitudes) de ocurrencia de los estados de la naturaleza.

Ejercicios

10.7. Refiérase al ejercicio 10.5. Sobre la base de evidencia histórica, el dueño del expendio de revistas piensa que la demanda semanal de la revista referida es como sigue:

<i>Demanda</i>	9	10	11	12
<i>Probabilidad de la demanda</i>	.20	.15	.35	.30

Encuentre el número de ejemplares que el dueño debe comprar cada semana para maximizar sus utilidades semanales.

10.8. Refiérase al ejercicio 10.6. Suponga que tras de haber consultado con un experto en asuntos monetarios internacionales, el importador decide que las probabilidades *a priori* son las siguientes. La probabilidad de que el dólar neozelandés flote hacia abajo respecto al dólar estadounidense en el próximo año es .10; la probabilidad de que el tipo de cambio se mantenga como ahora es .50 y la probabilidad de una flotación hacia arriba de la moneda neozelandesa es .40. Si el importador pretende maximizar su utilidad esperada, ¿debe aceptar la oferta de los tapetes? ¿Cuál es la utilidad esperada asociada a la decisión de aceptar la importación?

10.9. Un inversionista está considerando dos alternativas de inversión para una suma de \$25,000 de la cual dispone. Por un lado tiene la posibilidad de invertir su dinero al 7% anual sin ningún riesgo. Por el otro, sin embargo, tiene la opción de invertir en un negocio consistente en la construcción y operación de un elegante restaurante. Si el negocio del restaurante es exitoso, se espera que al cabo de un año su inversión valga \$100,000. Si el negocio no es

exitoso, se piensa convertir el restaurante en un expendio de comestibles con el cual se estima que al final del año su inversión valga \$15,000, y finalmente, si el negocio es un fracaso, se piensa utilizar la construcción para almacén, con lo cual se estima que el valor de la inversión al final del año será de \$7,500. Suponga que las probabilidades de que la inversión inicial de \$25,000 en el negocio del restaurante se convierta en \$100,000, \$15,000 y \$7,500 respectivamente son .25, .5 y .25. Si el inversionista desea maximizar su ganancia esperada al final de un año de inversión, ¿deberá invertir en el negocio del restaurante? ¿Cuál es la ganancia esperada para cada una de las dos alternativas de inversión?

10.10. El análisis de decisiones se utiliza frecuentemente en los problemas de lanzamiento al mercado de nuevos productos.* Suponga por ejemplo que un ejecutivo tiene que decidir si su compañía debe lanzar al mercado un producto nuevo para consumo de una determinada clientela.

El ejecutivo ha determinado que los ingresos que recibirá la compañía por la venta de este producto están directamente relacionados al porcentaje p de consumidores que lo compran. De hecho ha establecido la siguiente fórmula para los ingresos:

$$\text{ingreso (\$)} = \$50,000 + \$100,000(p).$$

Habiendo hecho un análisis cuidadoso del mercado potencial, el ejecutivo ha encontrado la siguiente distribución de probabilidad para p :

*Vea a F.J. Anscombe, "Bayesian Statistics," *American Statistician*, febrero de 1961.

Proporción de consumidores p que comprarán el producto	.10	.20	.30	.40	.50	.60
Probabilidad $P(p)$.10	.15	.30	.25	.15	.05

Si los costos de desarrollo, publicidad y promoción para el lanzamiento del nuevo producto al mercado se estiman en \$75,000, ¿deberá el ejecutivo recomendar el lanzamiento del producto? (Sugerencia: ¿Es el ingreso esperado superior al costo?)

10.5 Justificación de las decisiones de valor monetario esperado

Las decisiones basadas en ganancia o pérdida relativa esperada se pueden interpretar más fácilmente si pensamos en ellas en el largo plazo. Si el problema se repite muchas veces y en cada una de ellas se elige la acción óptima, en promedio, se incurre en pérdidas relativas inferiores a las que se incurriría si se escogiera alguna otra acción. Esta idea se ilustra muy claramente en el ejemplo 10.5. Si el comerciante almacena 2 unidades al inicio de cada día, su promedio de pérdidas relativas es aproximadamente de \$1.60, que es menor que el promedio de pérdidas relativas que experimentaría si decide almacenar 1 ó 3 unidades cada día.

En experimentos que no pueden repetirse, como lo son el problema de inversión de la sección 10.2 o el problema de presupuestos de operación, las decisiones de valor monetario esperado no son fáciles de justificar. Para el problema de inversión se espera que la ganancia promedio para la inversión C sea de \$75, o lo que es lo mismo, un rédito de $7\frac{1}{2}\%$ sobre la inversión. La decisión de valor monetario esperado es el escoger la inversión C ya que el rédito *esperado* de $7\frac{1}{2}\%$ es superior al rédito *seguro* del 6% de la inversión A y del $4\frac{1}{2}\%$ de la B.

La mejor forma de interpretar decisiones de valor monetario esperado que no puedan repetirse es examinando las pérdidas relativas esperadas (pesadumbres esperadas). La pérdida relativa esperada asociada a la decisión óptima es la pérdida relativa que se espera si se selecciona esa decisión. Lo anterior no quiere decir que la pérdida relativa que se experimente en la realidad, al tomar la decisión óptima, coincida con el valor esperado. A menudo es imposible que el valor esperado se obtenga. Del ejemplo 10.4, la decisión óptima era seleccionar a_4 con una pérdida relativa esperada de \$55. Sin embargo, nótese que si a_4 es seleccionada, las pérdidas relativas que se experimentarían son \$160, \$60 y \$0; y ninguna de ellas es igual a la pérdida relativa esperada de \$55.

Lo que queda implicado, es que la pérdida relativa esperada mide el **costo esperado de la incertidumbre** ya que la incertidumbre sobre el estado de la naturaleza que rige, es la que impide elegir la acción más apropiada.

Si se nos diera la oportunidad de conocer el estado de la naturaleza que rige, debiéramos estar en disposición de pagar hasta una cantidad igual al costo esperado de la incertidumbre por saber el estado que rige. El minimizar el costo esperado de la incertidumbre parece entonces, un objetivo lógico y es eso precisamente lo que se hace al seleccionar la acción asociada a la ganancia esperada máxima y la pérdida relativa esperada mínima.

Otra forma de justificar el uso de este esquema de decisión es examinando las componentes del valor monetario esperado. Las ganancias o pérdidas son resultados de tipo económico y las frecuencias relativas de sus ocurrencias son las probabilidades *a priori* asignadas a los estados de la naturaleza. De este modo, un análisis de valor monetario esperado proporciona un modelo en el cual se combinan resultados reales económicos e información cualitativa y subjetiva sobre la realización o materialización de los resultados económicos. Es el único modelo de que dispone el encargado de decidir en el que se incorpore toda la información con que se cuenta en ese momento. Por ser el encargado de decidir el que proporciona la información subjetiva, el modelo lo hace un participante activo y no solamente un observador imparcial. Quizás esto último sea lo más importante para decidir bajo incertidumbre pero lo más difícil de llevar a cabo a la vez.

El reasignar valores para las probabilidades *a priori* cambia con frecuencia la decisión óptima. Suponga que en el problema de la sección 10.2, el inversionista, después de reconsiderar sus expectativas, decide que las probabilidades *a priori* son:

$$P(s_1) = \frac{1}{4} \quad P(s_2) = \frac{1}{2} \quad P(s_3) = \frac{1}{4}$$

Ahora la ganancia esperada para la inversión C es

$$E(G_4) = -\$100\left(\frac{1}{4}\right) + \$0\left(\frac{1}{2}\right) + \$200\left(\frac{1}{4}\right) = \$25$$

Sin embargo las ganancias esperadas para las inversiones A y B siguen siendo \$60 y \$45 respectivamente. Entonces, bajo las nuevas probabilidades *a priori*, la inversión C se convirtió en la tercera, siendo ahora la “nueva” decisión óptima, el seleccionar A.

Como las decisiones de valor esperado monetario utilizan probabilidades en su análisis, se supone que las probabilidades *a priori* asignadas a los estados de la naturaleza son las probabilidades verdaderas para ese problema. La decisión óptima de valor esperado monetario tiene sentido sólo en términos de las probabilidades *a priori* asignadas. Si el encargado de decidir no tiene una confianza absoluta en sus probabilidades *a priori*, debe entonces ensayar el análisis con otras probabilidades *a priori* que le parezcan igualmente razonables para examinar la decisión óptima a la que se llega y así estudiar la *sensibilidad de la decisión a la selección de probabilidades a priori*. El como conducir un análisis de sensibilidad se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.6

Brown* muestra un ejemplo elemental de un análisis de sensibilidad que se revisa a continuación. Un corredor de metales de Nueva York tiene la oportunidad de importar 100,000 toneladas de mineral de hierro al precio, muy ventajoso, de \$5 la tonelada. El corredor piensa que en el mercado interno es seguro que puede vender el mineral a \$8 la tonelada sin embargo no es seguro que pueda conseguir el permiso de importación. Si no puede conseguir el

*R.V. Brown, “Do Managers Find Decision Theory Useful?” *Harvard Business Review*, mayo-junio de 1970.

permiso de importación, el contrato de importación se anula con un costo para el corredor de \$1 por tonelada.

a. Si el corredor quiere maximizar su ganancia esperada, ¿debe comprar el mineral si sus expectativas de conseguir el permiso de importación son 50-50?

b. Debido a información recibida por el corredor de un grupo de consultores, piensa que es poco factible el conseguir el permiso de importación. ¿Qué tan grande debiera ser la probabilidad de que le sea concedido el permiso de importación para que el corredor considere ventajosa la operación de compra?

Solución Las alternativas para el corredor son el aceptar la oportunidad de compra del mineral (a_1) o el no aceptarla (a_2). Los estados de la naturaleza tienen que ver con la concesión (s_1) o no concesión (s_2) del correspondiente permiso de importación. Las consecuencias (ganancias) aparecen en la tabla.

	ESTADO DE LA NATURALEZA	
	Permiso otorgado, s_1	Permiso no otorgado, s_2
No comprar mineral, a_2		
Comprar mineral, a_1	\$300,000	-\$100,000
No comprar mineral, a_2	0	0

a. Si las expectativas para obtener el permiso son 50-50, esto es $P(s_1) = \frac{1}{2}$ y $P(s_2) = \frac{1}{2}$, se encuentra la ganancia esperada asociada a cada alternativa por:

$$E(G_1) = \$300,000\left(\frac{1}{2}\right) - \$100,000\left(\frac{1}{2}\right) = \$100,000$$

$$E(G_2) = \$0\left(\frac{1}{2}\right) + \$0\left(\frac{1}{2}\right) = \$0$$

De lo anterior se sigue que para maximizar su ganancia esperada el corredor deberá comprar el mineral.

b. Si el corredor no compra el mineral, su ganancia esperada es \$0 (nada se arriesga, nada se gana y nada se pierde). Así que para comprar el mineral requiere $E(G_1) > E(G_2)$ o lo que es lo mismo $E(G_1) > 0$. Suponga que p representa la probabilidad de que le sea otorgado el permiso. Entonces es cierto que

$$E(G_1) = \$300,000(p) - \$100,000(1 - p)$$

El valor $E(G_1)$ será positivo si y sólo si $\$300,000(p) - \$100,000(1 - p)$ es positivo, esto es

$$E(G_1) > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \$300,000(p) - \$100,000(1 - p) > 0$$

o sea si y sólo si $p > \frac{1}{4}$.

En otras palabras, se requiere que la probabilidad de que le sea otorgado el permiso sea de por lo menos $\frac{1}{4}$ para que le resulte conveniente tomar la decisión de comprar el mineral.

Ejercicios

10.11. El presidente de una planta de manufactura debe enfrentar un posible incremento en la demanda del producto de su planta. Tiene como una de sus alternativas, el ignorar ese incremento en demanda ya que su planta opera con toda su capacidad instalada. Como segunda alternativa él puede comprar una pequeña planta en \$100,000 y utilizarla para la producción adicional si la demanda aumenta. La compañía incrementará sus ganancias en \$600,000 si la demanda aumenta y si ese no es el caso, sus ingresos se mantendrán constantes. Se estima que la probabilidad de que la demanda aumente es .10.

a. Construya una tabla de pérdidas relativas para este problema de decisión.

b. Si el presidente desea minimizar la pérdida relativa esperada de la compañía, ¿debe comprar la planta adicional?

c. Suponga que el presidente se muestra indeciso respecto a la probabilidad asignada al aumento de demanda. ¿Qué tan grande debiera ser esta probabilidad para que el presidente pueda justificar la compra de la planta adicional?

10.12. Un contratista de construcción está considerando el concursar o no concursar para la obtención de un contrato de construcción de un conjunto habitacional. Los análisis necesarios de los planes del conjunto y la planeación requerida para concursar le cuestan a su compañía constructora \$50,000. Si concursan y obtienen el contrato estiman obtener una ganancia neta de \$250,000 (ya descontando el costo de concursar). Si el objetivo del contratista es el de maximizar su ganancia esperada, ¿qué tan grande debe ser la probabilidad de que gane el concurso para que se justifique que en efecto concurse?

10.6 El impacto económico de la incertidumbre

Ante un problema de decisión, la situación ideal sería la de saber qué estado de la naturaleza regirá. En el problema del inversionista, el saber que el mercado estará "flojo" le llevaría a elegir la inversión A; el saber que el mercado estará creciente le llevaría a elegir la inversión C. En el problema del inventario, si el comerciante sabe de antemano qué demanda habrá, elegiría entonces un nivel de inventario exactamente igual a ese nivel de demanda para satisfacerla sin sobrantes.

En circunstancias normales, la incertidumbre existe y el encargado de decidir debe actuar con la información más oportuna de acuerdo a sus intereses. El hecho de desconocer el estado de la naturaleza que regirá le impide esperar una ganancia (consecuencia) tan buena como la que esperaría si conociera dicho estado.

Si se utiliza un procedimiento de valor monetario esperado, el encargado de decidir, ante la incertidumbre, elige la alternativa que maximiza su ganancia esperada o minimiza su pérdida relativa esperada. Se define a continuación un concepto que ya se ha mencionado.

Definición

La pérdida relativa esperada asociada a la decisión óptima es llamada también **costo de la incertidumbre**.

El costo de la incertidumbre es la cantidad máxima que el encargado de decidir pagaría a cambio de saber exactamente el estado de la naturaleza que regirá. De ahí que sea éste el precio asociado de la información perfecta (aquella que elimina toda incertidumbre).

En ocasiones, el costo de la incertidumbre es referido como el **valor esperado de la información perfecta** o simplemente por su abreviatura VEIP.

En el ejemplo 10.4 la decisión óptima es el seleccionar la acción a_4 , con una pérdida relativa esperada $E(L_4) = \$55$. Se vió en el ejemplo 10.5 que la mejor acción era la a_2 con pérdida relativa esperada $E(L_2) = \$1.60$. Estos dos valores son los costos de la incertidumbre asociada al problema de la inversión y al del inventario respectivamente. En cada caso estos valores representan la cantidad máxima que el encargado de decidir estaría dispuesto a pagar por conocer exactamente el estado de la naturaleza que estaría vigente.

Para entender mejor el concepto de costo de la incertidumbre o VEIP veamos con más detalle el ejemplo 10.4., el problema de la inversión. Suponga que el inversionista conoce con certeza qué estado de la naturaleza regirá. Si sabe que ocurrirá s_1 o s_2 , seleccionará la acción a_2 ya que las pérdidas relativas al seleccionar a_2 bajo los estados s_1 o s_2 son mínimas. Similarmente, si conoce que s_3 regirá, seleccionará a_4 . En cada uno de esos casos la pérdida relativa es cero, así que la pérdida relativa *bajo certidumbre* es

$$E(L_0) = \$0\left(\frac{1}{4}\right) + \$0\left(\frac{1}{4}\right) + \$0\left(\frac{1}{2}\right) = \$0$$

Bajo incertidumbre, el encargado de decidir puede esperar una pérdida relativa (esperada) de \$55, seleccionando la acción óptima a_4 . De ahí que la incertidumbre sobre las condiciones futuras del mercado de valores le cueste al inversionista, en promedio, \$55 cada vez que enfrente una decisión para invertir como la descrita en la sección 10.2.

El costo de la incertidumbre o VEIP puede ser interpretado alternativamente en función de ganancias esperadas. Bajo certidumbre sobre el estado de la naturaleza que regirá, el encargado de decidir espera tener una ganancia de

$$E(G_0) = \$60\left(\frac{1}{4}\right) + \$60\left(\frac{1}{4}\right) + \$200\left(\frac{1}{2}\right) = \$130$$

seleccionando a_2 si ocurrirá s_1 ó s_2 y a_4 si ocurrirá s_3 .

Lo más que el inversionista espera ganar bajo incertidumbre, sin embargo, es \$75, que es la ganancia esperada asociada a la decisión óptima, elegir a_4 . La diferencia entre las ganancias esperadas bajo certidumbre e incertidumbre es entonces, $\$130 - \$75 = \$55$, el VEIP. **El costo de la incertidumbre, o, equivalentemente el VEIP es la cantidad que se deja de ganar (se pierde) por la presencia de condiciones de incertidumbre que afectan las consecuencias en un esquema de decisión.**

Suponga que el inversionista tiene la oportunidad de contratar los servicios de una firma consultora para asuntos de mercado de valores. La firma seguramente entrevistará a un número de expertos y analistas del mercado de valores y le venderá la opinión recabada de estas entrevistas respecto al comportamiento del mercado al año siguiente. ¿Qué tanto debe el inversionista pagarle a esta firma por la información que le dará? Si la firma le proporciona una información perfecta, el inversionista le pagará hasta \$55 por esa información, pero no más. En otras palabras, el valor de la información que pueda proporcionar la firma no puede ser mayor de \$55 para el inversionista en cuestión. El razonamiento que soporta la anterior aseveración es simple. Por ejemplo, si el inversionista paga \$60 a la firma por información perfecta, su

ganancia esperada será \$130 (la ganancia esperada con información perfecta) menos los \$60 que le cuesta la información. Le quedan \$70. Pero esta última ganancia neta esperada es \$5 menor que los \$75 que resultaron al evaluar la ganancia esperada bajo incertidumbre asociada a la elección (óptima) de la acción a_4 .

Como es natural que el inversionista no espere que le proporcionen información perfecta, en realidad la cantidad máxima que debiera estar dispuesto a pagar a la firma consultora debe ser inferior a \$55, y esa cantidad estará en función de la confiabilidad que se tenga sobre los procedimientos y pronósticos de la firma. Este último concepto, el de poder valorar o apreciar información imperfecta, será discutido en la siguiente sección.

Ejercicios

10.13. La inflación hace que las tasas de interés de los préstamos aumenten. Algunas instituciones de crédito se cubren contra la inflación ofreciendo créditos con interés variable. El solicitante del crédito tiene la opción de utilizar un crédito con determinada tasa de interés fija o uno con tasa de interés variable, que se fija después dependiendo de lo que ocurra en el mercado de dinero. Suponga que una persona necesita un crédito por \$10,000 para pagar dentro de un año, que puede obtener con un contrato de tasa fija al 8% anual. Después de consultar a un economista, el individuo ha determinado que las probabilidades para la tasa (variable) que estará en vigor durante el siguiente año son las siguientes.

Tasa de interés, i	7%	7.5%	8%	8.5%	9%
Probabilidad, $P(i)$.10	.25	.50	.10	.05

La persona debe decidir si aceptar el contrato con tasa fija del 8% o contratar el crédito con la tasa variable.

a. Construya la tabla de pérdidas relativas del solicitante del crédito.

b. Si el solicitante quiere minimizar su pérdida relativa esperada, ¿qué tipo de contrato debe aceptar?
c. Qué tanto debe estar en posición de pagar el solicitante para saber con exactitud la tasa que regirá en el año?

10.14. Refiérase al ejercicio 10.5. ¿Cuánto deberá estar en disposición de pagar el dueño del expendio de revistas para saber exactamente la demanda semanal de la revista?

10.15. Refiérase al ejercicio 10.10. Suponga que una compañía dedicada al estudio de mercados le propone al ejecutivo hacerle un estudio de la aceptación que tendrá su producto. Suponga además que la compañía ofrece obtener con certeza prácticamente, la proporción de consumidores que lo comprarán. Si le ofrecen este estudio al ejecutivo en \$2,000, ¿debe aceptar que lo hagan? Explique.

10.16. Encuentre el costo de la incertidumbre asociado al problema del inversionista del ejercicio 10.9. Dé una interpretación práctica del costo de la incertidumbre desde el punto de vista del inversionista.

10.7 Toma de decisiones incluyendo información muestral

En la definición y discusión hecha de las probabilidades *a priori* en las secciones 10.3 y 10.5 se mencionó que éstas se obtenían ya sea por una elección subjetiva o a través de las frecuencias observadas en registros históricos. No se suponía que existiera información de ese momento sobre las posibilidades de ocurrencia de los distintos estados de la naturaleza.

Es posible que en estos problemas, exista información observacional o algún otro tipo de evidencia de ese momento, que pueda ayudar al encargado de la decisión. Esta información puede adquirirse comprándola o posiblemente experimentando. Por ejemplo si un determinado vendedor vende más cuando hay buen tiempo, podría consultar a un meteorólogo antes de tomar una decisión o el inversionista podría contratar los servicios de un analista del mercado antes de invertir. Las encuestas para estudio del mercado que se realizan antes de lanzar un nuevo producto son un ejemplo de obtención de información en el cual el encargado de decidir usa esta información adicional. En cada caso, se busca información relativa a la ocurrencia de los estados de la naturaleza, que no sea de la misma fuente de la cual se determinaron las probabilidades *a priori*.

Si se obtiene ese tipo de información adicional, la ley de Bayes puede usarse para actualizar las probabilidades *a priori* de modo que reflejen esta información adicional. Estas probabilidades actualizadas son referidas como **probabilidades a posteriori**.

Definición

La **probabilidad a posteriori** $P(s_k/x)$ representa la posibilidad de ocurrencia del estado de la naturaleza s_k dada la información experimental x . Esta probabilidad está dada por

$$P(s_k/x) = \frac{P(x/s_k)P(s_k)}{\sum_{\text{todas las } i} P(x/s_i)P(s_i)}$$

La probabilidad $P(x/s_i)$ es la probabilidad condicional de observar la información x dado que el estado de la naturaleza que rige es s_i ; y $P(s_i)$ es la probabilidad *a priori* de s_i . La notación usada aquí para la ley de Bayes difiere de la presentada en el capítulo 4, pero el concepto es el mismo.

Las decisiones de valor monetario esperado se formulan del mismo modo ahora, con la salvedad de que en lugar de utilizar las probabilidades *a priori*, se utilizan las probabilidades *a posteriori*. Si el objetivo es el de minimizar la pérdida relativa esperada, ésta se calcula para cada acción a_i y como en el caso de no información muestral, la decisión óptima será aquella asociada a la acción con pérdida relativa esperada menor.

Evaluación de la pérdida relativa esperada utilizando probabilidades a posteriori

$$E(L_i) = \sum_{\text{todas las } j} L_{i,j} P(s_j/x) \quad i = 1, 2, \dots$$

Ejemplo 10.7 Es sabido que una determinada máquina opera produciendo el 5% o bien el 10% de defectuosos. Cuando la máquina está funcionando al nivel de 10% de defectuosos se le considera fuera de control por lo que es desconectada y

reajustada antes de ponerla de nuevo en operación. De la experiencia pasada, se piensa que la máquina opera al nivel de 5% (de defectuosos) el 90% del tiempo. Una muestra de $n = 20$ artículos producidos por esta máquina se inspeccionaron, de las cuales $y = 2$ defectuosos fueron encontrados. Basándose en la información tanto *a priori* como *experimental*, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina esté bajo control (esto es, operando al nivel de 5% de defectuosos)?

Solución Los estados de la naturaleza son los relacionados con los posibles niveles de defectuosos

$$s_1 = .05 \quad \text{y} \quad s_2 = .10$$

que se supone que ocurren con probabilidades *a priori* de .90 y .10 respectivamente. Se quieren utilizar estas probabilidades *a priori* pero actualizadas con la información muestral para encontrar la probabilidad *a posteriori* del estado s_i .

En la muestra, “la información experimental x ” es el haber observado $y = 2$ defectuosos de $n = 20$ artículos seleccionados de la producción de la máquina. Será necesario obtener la probabilidad de haber observado la información experimental x bajo cada uno de los estados s_j . Esto se hace utilizando la tabla de la distribución de probabilidad binomial (tabla 1 del apéndice). Bajo el estado $s_1 = .05$, se tiene

$$P(x/.05) = P(y = 2 \text{ de } n = 20/.05) = .925 - .736 = .189$$

Similarmente, bajo el estado $s_2 = .10$

$$P(x/.10) = .285$$

Ahora sí se tienen todos los elementos para poder utilizar la ley de Bayes y encontrar la probabilidad *a posteriori* de que la máquina esté bajo control (s_1) basando dicha probabilidad en la información tanto *a priori* como *experimental*.

Tabla 10.7 Tabla para el computo de la ley de Bayes, ejemplo 10.7

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	ESTADO DE LA NATURALEZA, s_j	PROBABILIDAD A PRIORI, $P(s_j)$	PROBABILIDAD DE LA INFORMACION EXPERIMENTAL, $P(x/s_j)$	PRODUCTO, $P(s_j)P(x/s_j)$	PROBABILIDAD A POSTERIORI, $P(s_j/x)$
s_1	.05	.9	.189	.1701	.86
s_2	.10	.1	.285	.0285	.14
		1.0		.1986	1.00

La aplicación de la ley de Bayes se comprende con mayor facilidad usando la tabla para el cómputo como se muestra en la tabla 10.7. En esa tabla, los estados de la naturaleza, sus probabilidades *a priori* y la probabilidad de haber observado la información experimental x bajo cada posible

estado se anotan en las tres primeras columnas. En la columna (4) se calculan los productos de los elementos de la columna (2) y la (3). Estos productos son en realidad las **probabilidades conjuntas** $P(xs_j) = P(s_j)P(x/s_j)$. Se suman las probabilidades de la columna (4). Esta suma es el denominador que aparece en la ley de Bayes y representa la **probabilidad marginal** de haber observado la información experimental x . Las probabilidades *a posteriori*, que aparecen en la columna (5), se obtienen finalmente dividiendo cada uno de los números de la columna (4) por la suma de ellos. Esto lo único que hace es reescalar las probabilidades de la columna (4) de modo que sumen 1. Por ejemplo

$$P(s_1|x) = \frac{.1701}{.1986}, \quad P(s_2|x) = \frac{.0285}{.1986}$$

Aun cuando se habían encontrado el 10% de defectuosos en la muestra ($y = 2$ de $n = 20$), la probabilidad *a posteriori* de que la máquina esté operando fuera de control, esto es a un nivel del 10% de defectuosos, resultó ser solamente .14, sólo un poco mayor que la probabilidad *a priori* que era .10. El resultado a la pregunta inicial, esto es la probabilidad *a posteriori* de que la máquina no esté fuera de control es .86.

Al revisar la solución del ejemplo 10.7, se puede observar que la presentación tabular para cómputo de la ley de Bayes permite calcular los mismos números que se obtendrían de la fórmula para la ley de Bayes. Para aquellos que no estén convencidos de lo anterior, se les sugiere que calculen también los números utilizando la fórmula.

La información experimental x en ocasiones no se presenta como información muestral. Puede presentarse como la opinión de un experto, el resultado de una investigación de ingeniería o de una prueba estructural, o como una tendencia económica imprevista. ¿Cómo puede utilizarse ese tipo de información para auxiliar en la toma de decisiones bajo incertidumbre? Lo primero que se hace es el establecer la confiabilidad de esa información y después se incorporan, junto con la medida de confiabilidad, al resto de la información para el análisis de decisiones.

Para ilustrar lo anterior, se puede utilizar el ejemplo de la sección 10.6 en el cual se menciona la posibilidad de contratar a una firma consultora para asuntos del mercado de valores. Obsérvese que la información experimental x es en realidad una opinión; opinión que externaría la firma consultora después de haber estudiado el problema. En el ejemplo esta opinión o información experimental se presentaría como una de las tres aseveraciones,

$x_1 =$ el mercado estará flojo

$x_2 =$ el mercado estará estático

$x_3 =$ el mercado crecerá

Las probabilidades $P(x/s_j)$ deben reescribirse $P(x_i/s_j)$ para denotar genéricamente cualquiera de las posibles opiniones que dará la firma, $i = 1, 2, 3$. Estas probabilidades en realidad miden la **confiabilidad** de la información

experimental dada por la firma. Si la información de la firma **elimina toda la incertidumbre** del problema, debiera cumplirse en ese caso, que

$$P(x_i|s_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En la medida en que los valores $P(x_i/s_j)$ se alejen de los valores extremos de información perfecta, se dice que la información es cada vez menos confiable y por ende, de menor valor.

Ejemplo 10.8 Reconsidere el problema de inversión del ejemplo 10.2. Suponga que el inversionista está considerando el contratar los servicios de la firma consultora. Se tiene registrado lo que en el pasado ha ocurrido cada vez que la firma consultora ha asesorado a un cliente. Los resultados de estos registros se han resumido en la tabla 10.8. Por ejemplo $P(x_1/s_2) = .15$ es la probabilidad de que la firma opine que el mercado estará flojo cuando realmente se quede estático. Encuentre la mejor decisión del inversionista basándola en la pérdida relativa esperada. Haga lo anterior para cada una de las posibles opiniones que externaría la firma consultora.

Tabla 10.8 Probabilidades condicionales que indican la confiabilidad de los estudios de la firma consultora $P(x_i/s_j)$.

OPINION, x	ESTADOS DE LA NATURALEZA		
	s_1 , flojo	s_2 , estático	s_3 , creciente
x_1 , flojo	.60	.15	.05
x_2 , estático	.30	.50	.25
x_3 , creciente	.10	.35	.70

Solución De la tabla 10.3 recordará que no importando qué estado de la naturaleza regía, la acción a_2 garantiza mayor ganancia que la acción a_1 ó la a_3 . Así que puede ignorarse a las acciones a_1 y a_3 que están dominadas por a_2 , reduciendo así el problema a la selección de a_2 o a_4 .

El análisis del problema consiste en encontrar tres decisiones; una para cada posible opinión de la firma consultora, esto es, seguirá “flojo,” “estático” o “creciente.” Primero se requiere evaluar las probabilidades actualizadas (*a posteriori*) para cada opinión x_j .

Tabla 10.9 Tabla para el cómputo de la ley de Bayes, ejemplo 10.8

(1) s_j	(2) $P(s_j)$	(3) $P(x_1/s_j)$	(4) $P(s_j)P(x_1/s_j)$	(5) $P(s_j/x_1)$
s_1 , “flojo”	1/4	.60	.1500	.706
s_2 , “estático”	1/4	.15	.0375	.176
s_3 , “creciente”	1/2	.05	.0250	.118
			.2125	1.000

Si la firma opina que el mercado estará flojo, utilizamos la ley de Bayes, con la forma tabular (vea la tabla 10.9), y encontramos que

$$P(s_1|x_1) = .706 \quad P(s_2|x_1) = .176 \quad P(s_3|x_1) = .118$$

Similarmente, bajo la opinión de la firma de que el mercado estaría estático, se tiene:

$$P(s_1|x_2) = .230 \quad P(s_2|x_2) = .385 \quad P(s_3|x_2) = .385$$

y si opinan que el mercado crecerá.

$$P(s_1|x_3) = .054 \quad P(s_2|x_3) = .189 \quad P(s_3|x_3) = .757$$

Suponga que la opinión es x_1 esto es que el mercado estará flojo. Entonces utilizando las pérdidas relativas de la tabla 10.4 y las probabilidades $P(s_j/x_1)$, $j = 1, 2, 3$, las pérdidas relativas esperadas para las acciones a_2 y a_4 respectivamente son:

$$E(L_2) = \$0(.706) + \$0(.176) + \$140(.118) = \$16.47$$

$$E(L_4) = \$160(.706) + \$60(.176) + \$0(.118) = \$123.53$$

Si la firma opina que el mercado estará "flojo," el inversionista deberá escoger el plan de ahorro del 6%, la acción a_2 . Las pérdidas relativas esperadas para los casos en que la firma opine "estático" (x_2) o "creciente" (x_3) se han calculado y aparecen en la tabla 10.10. Las decisiones óptimas para el inversionista pueden obtenerse con facilidad de esta tabla. Deberá seleccionar la acción a_2 si "flojo" o si "estático," pero deberá seleccionar la acción a_4 si la firma opina que el mercado estará "creciente."

Tabla 10.10 Pérdidas relativas esperadas para el ejemplo 10.8.

ACCION	OPINIONES DE LA FIRMA CONSULTORA		
	"flojo"	"estático"	"creciente"
a_2	\$ 16.47	\$53.85	\$105.95
a_4	123.53	60.00	20.00

El valor que tiene el haber actualizado las probabilidades *a priori* para llegar a esta solución más elaborada puede analizarse a través de dos aspectos. El primero de ellos es que al usar probabilidades *a posteriori* se utiliza una fuente independiente de información a la que sirvió para establecer las probabilidades *a priori*. Esto permite verificar la consistencia entre las estimaciones hechas y desde luego las probabilidades *a posteriori* incorporan la información de ambas fuentes. El segundo aspecto que vale la pena resaltar es que en este esquema, en lugar de tomar una decisión, de hecho se toman una serie de decisiones ya que se elige una acción para cada posible valor de la información experimental.

¿Cuál es el valor que tiene la información muestral? En el caso del inversionista, éste no debe pagar más de \$55 por información muestral ya que \$55 es el valor esperado de la información perfecta (VEIP). ¿Pero cuánto deberá

pagarse por la información muestral? Se contestará a esta pregunta en los párrafos que siguen.

Aún cuando no se mencionó explícitamente, se pueden encontrar las probabilidades marginales de ocurrencia de los distintos valores de la información muestral por medio de la fórmula del cuadro.

Cálculo de la probabilidad marginal $P(x_i)$

$$P(x_i) = \sum_{\text{todas las } j} P(x_i/s_j)P(s_j) \quad i = 1, 2, \dots$$

La fórmula anterior no es otra cosa que la suma de los elementos de la columna 4 cuando se utiliza el esquema tabular para el cómputo en la ley de Bayes. De lo anterior que la probabilidad de que la opinión de la firma consultadora sea “mercado flojo” es

$$P(x_1) = (.6)\left(\frac{1}{4}\right) + (.15)\left(\frac{1}{4}\right) + (.05)\left(\frac{1}{2}\right) = .2125$$

De manera análoga, las probabilidades de que las opiniones de la firma sean “estático” (x_2) y “creciente” (x_3) son respectivamente

$$P(x_2) = .3250 \quad \text{y} \quad P(x_3) = .4625$$

Se recordará que ante el reporte x_1 = “flojo” o x_2 = “estático,” la acción óptima era a_2 . Sin embargo, ante x_3 = “creciente,” la mejor decisión era a_4 . Refiriendo a la tabla 10.10, observe que la pérdida relativa esperada del inversionista si usa los servicios de la firma consultora son

$$\begin{aligned} E(L) &= \$16.47P(x_1) + \$53.85P(x_2) + \$20.00P(x_3) \\ &= \$16.47(.2125) + \$53.85(.3250) + \$20.00(.4625) = \$30.25 \end{aligned}$$

De ahí que la información experimental que proporciona la firma vale a lo más

$$\$55.00 - \$30.25 = \$24.75$$

ya que en efecto, se ha podido reducir el costo de la incertidumbre para el inversionista precisamente por esa cantidad, que se denomina **el valor esperado de la información muestral**. El inversionista no deberá pagar más de \$24.75 por la información de la firma bajo ninguna condición. Si compra la información por un valor menor que \$24.75 en realidad “está haciendo un buen negocio” con la compra de la información adicional.

Ejercicios

10.17. Un diario está considerando ampliar su red de distribución para incluir una ciudad vecina. El gerente general del diario en consideración cuenta con dos sistemas alternativos de distribución para esa ciudad vecina que por simplicidad se refieren como el sistema A y el B. Las ganancias que espera tener por

la ampliación de la distribución dependen del sistema que se elija para distribuir los diarios y desde luego depende también de la proporción de suscriptores que resulten de entre los 50,000 suscriptores potenciales de esa ciudad vecina. Dichas ganancias aparecen en la tabla.

NUMERO DE SUSCRIPTORES	PROPORCION DE SUSCRIPTORES, p	$P(p)$	GANANCIAS DIARIAS	
			SISTEMA A	SISTEMA B
20,000	.4	.3	\$1000	\$1200
25,000	.5	.5	1400	1500
30,000	.6	.2	2100	1800

a. Basándose en la información anterior ¿cuál es el mejor sistema de distribución?

b. ¿Cuánto debe estar dispuesto a pagar el gerente del diario por saber la proporción exacta de suscriptores resultantes?

10.18. Refiérase al ejercicio 10.17. Para reducir la incertidumbre en relación a la proporción de suscriptores, suponga que el gerente comisiona a un grupo de sus empleados para que pregunten a algunos de los suscriptores potenciales si se suscribirán a su diario y así estimar la proporción que se suscribirá. Suponga que se seleccionaron 25 de 50,000 suscriptores potenciales al azar y de ellos, 14 contestaron que se suscribirían. ¿Cuál es el mejor sistema de distribución ahora, utilizando la información muestral?

10.19. En el diseño de los empaques de artículos manufacturados, se busca que los empaques permitan su fácil manejo, almacenaje y que le parezcan “atractivos” al consumidor. El gerente de estudios de mercado de una compañía elaboradora de productos alimenticios está estudiando un nuevo empaque para el principal producto de la compañía. Antes de aceptar el diseño del empaque debe decidir si contrata a un grupo de investigadores de mercados para que estudien la reacción de los consumidores ante el nuevo diseño. El costo de contratar al grupo de investigadores es de \$2,500. Si con el nuevo diseño las ventas son “buenas,” se estima que se ganarán mensualmente \$20,000; si con el nuevo diseño las ventas son “regulares” se ganarán \$10,000 mensuales y si son “malas,” sólo \$3,000. El gerente, de su experiencia en el trato con este grupo de investigadores, ha elaborado la siguiente tabla para $P(x_i/s_j)$, que resume la confiabilidad de la información que proporcionan.

Si se decide no cambiar el empaque por el de

CONCLUSION DEL ESTUDIO (OPINIONES/DISEÑO)	ESTADO DE LA NATURALEZA (VENTAS)		
	BUENAS, s_1	REGULARES, s_2	MALAS, s_3
Favorable, x_1	.75	.40	.10
No Favorable, x_2	.25	.60	.90

nuevo diseño, se continuará con el antiguo, con el cual se tenían ganancias mensuales (constantes) de \$8,000. Adicionalmente, los gastos de publicidad para el empaque antiguo y nuevo son \$2,500 y \$5,000 respectivamente y se supone que las probabilidades asociadas a ventas “buenas,” “regulares” y “malas” después de cambiar al nuevo empaque son .425, .25 y .325 respectivamente.

- Construya la tabla de consecuencias para este problema. (Utilice como medida la ganancia o la pérdida relativa.)
- Si el gerente desea maximizar las ganancias esperadas de la compañía, ¿debe recomendar la adopción del nuevo empaque?
- ¿Cuál es el costo de la incertidumbre asociada a este problema?
- Si se contrata el grupo de investigadores de mercado, ¿debe emplearse el nuevo diseño si la conclusión del estudio es favorable? ¿Y si no es favorable?
- ¿Cuál es el valor esperado de la información muestral proporcionada por el grupo de investigadores? ¿Debe el gerente recomendar su contratación por los \$2,500 que cobran?

10.8 Otros temas en el análisis de decisiones

En los últimos 20 años, el análisis de decisiones ha pasado de ser un conjunto de reglas sujetas a controversia a ser una disciplina rigurosa cuyas técnicas se aceptan tanto por el teórico como por el práctico. En este capítulo sólo se han incluido los temas fundamentales hasta antes de esta sección. Otros temas de

menor importancia se verán en esta sección. Para un estudio más completo de los conceptos del análisis de decisiones, vea los textos de Schlaifer (1969), Winkler (1972) o el de Brown, Kahr y Peterson (1974). Todos ellos aparecen en las referencias.

Decisiones que ignoran la información a priori

Ocasionalmente, la actitud mostrada por el encargado de decidir al enfrentar riesgos, sugiere que existen límites en las cantidades de dinero que pueda estar dispuesto a perder. Por ejemplo un inversionista con una suma muy pequeña de capital o un comerciante que se encuentra cercano de la bancarrota. Las probabilidades *a priori* que se le asignen a los estados de la naturaleza son ignoradas por este tipo de individuos aun en los casos en que las probabilidades de situaciones desfavorables sean pequeñas ya que lo que les preocupa son las magnitudes reales de sus posibles pérdidas asociadas a cada acción sin fijarse en las magnitudes de sus posibles ganancias. Lo anterior hace que se tomen decisiones sin evaluar el valor monetario esperado. Un criterio de decisión que sigue los lineamientos descritos y que satisface un objetivo económico conservador lo proporciona la decisión **minimax**.

Definición

La decisión **minimax** es la selección de la acción cuya pérdida relativa máxima posible, resulte mínima.

El encargado de tomar la decisión minimax argumenta que para permanecer competitivo en su negocio, debe evitar a toda costa las grandes pérdidas relativas. El minimiza la pérdida relativa máxima y por hacer eso está ignorando posiblemente alternativas asociadas a la ganancia máxima posible. Al final de cuentas él se asegura una posición financiera estable.

Ejemplo 10.9 Encuentre la decisión minimax para el problema de inversión del ejemplo 10.2.

Solución La pérdida relativa máxima asociada a cada acción aparece en la tabla.

Acción	a_1	a_2	a_3	a_4
Pérdida relativa máxima	\$200	\$140	\$155	\$160

La decisión minimax es el seleccionar a_2 , el plan del 6%.

Otra posibilidad para un criterio de decisión es el **maximax** que selecciona la acción que maximice la ganancia máxima posible. Un individuo que utilice este criterio evidentemente no tiene mayor preocupación por el riesgo y podríamos calificarlo como "jugador." Posiblemente tenga una gran probabilidad de perder todo pero su preocupación es el ganar mucho y pronto.

El criterio **maximin**, el asociado a la acción que maximice la ganancia mínima posible, es similar en naturaleza al minimax.

Las técnicas anteriores tienen dos facetas en común. La primera de ellas es que el minimax, maximax, y maximin ignoran totalmente la información *a priori* relacionada con las posibilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza. Las actitudes frente al riesgo hacen que algunas de las consecuencias sean muy atractivas y otras no, independientemente de las posibilidades de ocurrencias de los estados de la naturaleza. La segunda faceta común a estas técnicas es que usualmente se asocian a decisiones que se tomarán una vez. Si este no fuera el caso y estas técnicas se usaran en varios problemas, necesariamente el promediar los resultados de emplear una de éstas sería equivalente a haber utilizado probabilidades para los estados de la naturaleza, cosa que precisamente se evita hacer con estas técnicas.

En ocasiones la decisión de valor monetario esperado y la obtenida por minimax, maximax o maximin resultan ser la misma. Esto es solo una coincidencia y no implica ninguna similitud entre los objetivos que se persiguen con cada una de ellas. La diferencia por otro lado es que la decisión de valor monetario esperado incorpora información *a priori* (probabilidades) en el análisis mientras que las otras ignoran esta información.

Arboles de decisión

Un diagrama de árbol es un dispositivo útil para ilustrar problemas de probabilidades en varias etapas. Cuando se aplica en el análisis de decisiones es llamado un **árbol de decisión**.

Los árboles de decisión deben su utilidad a los problemas de decisión en varias etapas, especialmente cuando éstas se encuentran en el tiempo. El árbol de decisión, presenta la anatomía del problema ilustrándolo gráficamente. En la medida en la que aumenta la complejidad del problema de decisión, aumenta también la utilidad del árbol para representarlo ya que enfoca la representación de la interrelación entre eventos y decisiones en el tiempo.

Para aclarar la interpretación de un árbol, los puntos de decisión (o nodos de decisión) se representan por cuadrados mientras que los puntos de aleatoriedad, sobre los cuales el encargado de decidir no tiene control, se representan por círculos. En la base del árbol, se encuentran las alternativas disponibles en la primera etapa. De cada alternativa el árbol presenta la trayectoria cronológica pasando por puntos de aleatoriedad y otros puntos de decisión hasta un punto terminal con su consecuencia (ganancia, pérdida relativa) asociada.

En la figura 10.1 se ilustra el problema de inversión con un árbol de decisión. Observe que la anatomía del problema se presenta al descubrir cómo las distintas actividades se van relacionando en el tiempo. Antes de que el inversionista decida si elige la acción a_2 ó la a_4 (a_1 y a_3 fueron eliminadas por ser dominadas), tendrá que decidir si compra o no la información de la firma consultora con un costo de \$C. La actividad en la primera etapa, la base del árbol, es la de decidir si comprar o no la información experimental. Cada rama del árbol ilustra una sucesión particular de actividades del punto inicial a un resultado final posible.

No existen reglas rígidas para la construcción de un árbol. El único requisito es que el árbol describa anatómicamente el problema ordenando en el

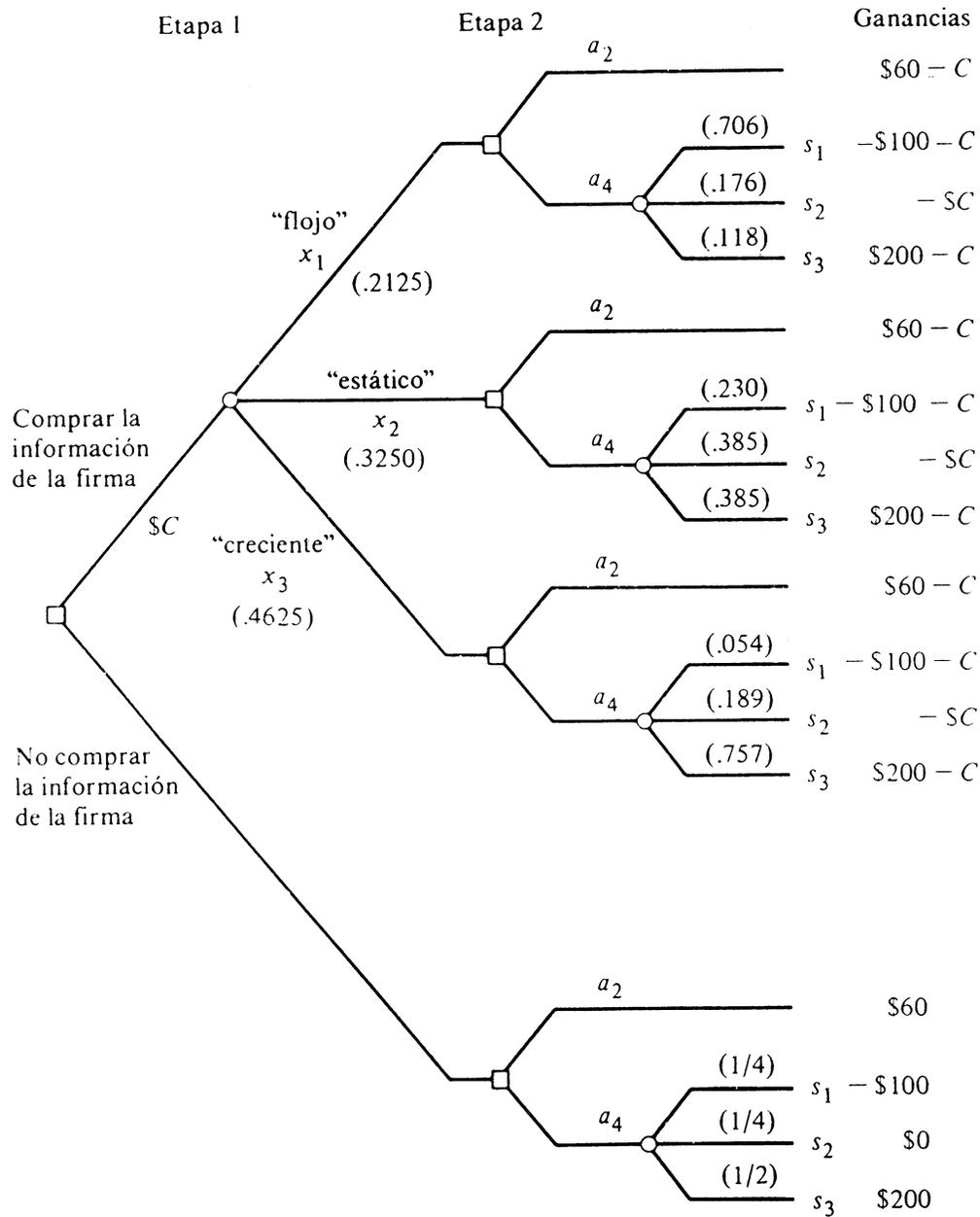


Figura 10.1 Árbol de decisión para el problema de inversión del ejemplo 10.8

tiempo las actividades. El encargado de decidir, con este auxilio gráfico, puede entonces proceder de atrás para adelante (consecuencias hacia punto inicial) identificando el conjunto de decisiones que satisfaga lo mejor que se pueda sus objetivos.

La utilidad del dinero

Suponga que el dueño de una casa de \$60,000 ha sido informado por sus actuarios de seguros, que existe una posibilidad de 1 en 200 de que su casa se incendie totalmente durante un año dado. Si el dueño puede comprar un

seguro contra incendio cuya prima anual es de \$350, ¿debe asegurar su casa o no?

Las consecuencias asociadas a cada acción dependiendo de si se incendia o no la casa, son las siguientes:

	INCENDIO, s_1	NO INCENDIO, s_2
Compra seguro, a_1	-\$350	-\$350
No compra seguro, a_2	-\$60,000	0

Las ganancias esperadas son:

$$E(G_1) = -\$350\left(\frac{1}{200}\right) - \$350\left(\frac{199}{200}\right) = -\$350$$

$$E(G_2) = -\$60,000\left(\frac{1}{200}\right) + \$0\left(\frac{199}{200}\right) = -\$300$$

Si se basará exclusivamente en el valor monetario esperado, el dueño no debiera comprar seguro. Sin embargo, podemos estar seguros que casi cualquier persona en las circunstancias del dueño de la casa compraría la póliza contra incendio.

El problema radica en que a menudo resulta inapropiado basar un análisis de decisiones exclusivamente en consideraciones de valor monetario esperado. **Una decisión de valor monetario esperado lleva implícita la suposición de que el valor de un dólar no cambia de una persona a otra y que D dólares en valor son lo mismo que D veces el valor de un dólar.** Estas suposiciones se invalidan cuando se considera que cada persona entiende algo distinto por bienestar económico y que por ende tienen distintos límites, a partir de los cuales ya no están dispuestos a arriesgarse.

La teoría de la utilidad proporciona un método por medio del cual las consecuencias de un problema de decisión pueden ordenarse de acuerdo al valor que les asigne el encargado de la decisión. Estas medidas del valor, describen conjuntamente lo que se llama la **curva de utilidad** del encargado de decidir. El análisis de la decisión se hace entonces en el problema que resulta de sustituir los valores monetarios por los valores "utilitarios" calculando para cada acción la utilidad esperada. La maximización de la utilidad esperada asegura que en realidad se maximiza un "valor" para el encargado de decidir en función de cómo percibe él las consecuencias. El que un individuo asigne físicamente utilidades a las consecuencias es una tarea compleja que requiere de una cuantificación de sus apreciaciones subjetivas del riesgo y este tema no se discute aquí en el texto. Para discusiones detalladas y algunos desarrollos modernos del cómo asignar valores utilitarios, refiérase al texto de Winkler (1972) o al de Brown, Kahr y Peterson (1974). Ambos se encuentran en las referencias.

Las medidas utilitarias se necesitan primordialmente en aquellos problemas de decisión en los cuales dentro de las posibilidades existan algunas cuyas consecuencias pongan en serias dificultades económicas o personales al encargado de decidir. En lugar de decidir con un criterio minimax, el encar-

gado de decidir puede simplemente reescalar (reevaluar) las consecuencias monetarias de acuerdo a sus preferencias y temores para así resolver el problema con un análisis de los valores utilitarios esperados. Esto le permite hacer uso de todos los ingredientes del problema, en especial las probabilidades asociadas a la realización de eventos inciertos, probabilidades que el criterio minimax ignora, y así obtener una decisión que maximice lo que él personalmente entiende por "el valor."

Ejercicios

10.20. Construya una tabla de pérdidas relativas y encuentre la decisión minimax asociada a cada uno de los siguientes ejercicios:

- a. ejercicio 10.5
- b. ejercicio 10.6
- c. ejercicio 10.9
- d. ejercicio 10.11
- e. ejercicio 10.13

10.21. Refiérase al ejercicio 10.19. Construya un árbol de decisión para describir gráficamente el pro-

blema de decisión enfrentado por el gerente de estudios de mercado. Como se muestra en la figura 10.1, indique los puntos de aleatoriedad por círculos y los de decisión por cuadrados.

10.22. En la tabla que sigue se presentan los valores utilitarios asociados a los valores monetarios por el encargado de decidir. Si el encargado de decidir quiere maximizar su utilidad esperada, ¿cómo deberá actuar en cada uno de los problemas de inversión descritos en a, b y c?

<i>Consecuencias en valor monetarios</i>	-\$10,000	-\$5,000	-\$1,000	\$0	\$5,000	\$10,000	\$25,000
<i>Valor utilitario</i>	0	.45	.50	.55	.70	.80	1.0

- a. La inversión de \$1,000 en una exploración petrolera que o bien produce \$10,000 o nada. La probabilidad de tener éxito en la exploración se estima en .1.
- b. La inversión de \$10,000 en un nuevo hotel-restaurante. Dependiendo del éxito que tenga el proyecto, el aumento neto se estima en \$25,000 con una probabilidad de .2, en \$5,000 con probabilidad .3, en una pérdida de \$5,000 con probabilidad de .4 y final-

mente en una pérdida total de \$10,000 con probabilidad .1.

c. En ambos de los problemas anteriores, compare las decisiones óptimas al usar como objetivos el maximizar el valor utilitario esperado y el maximizar la ganancia esperada. ¿Cómo explica las posibles diferencias en las decisiones óptimas en términos de los objetivos?

10.9 Resumen

Se caracteriza un análisis de decisiones como un análisis hecho por un encargado de seleccionar una, entre un conjunto de alternativas, algunas de las cuales tienen consecuencias inciertas. El encargado de decidir debe determinar cuál de entre las alternativas que tiene, satisface su objetivo.

Usualmente el objetivo en un tal análisis tiene que ver con una decisión de valor monetario esperado. Si ése es el caso, el encargado procede del siguiente modo:

1. Hace una lista de todas las acciones que él puede emprender y de todos los estados de la naturaleza que podrían afectar las consecuencias asociadas a esas acciones.

2. Hace una lista de la consecuencia (monetaria) asociada a cada acción bajo cada posible estado de la naturaleza.
3. Determina probabilidades "sensatas" que asigna a cada posible estado de la naturaleza para representar sus posibilidades de ocurrencia.
4. Calcula la ganancia o pérdida relativa esperada para cada acción.
5. Selecciona aquella acción con ganancia esperada máxima o con pérdida relativa esperada mínima. En ambos casos se llega a la misma decisión.

Si cuenta con información adicional para el análisis, puede usar la ley de Bayes para actualizar sus probabilidades a priori con base en esta información experimental adicional. Las probabilidades *a posteriori* reflejan así, toda la información disponible, la subjetiva y la experimental, que es relevante a la posibilidad de ocurrencia de los estados de la naturaleza.

Ejercicios

10.23. ¿En qué difieren los métodos para decidir del capítulo 10 de los vistos en los capítulos 8 y 9?

10.24. ¿Cuál es la justificación de usar un objetivo de valor monetario esperado en problemas de decisión bajo incertidumbre?

10.25. Para cada uno de los problemas de decisión que siguen, haga una lista de las acciones que se le presentan al encargado de decidir y de los estados de la naturaleza que podrían afectar los resultados.

a. El reemplazo de máquinas operadas manualmente para envoltura, por máquinas totalmente automáticas.

b. Alquilar un equipo de cómputo para procesar cheques y contabilidad interna en un banco comercial.

c. La ampliación de la red de distribución de una cervecería local de una distribución de dos estados a una de cuatro estados o bien una de siete estados.

d. La demanda diaria de embutidos de un expendio se sabe que varía entre 13 y 41 kilos. El dueño del expendio que sólo vende embutidos del día debe decidir cuánto embutido ordenar cada mañana.

e. La asignación de siete nuevas secretarías a siete lugares de trabajo.

f. La inversión que debe hacer una compañía de su fondo de retiro.

10.26. Refiérase al ejercicio 10.25 e indique si las consecuencias de las acciones posibles del encargado de decidir en los problemas mencionados en a hasta f se conocen con certeza o si existe incertidumbre. ¿Alguno de los 6 problemas requiere de tomar una decisión bajo incertidumbre?

10.27. Refiérase al ejercicio 10.25 e identifique una medida apropiada para las consecuencias para cada uno de los problemas mencionados en a hasta f.

10.28. Una comisión gubernamental está estudiando la ubicación de una planta nuclear para generación de energía eléctrica. Las alternativas bajo consideración son dos sitios distintos para construcción, llámelos a_1 y a_2 , y no construir la planta y continuar con la hidroeléctrica, a_3 . El primer sitio a_1 , junto al mar, presenta el problema de que la pesca en esa región se vería afectada por la elevación de la temperatura del agua por los sistemas de enfriamiento de la planta. El segundo sitio a_2 , se encuentra junto a un río y podría ser insuficiente la cantidad de agua que lleva para el ya mencionado sistema de enfriamiento. Finalmente si se escoge a_3 , el no construir la planta nuclear y continuar con la hidroeléctrica nada más, se corre el riesgo de que la cantidad de energía resulte insuficiente.

a. Si usted fuese un asesor de esta comisión gubernamental ¿qué medida le sugeriría para las consecuencias?

b. Suponga que la comisión ha determinado que los cuatro aspectos para valorar consecuencias en el modelo de decisión son (i) la capacidad que representa cada alternativa para enfrentar demanda eléctrica industrial en el futuro; (ii) la capacidad de cada alternativa para enfrentar demanda eléctrica para casas-habitación en el futuro; (iii) el efecto de cada alternativa en la economía pesquera del lugar y (iv) otras consideraciones de impacto ecológico. ¿Cómo recomendaría usted que la comisión integre estos aspectos en el modelo para que pueda obtener una medida razonable de las posibles consecuencias de cada alternativa.

c. Utilice su juicio personal y siguiendo un formato como el del ejemplo 10.1 asigne una medida para las consecuencias de cada alternativa utilizando las 4 componentes de b.