Unidad 6

- Fundamentos Económicos y Tecnológicos de la Eficiencia de la Inversión. Parte II

6.1 La eficiencia neta de la inversión.
6.2 Maximización de la eficiencia nacional neta de la inversión.
6.3 Un ejemplo de inversión en la industria y en la agricultura.
6.4 El retraso del producto y la composición en las inversiones.
6.5 Programación de la estructura cronológica y sectorial de la inversión.

FUNDAMENTOS ECONÓMICOS Y TECNOLÓGICOS DE LA EFICIENCIA DE LA INVERSIÓN.

8. *La eficiencia neta de la inversión.* Hasta aquí la discusión ha estado relacionada con la influencia de la inversión sobre el producto total de los varios sectores de la economía nacional y sobre el producto nacional. Consideremos ahora la influencia de la inversión sobre el producto final de los varios sectores de la economía nacional y sobre el ingreso nacional.

Según las ecuaciones de equilibrio (5.3) el producto final del sector j de la economía nacional es[8]

$$Y_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} X_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.1}$$

[8] Las ecuaciones (8.1) son idénticas a las ecuaciones (5.3). El cambio de los subíndices i y j no tiene significación, ya que son sólo variables aparentes. Se ha introducido el cambio para hacer que los subíndices concuerden con los que se usan en la parte anterior de este documento.

Así, el incremento del producto final en un año es

$$\Delta Y_j = \Delta X_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} X_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.2}$$

La suma del segundo miembro de esta expresión representa la parte del incremento del producto total del sector j destinada a reposición de los medios de producción consumidos en los varios sectores de la economía nacional. De esta manera, el incremento del producto final de un sector dado es igual al incremento del producto total de este sector, menos la parte del incremento del producto total asignada para reposición.

Sea

$$\sigma_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \Delta X_i}{\Delta X_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{8.3}$$

la fracción del incremento del producto total del sector j asignada para reposición en los varios sectores de la economía nacional. Llamaremos a estas fracciones *coeficientes de reposición*. Obviamente

$$0 \leqq \sigma_j \leqq 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.4}$$

Introduciendo las relaciones de reposición obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Delta X_i = \sigma_j \Delta X_j .$$

Ahora las ecuaciones de equilibrio (8.2) se pueden escribir como

$$\Delta Y_j = \Delta X_j (1 - \sigma_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.5}$$

En virtud de la igualdad (6.2) tenemos

$$\Delta Y_j = (1 - \sigma_j) \sum_{i=1}^{n} B_{ji} I_i .$$

Esto se puede escribir también en la forma siguiente:

$$\Delta Y_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ji} (1 - \sigma_j) _i \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.6}$$

La expresión $B_{ji}(1-\sigma_j)$ puede interpretarse que representa la *eficiencia intersectorial neta de la inversión.* Para denotarla usaremos el símbolo B'_{ji} y, así,

$$B'_{ji} = B_{ji}(1-\sigma_j) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.7}$$

La igualdad (8.6) se puede escribir en la forma

$$\Delta Y_j = \sum_{i=1}^{n} B'_{ji} I_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{8.8}$$

que significa que el incremento del producto final de cada sector es la suma ponderada de los productos de los sectores particulares destinados a inversión. Las ponderaciones son en este caso la eficiencia intersectorial neta de la inversión.

Sustituyendo el valor de la igualdad (7.4) en la (8.5) obtenemos

$$\Delta Y_j = I^{(j)}\beta_j(1-\sigma_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}). \tag{8.9}$$

La expresión $\beta_j(1-\sigma_j)$ se puede interpretar como la *eficiencia sectorial neta de la inversión* en el sector j de la economía nacional. Para denotarla usaremos el símbolo β'_j. Luego

$$\beta'_j = \beta_j(1-\sigma_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{8.10}$$

y la fórmula (8.9) se puede escribir como

$$\Delta Y = I^{(j)}\beta'_j. \tag{8.11}$$

De esta manera, el incremento del producto final en el sector j es igual a la inversión de este sector multiplicada por la eficiencia sectorial neta de la inversión del mismo sector.

Como se puede ver de las igualdades (8.7) y (8.10), la eficiencia neta de la inversión β'_{ji} y β'_j es igual, respectivamente, a la eficiencia correspondiente de la inversión β_{ji} y β_j multiplicada por $1-\sigma_j$, es decir, por 1 menos el coeficiente de reposición del sector dado. Esta multiplicación disminuye las relaciones producto-inversión en una cantidad correspondiente a la parte del producto total que se usa para reposición.

La fórmula (8.3) muestra que los coeficientes de reposición σ_j dependen de los coeficientes de producción a_{ji} y de los incrementos del producto ΔX_i en los varios sectores de la economía nacional y, por lo tanto, dependen de las condiciones tecnológicas del proceso de producción. De esta manera, llegamos a la conclusión de que la eficiencia intersectorial neta de la inversión, así como la eficiencia sectorial de la inversión, depende de las condiciones tecnológicas de la producción corriente y de las condiciones tecnológicas de la producción creciente.

Sumando las igualdades (8.8) de todos los sectores de la producción y en virtud de las ecuaciones (6.7) obtenemos el incremento anual del ingreso nacional

$$\Delta Y = I \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i B'_{ji} \,. \tag{8.12}$$

También se puede obtener este incremento sumando las igualdades (8.11) par todos los sectores y en virtud de las igualdades (7.3). Tenemos entonces

$$\Delta Y = I \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \beta'_j \,. \tag{8.13}$$

Las expresiones que tienen forma de sumas en las dos últimas fórmulas son iguales. Denotémoslas con β' y entonces obtenemos

$$\beta' = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i B_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \beta'_j \tag{8.14}$$

β' es la *eficiencia nacional neta de la inversión*. En vista de las igualdades (8.14), las fórmulas (8.12) y (8.13) pueden ambas tomar la forma

$$\Delta Y = I\beta'. \tag{8.15}$$

Esto significa que el incremento del ingreso nacional es igual a la inversión total en la economía nacional multiplicada por la eficiencia nacional neta de la inversión.

Las fórmulas (8.14) muestran que la eficiencia nacional neta de la inversión se puede representar bien como una media ponderada de la eficiencia intersectorial neta de la inversión o como una media ponderada de la eficiencia sectorial neta de la inversión. Las ponderaciones son, respectivamente, los coeficientes de la composición física de la inversión y los coeficientes de la asignación sectorial de la inversión.

La eficiencia nacional neta de la inversión también se puede expresar en forma que muestre directamente su relación con la eficiencia nacional de la inversión. Para este propósito introducimos σ, *coeficiente nacional de reposición:*

$$\sigma = \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \Delta X_i}{X}. \tag{8.16}$$

Esta fracción indica la parte del incremento del producto nacional que se destina a reposición de los medios de producción consumidos en un año en toda la economía nacional.

Sumando las ecuaciones (8.1) para todos los sectores de la economía nacional y en virtud de las igualdades (2.3) y (2.4) obtenemos

$$Y = X - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} X_i ,$$

de donde

$$\Delta Y = \Delta X - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \Delta X_i . \tag{8.17}$$

El incremento del ingreso nacional es igual al incremento del producto nacional menos la parte destinada a reposición.

Usando el coeficiente de reposición nacional el incremento del ingreso nacional se puede escribir en la forma

$$\Delta Y = \Delta X (1 - \sigma) \tag{8.18}$$

La introducción de este resultado en la igualdad (8.15) da origen a la siguiente:

$$\beta' = \frac{\Delta Y}{I} = \frac{\Delta X}{I} = (1 - \sigma)$$

y finalmente, en virtud de la igualdad (6.11),

$$\beta' = \beta (1 - \sigma). \tag{8.19}$$

De esta manera la eficiencia nacional neta de la inversión es igual a la eficiencia nacional de la inversión multiplicada por $1 - \sigma$. Puesto que

$$0 \leqq \sigma \leqq 1 \tag{8.20}$$

la efciencia nacional neta de la inversión debe ser menor que la eficiencia nacional de la inversión. La diferencia es igual a la parte del incremento del producto nacional destinada a reposición.

Finalmente, introduciendo la tasa de inversión relativa al ingreso nacional, representada con el símbolo α'; es decir

$$\alpha' = \frac{I}{Y} \tag{8.21}$$

y escribiendo $I = \alpha' Y$ podemos escribir de nuevo la igualdad (8.15) de la manera siguiente

$$\Delta Y = \alpha' Y \beta' .$$

Así,

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \alpha' \beta' . \tag{8.22}$$

El primer miembro de esta ecuación es la tasa de incremento del ingreso nacional. Representándola con r,

$$r = \frac{\Delta Y}{Y} . \tag{8.23}$$

Así tenemos

$$r = \alpha' \beta' , \tag{8.24}$$

que es la relación algebraica fundamental de la tasa de incremento del ingreso nacional. Esta tasa es igual a la tasa de inversión (relativa al ingreso nacional) multiplicada por la eficiencia nacional neta de la inversión.

Hemos demostrado cómo la eficiencia de la inversión en sus varias formas está determinada por las condiciones tecnológicas de la producción. De esta manera, el concepto de la eficiencia de la inversión se libera de su carácter misterioso, de la noción mística de la "productividad del capital" en que muchos economistas burgueses la han envuelto. La eficiencia de la inversión se reduce a lo que realmente es: el resultado de las condiciones tecnológicas en que tiene lugar el proceso de la producción. La eficiencia de la inversión y la eficiencia neta de la inversión que está relacionada con ella vienen a ser instrumentos valiosos para planear el crecimiento de la economía nacional socialista.

9. *Maximización de la eficiencia nacional neta de la inversión.* Una planeación eficiente del crecimiento de la economía nacional socialista requiere que la eficiencia nacional neta de la inversión sea lo mayor posible en las condiciones existentes. Pues, como se ve por la relación algebraica fundamental (8.24), la tasa de incremento del ingreso nacional es proporcional a la eficiencia nacional neta de la inversión. Cuando se alcanza la eficiencia nacional neta máxima de la inversión, la tasa de incremento del ingreso nacional se maximiza en condiciones de una tasa dada de inversión.

La eficiencia nacional neta de la inversión (al igual que la eficiencia nacional de la inversión) es, como hemos visto, la media aritmética ponderada de ciertas cantidades determinadas por las condiciones tecnológicas de la producción. En condiciones tecnológias dadas de producción, estas cantidades son los datos que se deben tomar en cuenta al planear la economía nacional y que no se pueden fijar arbitrariamente. Pero las ponderaciones que aparecen en la media aritmética antes mencionada son el resultado de la selección hecha en el plan nacional. Esto es así debido a que las ponderaciones son, o bien los coeficientes de la asignación sectorial de la inversión. o los coeficientes de la composición física de la inversión, según que la eficiencia nacional neta de la inversión se considere como la media de la eficiencia sectorial neta de la inversión o como la media de la eficiencia intersectorial neta de la inversión.

Así, el problema de planear el crecimiento de la economía nacional socialista consiste en la elección adecuada ya sea de los coeficientes de la asignación sectorial de la inversión λ_j o de los coeficientes de la composición física de la inversión μ_i. Como se puede ver por las fórmulas (7.10) o (8.14), los coeficientes de ambas clases dependen linealmente entre sí. Esta dependencia se puede descomponer en un sistema de n ecuaciones lineales. Para este objeto, comparando la igualdad (6.2) con la (7.4) obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ji} I_i = \beta_j I^{(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.1}$$

Usando los coeficientes de la composición física y de la asignación sectorial de la inversión y en virtud de la igualdad (6.7) y la (7.6), las ecuaciones (9.1) se pueden escribir de la manera siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i B_{ji} = \lambda_j \beta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.2}$$

Ahora tenemos un sistema de n ecuaciones en que los coeficientes μ_i están determinados de manera única cuando están dados los coeficientes λ_j y viceversa. En otras palabras, una composición física determinada de la inversión corresponde a una asignación sectorial dada de la inversión e inversamente, una asignación sectorial determinada de la inversión corresponde a una composición física dada de la inversión.

De esta manera el problema de la planeación consiste en la elección ya sea de los coeficientes λ_j o de los coeficientes μ_i. Cuando el plan establece los coeficientes de la asignación sectorial de la inversión λ_j, la composición física de la inversión μ_j necesaria para obtener la asignación sectorial establecida en el plan, se puede calcular con el sistema de ecuaciones (9.2). Inversamente, cuando el plan establece la composición física de la inversión, entonces las ecuaciones (9.2) sirven para calcular la asignación sectorial de la inversión resultante de la composición física de la inversión establecida en el plan.

Resolviendo las ecuaciones (9.2) para los valores de λ_j como incógnitas, obtenemos

$$\lambda_j = \frac{1}{\beta_j} \sum_{i=1}^{n} B_{ji} \mu_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.3}$$

que significa que los coeficientes de la asignación sectorial de la inversión son las sumas ponderadas de los coeficientes de la composición física de la inversión. Las ponderaciones son aquí las relaciones B_{ji}/β_j; es decir, las relaciones de la eficiencia intersectorial de la inversión a la eficiencia sectorial de la inversión correspondiente.

Por otra parte, resolviendo el sistema de ecuaciones (9.2) para los valores de μ_i como incógnitas, obtenemos

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \beta_j \lambda_j , \tag{9.4}$$

donde M_{ij} son los elementos de la inversa de la matriz (B_{ji}); es decir, de la matriz de la eficiencia intersectorial de la inversión. Sin embargo, la matriz. (B_{ji}) es, como sabemos, la inversa de la matriz de la inversión tecnológica (5.5).[9] Así,

$$M_{ij} = b_{ij}$$

y

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j\lambda_j\,. \tag{9.5}$$

Hemos ahora mostrado que los coeficientes de la composición física de la inversión son las medias ponderadas de los coeficientes de la asignación sectorial de la inversión. Las ponderaciones, en este caso, son productos de la multiplicación de los coeficientes de inversión por la correspondiente eficiencia sectorial de la inversión.

La práctica usual al planear la economía nacional es fijar la asignación sectorial de la inversión y luego ajustar la composición física de la inversión de la manera que se requiera para alcanzar la composición sectorial establecida en el plan. Para maximizar la eficiencia nacional neta de la inversión debe uno dar los valores más altos a estos coeficientes de la asignación sectorial de la inversión λ_j que corresponden a la mayor eficiencia sectorial neta de la inversión β_j. Esto se sigue directamente de la fórmula (7.9). Todo desplazamiento de inversión de un sector con menor eficiencia neta de la inversión a otro en que esta eficiencia sea mayor, incrementa el valor de la eficiencia nacional neta de la inversión. Se lograría el mejor efecto si toda la inversión se concentrara en el sector con mayor eficiencia neta de la inversión y no se distrajera ninguna inversión a otros sectores de la economía nacional. Sin embargo, esto es usualmente impracticable debido a varios factores adicionales que se deben tomar en cuenta cuando se traza el plan económico nacional. En consecuencia, la maximización de la eficiencia nacional neta de la inversión viene a ser un problema de programación.

Consideremos por vía de ejemplo el siguiente problema de programación. La asignación sectorial de la inversión se ha de planear de manera que rinda la máxima eficiencia nacional neta de la inversión. La condición adicional es que en todo sector de la economía nacional se deje disponible una cierta parte del producto final para consumo.

[9] La matriz (B_{ji}) es del grado n cuando la matriz tecnológica es del grado n.

Como se mostrará, este procedimiento conduce a la maximización de la tasa de incremento del ingreso nacional a la vez que se asegura un cierto nivel mínimo de consumo de los varios productos.

El problema consiste en determinar los valores de los coeficientes λ_j de manera que

$$\beta' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \beta'_j = \text{máximo} \tag{9.6}$$

sujeto a las condiciones adicionales

$$C_i \geqq K_i \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.7}$$

$$I \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9.8}$$

donde C_i es, como antes, la parte del producto final del sector i destinada al consumo. Los valores de K_i son constantes establecidas en el plan económico nacional y representan los niveles mínimos postulados de consumo de los productos de los varios sectores que se deben conseguir. La condición (9.8) excluye la consecución del nivel mínimo de consumo postulado, por desinversión. Es decir, por reducción del inventario existente de los medios de producción.

Para resolver el problema es necesario transformar la expresión (9.7) para introducir en ella los coeficientes λ_j. A partir de la igualdad (3.1) tenemos

$$C_i = Y_i - I_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En virtud de la condición (9.7), obtenemos

$$I_i \leqq Y_i - K_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

El segundo miembro de esta desigualdad tiene un valor constante porque, en el año en que se planea el crecimiento adicional de la economía nacional, los productos finales de los varios sectores ya están dados y son el resultado de la inversión efectuada en años anteriores, mientras que los valores de K_i se suponen constantes en el problema de programación.

Si establecemos

$$Y_i - K_i = g_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.9}$$

Podemos expresar la condición de la igualdad (9.7) como

$$I_i \leqq g_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.10}$$

Esto significa que la parte del producto final de un sector que se destina a inversión no puede exceder de un cierto límite superior, no sea que la cantidad del producto final que queda para consumo sea insuficiente para satisfacer el nivel mínimo fijado de consumo. Además, en vista de la condición (9.8) obtenemos

$$0 \leqq I_i \leqq g_i \quad (i = 1\ 2, \ldots, n). \tag{9.11}$$

Cuando se introducen los coeficientes de composición física de la inversión de acuerdo con la igualdad (6.7), la desigualdad (9.11) adquiere la forma

$$0 \leqq \mu_i I \leqq g_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.12}$$

Finalmente, en vista de la fórmula (9.5), que expresa la dependencia de los coeficientes de la composición física de la inversión con respecto a los coeficientes de la asignación sectorial de la inversión, obtenemos

$$0 < \mathrm{I} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j\lambda_j \leqq g_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.13}$$

En consecuencia, nuestro problema de programación adquiere la siguiente forma: los valores de los coeficientes λ_j se han de determinar de manera que

$$\beta' = \sum_{j=1}^{n} \beta'_j\lambda_j = \text{máximo}^{10} \tag{9.14}$$

sujeto a

$$0 \leqq I \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j\lambda_j \leqq g_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.15}$$

[10] Como se ve de las fórmulas (8.10) y (8.3), la eficiencia neta de la inversión β'_j en los sectores particulares de la economía nacional depende de los incrementos del producto en esos sectores; es decir, depende de ΔX_1, ΔX_2, $\ldots$, ΔX_n. Por otra parte, la eficiencia nacional neta de la inversión se puede

Obviamente,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \quad y \quad \lambda_j \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.16}$$

Este es un problema típico de programación lineal.

En el problema anterior los coeficientes $b_i \beta_j$ y β'_j son conocidos, así como las constantes g_i, mientras que los coeficientes λ_j son incógnitas. Sin embargo, como se puede ver por la condición (9.15), el problema incluye el factor de la escala, es decir, I, que determina cuál puede considerarse la escala del problema. Este factor de la escala es la inversión total en la economía nacional que simplemente llamaremos *nivel nacional de inversión*. En vista de las igualdades (9.13) y (3.4), el nivel nacional de inversión debe satisfacer la condición

$$0 \leqq I \sum_{i=1}^{n} g_i . \tag{9.17}$$

---

representar en forma independiente de estos incrementos. De las igualdades (8.19) y (8.16), tenemos

$$\beta' = \beta \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \Delta X_i}{\Delta X} \right)$$

En vista de las igualdades (7.4), (7.6), (7.8) y (7.9), obtenemos

$$\beta' = \beta \left(1 - \frac{I \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji}}{I\beta} \right)$$

Cambiando los subíndices i y j para hacer la notación más conveniente y simplificando, tenemos

$$\beta' = \beta - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Finalmente, la sustitución de la igualdad (7.9) da

$$\beta' = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right)$$

De esta manera, la condición (9.14) se puede expresar en forma independiente de los incrementos $\Delta X_1, \Delta X_2, \ldots, \Delta X_n$.

Hay así en nuestro problema un límite superior para el nivel nacional de inversión, al cual no puede exceder. Esto es obvio, ya que de otra manera el nivel nacional de inversión podría ser tan alto que sería imposible conseguir el nivel mínimo fijado de consumo de los varios productos.

Nuestro problema de programación lineal da una solución para un nivel nacional dado de inversión I que satisface la desigualdad (9.17).

La solución del problema de programación lineal da los valores de los coeficientes λ_j que maximizan la eficiencia nacional neta de la inversión para un nivel nacional dado de inversión.

Al mismo tiempo, esta solución determina la asignación sectorial de la inversión que maximiza la tasa de incremento del ingreso nacional en condiciones de un nivel nacional dado de inversión y de un nivel mínimo dado de consumo de los varios productos. La eficiencia neta de la inversión se maximiza sujeta a un nivel nacional dado de inversión admisible en las condiciones del problema y, de esta manera, también para una tasa dada de inversión α' relativa al ingreso nacional (recuérdese que en el año en que se ha planeado el crecimiento adicional de la economía nacional, el nivel del ingreso nacional ya está dado). En la relación algebraica fundamental (8.24)

$$r = \alpha'\beta'$$

β' adquiere el mayor valor posible en las condiciones del problema. En consecuencia, la tasa de incremento del ingreso nacional también se maximiza en estas condiciones.

Un punto final a señalar en este argumento es el del caso especial en que el segundo miembro de la condición (9.15) tiene la forma de ecuación en vez de la de desigualdad y los coeficientes λ_j están determinados de manera única. Tenemos entonces un sistema de n ecuaciones con n incógnitas: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Debido a la condición adicional (9.16), solamente $n - 1$ ecuaciones de éstas son independientes, pues uno de los coeficientes λ_j está determinado por los otros coeficientes. Las ecuaciones (9.15) forman conjuntamente con la condición (9.16) un sistema de n ecuaciones lineales independientes que determinan los coeficientes λ_j.[11] Luego, de la igualdad (8.14) la eficiencia nacional

[11] Suponemos que la matriz del sistema de ecuaciones (9.15) es del grado $n - 1$, lo que es equivalente al supuesto de que este sistema consiste de $n - 1$ ecuaciones independientes.

neta de la inversión β' está determinada de manera única y no hay cuestión acerca de maximizar esta eficiencia. El problema de maximizar surge sólo cuando las condiciones (9.16) o (9.20) tienen en el segundo miembro por lo menos dos desigualdades.[12] Esto es obvio, pues cuando el consumo de todos los productos está determinado de manera única, sólo es posible una composición física de la inversión y, así, como se ha mostrado, hay también una asignación sectorial única posible de la inversión. La composición física y la asignación sectorial de la inversión determinan la eficiencia nacional neta de la inversión. Para que sea posible cambiar la composición y la asignación de la inversión, por lo menos el nivel de consumo de dos productos no debe estar determinado de manera única.

El caso en que la condición (9.15) adquiere la forma de ecuación tiene lugar cuando el nivel nacional de la inversión I adquiere el mayor valor posible para el cual la condición (9.17) se mantiene verdadera. Luego

$$I = \sum_{i=1}^{n} g_i \tag{9.18}$$

y la condición (9.15) toma la forma

$$0 \leqq \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j\lambda_j \leqq \frac{g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i}. \tag{9.19}$$

En vista de la relación (9.15) encontramos que

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\beta_j\lambda_j \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i} = 1\,,$$

que significa que

[12] Cuando hay solamente una desigualdad, entonces de las $n-1$ ecuaciones (9.15) es posible determinar $n-1$ coeficientes λ_j, mientras que el coeficiente enésimo se obtiene de la condición (9.16). De esta manera todos los n coeficientes λ_j están determinados de manera única. Por lo tanto, debe haber por lo menos dos desigualdades para que sea posible cambiar los valores de algunos de los coeficientes λ_j.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j\lambda_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j\lambda_j = \frac{g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i} \tag{9.20}$$

y así las expresiones (9.19) se vuelven ecuaciones. Como las ecuaciones (9.20) y la condición (9.16) determinan de manera única la eficiencia neta de la inversión en la economía nacional, el problema de maximizar esta eficiencia no surge.

Para que este problema no surja es necesario suponer que

$$I < \sum_{i=1}^{n} g_i, \tag{9.21}$$

es decir, suponer el nivel de la inversión nacional menor que la suma de las cantidades mayores admisibles de productos finales asignadas a inversión, ya que de otra manera no habría posibilidad de seleccionar ni la composición física ni la sectorial de la inversión.

10. *Un ejemplo de inversión en la industria y en la agricultura.* Para ilustrar el argumento anterior consideremos un caso en que la economía nacional está dividida en dos sectores. Sean estos sectores la industria y la agricultura. Entonces el problema de la programación lineal adquiere la forma

$$\beta' = \beta'_1\lambda_1 + \beta'_2\lambda_2 = \text{máximo} \tag{10.1}$$

siempre que

$$0 \leqq b_{11}\beta_1\lambda_1 + b_{12}\beta_2\lambda_2 \leqq \frac{g_1}{I}$$

$$0 \leqq b_{21}\beta_1\lambda_1 + b_{22}\beta_2\lambda_2 \leqq \frac{g_2}{I} \tag{10.2}$$

donde

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1;\ \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0 \tag{10.3}$$

y, según la igualdad (9.21)

$$I \leqq g_1 + g_2 \tag{10.4}$$

Aquí g_1 representa la cantidad máxima de productos industriales y g_2, la cantidad máxima de productos agrícolas que se puede dedicar a inversión después de conseguir un nivel mínimo de consumo de estos productos.

El problema se resuelve de manera mucho más fácil gráficamente. Para este objeto marcamos λ_1 y λ_2 en los ejes coordenados. Por razón de la igualdad (10.3) todas las soluciones deben quedar en una línea recta de pendiente — 1, situada en el cuadrante positivo del sistema de ejes coordenados.

La línea recta corta a los ejes en los puntos $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$. En el diagrama debajo de esta línea recta está la línea AB. Trazando en el diagrama las líneas rectas correspondientes a las ecuaciones

$$b_{11}\beta_1\lambda_1 + b_{12}\beta_2\lambda_2 = \frac{g_1}{l},$$

$$b_{21}\beta_1\lambda_1 + b_{22}\beta_2\lambda_2 = \frac{g_2}{l}$$

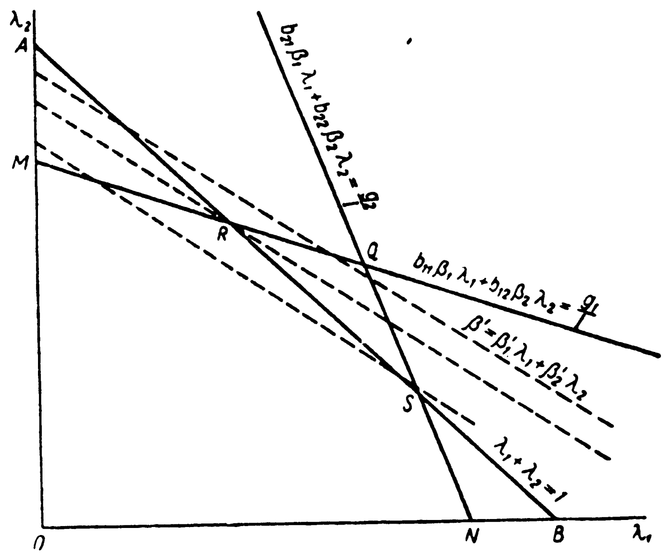

FIG. 61

encontramos que, en vista de la desigualdad (10.2). todas las soluciones deben estar debajo de estas líneas; es decir, en el área $OMQN$ incluyendo los lados que la delimitan. Sin embargo, como las soluciones deben también quedar en la línea *AB*, pueden quedar solamente en el segmento *RS*.[13] El segmento *RS* se llama *ámbito de soluciones factibles*

El procedimiento para encontrar el punto o los puntos en el ámbito de las soluciones *factibles* que maximizan la eficiencia nacional neta de la inversión β' es el siguiente. Primero trazamos la familia de líneas rectas

$$\beta'_1\lambda_1 + \beta'_2\lambda = \beta'$$

correspondientes a los diferentes valores del parámetro β'. Todas las líneas de esta familia son paralelas y su pendiente es $-\beta'_1/\beta'_2$. Las líneas de esta familia quedan más altas cuanto mayor es el valor del parámetro β'. En el diagrama están trazadas como líneas discontinuas. La solución del problema está dada por el punto o los puntos que quedan simultáneamente sobre el segmento *RS* y sobre la más alta de las líneas de la familia mencionada. Las coordenadas de este punto o de estos puntos determinan los valores de λ_1 y λ_2.

Hay tres posibilidades:

1) La pendiente de la familia de líneas rectas es mayor que la pendiente de la línea *AB*, lo que significa que

$$-\frac{\beta'1}{\beta'2} > -1$$

y, por lo tanto, $\beta'_1 < \beta'_2$. Ocurre este caso cuando la eficiencia neta sectorial de la inversión es menor en la industria que en la agricultura. Como se ve en el diagrama, el punto *R* del segmento *RS* queda en la más alta de la familia de líneas discontinuas que cortan el segmento. En este caso el punto *R* determina los valores de λ_1 y λ_2 que, en las condiciones dadas, maximizan la eficiencia nacional neta de la inversión y aseguran la tasa más alta del incremento del ingreso nacional.

[13] Suponemos que el punto *Q* donde se cortan las dos líneas rectas no está debajo del segmento *RS*, ya que de otra manera el problema no tendría solución, pues las condiciones (10.2) y (10.3) serían mutuamente contradictorias.

Cuando, en lugar de la igualdad (10.4) tenemos la igualdad $I = g_1 + g_2$, el punto *Q* queda sobre el segmento *RS*, pues de acuerdo con la condición (10.3), las ecuaciones (10.2) determinan λ_1 y λ_2 de manera única. Por otra parte, cuando $I < g_1 + g_2$, las líneas rectas que representan las ecuaciones (10.2) están situadas más alto que cuando $I = g_1 + g_2$ y el punto *Q* queda arriba del segmento *RS*.

2) La pendiente de la familia de líneas rectas es menor que la pendiente de la línea *AB*. Luego

$$-\frac{\beta'1}{\beta'2} < -1$$

y, por lo tanto, $\beta'_1 > \beta'_2$. En este caso, la eficiencia sectorial neta de la inversión es mayor en la industria que en la agricultura. Trazando una familia de líneas con esa pendiente podemos fácilmente ver que el punto *S* del segmento *RS* queda sobre la línea más alta de la familia. El punto *S* determina los valores de λ_1 y λ_2 que maximizan la eficiencia nacional neta de la inversión.

3) Finalmente, la pendiente de la familia de líneas rectas es igual a la pendiente de la línea *AB*. Luego

$$-\frac{\beta'_1}{\beta'_2} = -1$$

y, por lo tanto, $\beta'_1 = \beta'_2$. En este caso, la eficiencia sectorial neta de la inversión en la industria y en la agricultura son iguales. Dibujando una familia de líneas punteadas de esa pendiente vemos fácilmente que cada punto del segmento *RS* queda sobre la más alta de las líneas punteadas y tiene puntos comunes con el segmento *RS*. En este caso, cualquier valor de λ_1 y λ_2 correspondiente a los puntos sobre el segmento *RS* maximiza la eficiencia nacional neta de la inversión en las condiciones establecidas en el problema.

El problema de programación lineal que aquí se considera tiene tres soluciones alternativas. Cuando $\beta'_1 < \beta'_2$; es decir, cuando la eficiencia sectorial neta de la inversión es menor en la industria que en la agricultura, conviene desplazar inversión de la agricultura a la industria. Entonces el desplazamiento es a lo largo de *RS* de *R* hacia *S*. El límite del desplazamiento está determinado por el punto *S* y resulta de la necesidad de conseguir el consumo mínimo fijado de productos agrícolas.

Finalmente, cuando $\beta'_1 = \beta'_2$; es decir, cuando tanto en la industria como en la agricultura la eficiencia neta de la inversión es la misma, el desplazamiento de inversión de un sector a otro no establece diferencia porque no afecta la eficiencia nacional neta de la inversión Sin embargo, la necesidad de conseguir el nivel mínimo de consumo tanto de productos industriales como de los agrícolas impone límites a los desplazamientos entre los dos sectores. Estos límites están dados por los puntos R y S.

Este ejemplo ilustra el significado de la eficiencia de la inversión y de la eficiencia neta de la inversión para planear la tasa máxima de crecimiento de la economía nacional socialista. También muestra cómo se puede coordinar la maximización de la tasa de crecimiento de la economía nacional con otros objetivos establecidos en el plan nacional, *verbi gratia,* con la necesidad de conseguir un nivel mínimo de consumo de los varios productos.

11. *El retraso del producto y la composición de las inversiones.* Hemos supuesto hasta aquí que una inversión efectuada en un año incrementa el producto en el año siguiente. En la realidad, sin embargo, hay un periodo más o menos largo de tiempo entre el momento en que se efectúa una erogación de inversión y el momento en que el incremento del producto se inicia. Llamamos a este periodo retraso del producto de la erogación de la inversión. Como los retrasos del producto de varias erogaciones de inversión son diferentes, es necesario fechar tanto las erogaciones de inversión como los incrementos iniciados del producto.

Simbolice I_{ijst} la cantidad del producto final en el sector i asignada en el año t al sector j para inversión que inicia un incremento del producto después de s años. Además, represente $\Delta X_{jst} = X_{j,t+s} - X_{jt}$ el incremento del producto total iniciado después de s años como resultado de una inversión efectuada en el año t.

Entonces

$$b_{ijst} = \frac{I_{ijst}}{\Delta X_{jst}} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{11.1}$$

es el coeficiente de inversión de los productos del sector i asignados al sector j en el año t para inversión con un retraso del producto de s años.

Denotando con a_{ist} el valor de los coeficientes de producción en el año t, encontramos que

$$b_{ijst} = a_{ijt}T_{ijst} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{11.2}$$

donde T_{ijst} es el periodo de revolvencia de los medios de producción producidos en el año t en el sector i y asignados al sector j para inversión con un retraso del producto de s años. Como sabemos, tanto los coeficientes de producción como los periodos de revolvencia están determinados por las condiciones tecnológicas de producción.[14]

Finalmente, sea I_{ist} la cantidad total del producto final del sector i destinada en el año t a inversión con un retraso de la producción de s años. Similarmente, sea $I^{(jst)}$ la cantidad total de erogaciones de inversión con un retraso de la producción de s años efectuada en el año t en el sector j de la economía nacional. Denotando la suma total de inversiones efectuadas en la economía nacional durante el año t con I_t, tenemos

$$\mu_{ist} = \frac{I_{ist}}{I_t} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{11.3}$$

y

$$\lambda_{jst} = \frac{I^{(jst)}}{I_t}. \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{11.4}$$

La primera de estas ecuaciones representa el *coeficiente de la composición física* y el segundo, los *coficientes de la asignación sectorial de la inversión* con un retraso de s años efectuada en el año t.

Usando estas notaciones encontramos

$$I_{ist} = \sum_{j=1}^{n} b_{ijst}\Delta X_{jst} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

y

$$\Delta X_{jst} = \sum_{i=1}^{n} B_{jist} I_{ist} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{11.5}$$

donde B_{jist} son los elementos de la inversa de la matriz (b_{jist}) para valores dados de s y t.

También encontramos que

$$I^{(jst)} = \sum_{i=1}^{n} b_{ijst}\Delta X_{jst} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

[14] Suponemos que estas condiciones cambian de año a año. En el caso especial en que las condiciones no cambian durante el periodo que se considera, se puede omitir el subíndice t en los coeficientes.

Estableciendo

$$\beta_{jst} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} b_{ijst}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{11.6}$$

para denotar *la eficiencia de la inversión, con un retraso del producto de s años, efectuada en el año t en el sector j de la economía nacional,* obtenemos

$$\Delta X_{jst} = \beta_{jst} I^{(jst)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{11.7}$$

El incremento del producto nacional ΔX_{st} que se obtiene después de s años como resultado de las erogaciones de inversión que tienen un retraso del producto de s años y se efectúan en el año t es, entonces,

$$\Delta X_{st} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{jist} I_{ist} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jst} I^{(jst)}.$$

Tomando en cuenta las igualdades (11.3) y (11.4), obtenemos

$$\Delta X_{st} = I_t \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_{ist} B_{jist} = I_t \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jst} \beta_{jst} \tag{11.8}$$

o simplemente

$$\Delta X_{st} = I_t \beta_{st}. \tag{11.9}$$

En este caso,

$$\beta_{st} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_{ist} B_{jist} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jst} \beta_{jst} \tag{11.10}$$

es *la eficiencia nacional de las erogaciones de inversión con un retraso del producto de s años efectuadas en la economía nacional en el año t.*

Introduzcamos ahora la expresión

$$\sigma_{jst} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ji,t+s} \Delta X_{ist}}{\Delta X_{jst}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{11.11}$$

Esta expresión simboliza el *coeficiente de reposición* del incremento del producto en el sector j de la economía nacional que se obtiene después de s años como resultado de la inversión con un retraso del producto de s años efectuada en el año t. Usando esta expresión, obtenemos la eficiencia neta de la inversión con un retraso del producto de s años efectuada en el año t en el sector j de la economía nacional. Representando esta relación con β'_{jst} tenemos

$$\beta'_{jst} = \beta_{jst}(1 - \sigma_{jst}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{11.12}$$

De esta ecuación obtenemos el incremento del producto final que se genera en el sector j de la economía nacional después de s años como resultado de la inversión con un retraso del producto de s años efectuada en ese sector en el año t. Denotando este incremento con ΔY_{jst}, obtenemos

$$\Delta Y_{jst} = \beta'_{jst} I^{(jst)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

El incremento del ingreso nacional resultante de la inversión con un retraso del producto de s años efectuada en la economía nacional en el año t es, en vista de la igualdad (11.4),

$$\Delta Y_{st} = I_t \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jst} \beta'_{jst} \,. \tag{11.13}$$

Este incremento se obtiene después de s años.

Introduciendo en el argumento la eficiencia nacional neta de la inversión con un retraso del producto de s años efectuada en la economía nacional en el año; es decir,

$$\beta'_{st} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jst} \beta'_{jst} \,. \tag{11.14}$$

Finalmente tenemos

$$\Delta Y_{st} = I_t \beta'_{st} \,. \tag{11.15}$$

12. *Programación de la estructura cronólogica y sectorial de la inversión.* Consideremos un plan de k años de desarrollo de la economía nacional. El plan contiene un programa cronológico y sectorial de la inversión; es decir, un programa de inversiones $I^{(st)}$ con varios retrasos s del producto, efectuadas en los varios sectores de la economía nacional $j = 1, 2, \ldots, n$ en los años sucesivos del plan $t = 1, 2, \ldots, k - 1$. Como el plan dura k años, podemos planear para el primer año

inversiones con retrasos del producto $s = 1, 2, \ldots, k - 1$ años; para el segundo año del plan podemos planear solamente inversiones con retrasos del producto $s = 1, 2, \ldots, k - 2$ años y así sucesivamente. En el penúltimo año del plan solamente podemos planear inversiones con un año de retraso del producto. No se puede planear ninguna inversión para el último año del plan debido a que su efecto no se presentaría antes de un año después de que termine el plan (suponiendo que el retraso más corto del producto sea de un año).[15]

El incremento del ingreso nacional que se obtiene en el segundo año del plan $\Delta Y_1 = Y_2 - Y_1$ resulta de inversiones con un retraso de un año efectuadas durante el primer año del plan. Usando los símbolos que se introdujeron en la igualdad (11.13), tenemos $\Delta Y_1 = \Delta Y_{11}$. El incremento del ingreso nacional en el tercer año del plan resulta de las inversiones con retraso del producto de un año efectuadas en el segundo año del plan y de inversiones con un retraso del producto de dos años efectuadas en el primer año del plan. Este incremento es, por lo tanto,

$$\Delta Y = \Delta Y_{12} + \Delta Y_{21} .$$

El incremento del ingreso nacional en el cuarto año del plan resulta de inversiones con un retraso del producto de un año efectuadas en el tercer año, de inversiones con un retraso del producto de dos años efectuadas en el segundo año y de inversiones con un retraso del producto de tres años efectuadas en el primer año del plan. El incremento en el cuarto año es, por lo tanto,

$$\Delta Y_3 = \Delta Y_{13} + \Delta Y_{22} + \Delta Y_{31} .$$

Generalizando este argumento, encontramos que el incremento del

[15] Ésta es una desventaja de la planeación de inversiones que dura varios años y termina en una fecha fija. La desventaja se puede atenuar mediante la planeación en cadena; es decir, agregando cada año un año más al plan y moviendo así la fecha en que el plan termina. Tenemos entonces un plan permanente de k años en que el programa de inversiones se prolonga cada año en un año. El autor sugirió esta solución en la primavera de 1956 pero no se tomó nota práctica de ella. Actualmente este procedimiento ha sido introducido en la Unión Soviética. Otro método de contrarrestar esta desventaja es la planeación a largo plazo en que el plan se extiende en un periodo tan largo que no se hacen programas detallados de inversión para los últimos años del plan.

ingreso nacional $\Delta Y_t = \Delta Y_{t+1} - \Delta Y_t$ que se obtiene en el año $(t+1)$ del plan es

$$\Delta Y_t = \sum_{s=1}^{t} \Delta Y_{s, t-s+1} . \tag{12.1}$$

El incremento del ingreso nacional que se obtiene a través de k años; es decir, durante el periodo cubierto por el plan económico, es la suma de los incrementos del ingreso nacional en los años particulares. Representando este incremento por

$$\Delta_k Y = Y_k - Y_1$$

luego

$$\Delta_k Y = \sum_{t=1}^{k-1} \Delta Y_t . \tag{12.2}$$

Sustituyendo el valor dado por la igualdad (12.1) podemos escribir la fórmula en la siguiente fórmula

$$\Delta_k Y = \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{s=1}^{t} \Delta Y_{s, t-s+1} . \tag{12.3}$$

Esta fórmula muestra de qué manera el incremento del ingreso nacional obtenido a través de k años está determinado por las erogaciones de inversión con diferentes retrasos del producto efectuadas en los varios años del plan.

Sustituyendo la igualdad (11.15) en la (12.3), obtenemos

$$\Delta_k Y = \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{s=1}^{t} I_{t-s+1} \beta'_{s, t-s+1} . \tag{12.4}$$

Este resultado muestra de qué manera el incremento del ingreso nacional obtenido a través de k años depende de la eficiencia nacional neta de las inversiones con diferentes retrasos del producto efectuadas en los varios años del plan.

Sea que

$$I = \sum_{t=1}^{k-1} I_t \tag{12.5}$$

representa las erogaciones totales de inversión efectuadas en la economía nacional en el curso del plan de k años.[16] Entonces la fracción

$$V_t = \frac{I_t}{I} \quad (t = 1, 2, \ldots, k-1) \tag{12.6}$$

indica la parte de estas erogaciones efectuadas en el año t. Llamaremos a estas fracciones *coeficientes de la estructura cronólogica de la inversión.*

Usando los coeficientes de la estructura cronológica de la inversión, encontramos que

$$\Delta_k Y = I \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{s=1}^{t} V_{t-s+1}\, \beta'_{s,t-s+1}\,. \tag{12.7}$$

La doble suma de esta expresión es la media ponderada de la eficiencia neta de las erogaciones de inversión efectuadas en los distintos años del plan y la llamaremos *eficiencia nacional neta de una estructura cronológica dada de la inversión.*

Sustituyendo el valor de la igualdad (11.11) en la expresión (12.7), obtenemos

$$\Delta_h Y = I \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{s=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} V_{t-s+1} \lambda_{js,t-s+1} \beta'_{js,t-s+1}\,. \tag{12.8}$$

Esta expresión muestra cómo el incremento del ingreso nacional que se obtiene a través de k años, depende tanto de la composición cronológica como de la sectorial de la inversión.

Representemos la fracción que indica qué parte de las erogaciones totales de inversión efectuadas en el curso del año k son inversiones con un retraso del producto de s años efectuadas en el año t en el sector j de la economía nacional, con

$$\gamma_{jst} = \frac{I^{(jst)}}{I} \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ s, t = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{12.9}$$

Llamaremos a estas fracciones coeficientes de estructura cronológica y sectorial de la inversión.

[16] Sumamos solamente las erogaciones de inversión para los primeros $k-1$ años del plan pues, de acuerdo con nuestros supuestos, no planeamos erogaciones de inversión para el primer año del plan. Las inversiones efectuadas en el último año del plan no generarán efectos de producción antes del año $(k+1)$; es decir, cuando el plan ya haya terminado.

De las igualdades (11.4), (12.6) y (12.9) obtenemos

$$\gamma_{jst} = V_t \lambda_{jst} \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \; s, t = 1, 2, \ldots, k - 1). \qquad (12.10)$$

Los coeficientes de la estructura cronológica y sectorial de la inversión son los productos de los respectivos coeficientes de la estructura cronológica de la inversión y de la estructura sectorial de la inversión, con un retraso dado del producto, efectuada en un año dado.

En vista de esta última relación, la expresión (12.8) se puede escribir en la forma

$$\Delta_k Y = I \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{js, t-s+1} \beta'_{js, t-s+1} . \qquad (12.11)$$

Representemos ahora con

$$\beta' = \frac{\Delta_k Y}{I} \qquad (12.12)$$

la eficiencia nacional neta de la inversión total efectuada en el curso del plan de k años. Obtenemos

$$\beta' = \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{js, t-s+1} \beta'_{js, t-s+1} . \qquad (12.13)$$

Esta expresión muestra la eficiencia nacional neta de la inversión como una media ponderada de la eficiencia neta de las inversiones con diferentes retrasos del producto efectuadas en los varios años del plan en los sectores particulares de la economía nacional. Las ponderaciones en este caso son los coeficientes de la estructura cronológica y sectorial de la inversión.

Como se ve de las igualdades (12.11) y (12.13), para una cantidad total dada de erogaciones de inversión I el incremento del ingreso nacional que se obtiene a través de k años es mayor mientras más grande es el valor de la eficiencia neta de la inversión β'. Podemos, por lo tanto, formular un problema, similar al que se discutió al principio, de maximizar la eficiencia nacional neta de la inversión. Este problema consistirá en seleccionar los valores de los coeficientes de la estructura cronológica y sectorial de la inversión de manera que rinda el mayor valor de β', con la condición de que cada año en cada sector de la economía nacional, una parte dada del producto final permanezca para consumo.

Sabemos por el argumento de principios de este escrito que esta condición se puede suplir con la de que la parte del producto anual de cada sector de la economía nacional asignada a inversión no exceda de un cierto límite superior (y también excluida la desinversión). Representemos con g_{it} este límite para el producto del sector i en el año t y con I_{it}, la cantidad del producto del sector i destinada a inversión en el año t. Podemos escribir.

$$0 \leqq I_{it} \leqq g_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; t = 1, 2, \ldots, k-1)$$

y

$$I_{it} = \sum_{s=1}^{k-1} I_{ist}, \tag{12.14}$$

que significa que la cantidad del producto final del sector i destinada el año t a inversión es la suma de las cantidades del producto destinado a inversión con varios retrasos del producto.

En vista de la igualdad (12.14) y sustituyendo el valor de la (11.3), la condición que establece un límite a las erogaciones de inversión se puede escribir en la forma

$$0 \leqq I_t \sum_{s=1}^{k-1} \mu_{ist} \leqq g_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; t = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{12.15}$$

Ahora, en vista de la igualdad (11.10) y, puesto que B_{jist} representa los elementos de la inversa de la matriz (b_{ijst}) para valores dados de s y t, encontramos, por un argumento similar al utilizado en el caso de la igualdad (9.5), que

$$\mu_{ist} = \sum_{j=1}^{n} b_{ijst} \beta_{jst} \lambda_{jst} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; s, t = 1, 2, \ldots, k-1) \tag{12.16}$$

La condición (12.15) toma así la forma

$$0 \leqq I_t \sum_{s=1}^{k-t} b_{ijst} \beta_{jst} \lambda_{jst} \leqq g_{it} \quad (i = 1, 2. \ldots, n; \; t = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Si ahora introducimos los coeficientes de la estructura cronológica de la inversión (12.6) y sustituimos el valor de la igualdad (12.10), la última condición se puede finalmente escribir en la forma siguiente

$$0 \leqq \sum_{s=1}^{k-t} b_{ijst}\, \beta_{jst} \gamma_{jst} \leqq \frac{g_{it}}{I} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad t = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{12.17}$$

Esta expresión contiene los coeficientes de la estructura cronológica y sectorial de la inversión.

El problema de maximizar el crecimiento del ingreso nacional en el curso de k años adquiere así la forma del siguiente problema de programación lineal: seleccionar los valores de los coeficientes de la estructura cronológica y sectorial de la inversión γ_{jst} de manera que

$$\beta' = \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \beta'_{js,t-s+1} \gamma_{js,t-s+1} = \text{máximo} \tag{12.18}$$

a condición de que

$$0 \leqq b_{ijst} \beta_{jst} \gamma_{jst} \leqq \frac{g_{it}}{I} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad t = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{12.19}$$

Además,

$$\sum_{t=1}^{k-1} \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{jst} = 1 \quad \text{y} \quad \gamma_{jst} \geqq 0 \tag{12.20}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad s, t = 1, 2, \ldots, k-1),$$

que resulta de la definición (12.9). También suponemos, de manera similar al caso de la igualdad (9.21), que

$$I < \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} g_{it}, \tag{12.21}$$

ya que, como sabemos, de otra manera la estructura cronológica y sectorial de la inversión estaría determinada de manera única y no existiría problema de maximización.

Resolviendo este problema obtenemos el programa óptimo para la estructura cronológica y sectorial de la inversión. Este programa maximiza el crecimiento del ingreso nacional durante un número dado de años, dada una suma total definida de las erogaciones de inversión y suponiendo un nivel mínimo de consumo de varios productos en cada año. De esta manera, la programación de la inversión se puede aplicar no solamente a la selección de su asignación sectorial óptima —y así también de la composición física óptima— sino también a la selección de la asignación óptima de las erogaciones de inversión en el tiempo y la selección óptima de los retrasos del producto.[17]

[17] Resulta que, cuando los retrasos del producto se seleccionan de manera óptima, se selecciona un proyecto de inversión con un retraso mayor del producto solamente si su eficiencia neta de la inversión no es menor que la de un proyecto con un retraso mayor del producto. Como regla se seleccionan retrasos mayores del producto solamente cuando rinden una eficiencia neta más alta de la inversión. Esto es claro intuitivamente pero también se puede demostrar resolviendo el problema anterior de programación lineal. También se debe mencionar que el valor mayor de la eficiencia neta de los proyectos de inversión con un mayor retraso del producto no es una propiedad tecnológica característica de tales proyectos —la "productividad" de periodos más largos de espera que alegan algunos economistas burgueses. Resulta de la selección óptima de los retrasos del producto. Simplemente no conviene seleccionar un proyecto con un retraso mayor del producto cuando su eficiencia neta de la inversión es menor que la de un proyecto con un retraso menor del producto.