Unidad 5

- Fundamentos Económicos y Tecnológicos de la Eficiencia de la Inversión. Parte I

5.1 La eficiencia de la inversión y la relación algebraica fundamental.
5.2 La balanza de inducto-producto.
5.3 El equilibrio de las erogaciones de inversión.
5.4 La balanza ampliada de inducto-producto.
5.5 Los coeficientes técnicos de producción e inversión.
5.6 Eficiencia intersectorial de la inversión y eficiencia nacional de la inversión.
5.7 Eficiencia sectorial de la inversión.

FUNDAMENTOS ECONÓMICOS Y TECNOLÓGICOS DE LA EFICIENCIA DE LA INVERSIÓN

1. *La eficiencia de la inversión, la eficiencia neta de la inversión y la relación algebraica fundamental. La eficiencia de la inversión* es el incremento del producto nacional —es decir, el incremento del producto total de la economía nacional— que se obtiene con una unidad de erogación neta de inversión para el remplazo de los medios de producción. Sea X el producto nacional anual, ΔX su incremento en el año siguiente e I, la cantidad anual total de la inversión neta de reposición. Mídanse todas estas cantidades en unidades de valor —por ejemplo, en unidades monetarias a precios constantes— entonces, la eficiencia de la inversión es

$$\frac{\Delta X}{I}.$$

Esta eficiencia satisface la relación algebraica

$$\frac{\Delta X}{X}=\frac{X}{I}\cdot\frac{\Delta X}{I}. \tag{1.1}$$

Esta ecuación indica que la tasa de incremento del producto nacional es igual a la tasa de inversión multiplicada por la eficiencia de la inversión. Llamemos a esta ecuación *relación algebraica fundamental.*

Introduciendo las notaciones $R=\frac{\Delta X}{X}$ para significar la tasa de crecimiento del producto nacional, $\alpha=\frac{I}{X}$ para representar la tasa de inversión y $\beta=\frac{\Delta X}{I}$ para indicar la eficiencia de la inversión, podemos expresar la relación algebraica fundamental como sigue:

$$R=\alpha\beta. \tag{1.2}$$

Si, por caso, $\alpha=0.3$, es decir 30% del producto nacional y $\beta=2/3$, entonces $R=0.2$, lo que significa que el incremento anual del producto nacional es de 20%.

Además de la eficiencia de la inversión, consideraremos también la *eficiencia neta de la inversión* que expresa el incremento del ingreso nacional debido a una unidad de erogaciones netas de la inversión. El ingreso nacional es la parte del producto nacional que resta después de deducir las erogaciones para reposición de los medios de producción. Sea Y el ingreso nacional anual (medido en unidades de valor) y ΔY el incremento del ingreso nacional en el año siguiente. Entonces, la eficiencia neta de la inversión es

$$\frac{\Delta Y}{I}.$$

Al introducir las notaciones $r = \frac{\Delta Y}{Y}$ para indicar la tasa de incremento del ingreso nacional, $\alpha' = \frac{I}{Y}$ para representar la tasa de inversión relativa al ingreso nacional y $\beta' = \frac{\Delta Y}{I}$ para simbolizar la eficiencia neta de la inversión, encontramos que estas cantidades también satisfacen la relación algebraica fundamental

$$r = \alpha'\beta' \tag{1.3}$$

La tasa de incremento del ingreso nacional es igual a la tasa de inversión (relativa al ingreso nacional) multiplicada por la eficiencia neta de la inversión. Si, *verbi gratia*, $\alpha' = 0.18$ y $\beta' = 1/3$, entonces $r = 0.06$, lo que significa que el incremento anual del ingreso nacional es de 6%.

La relación algebraica fundamental aquí obtenida es un instrumento útil de la estadística económica. Nos permite calcular, cuando está dada la tasa de inversión, la influencia de ésta sobre el crecimiento del producto nacional o del ingreso nacional. En la literatura económica burguesa, sin embargo, esta relación se ha visto rodeada de un misticismo de la misteriosa "productividad del capital". Para muchos economistas burgueses la eficiencia de la inversión β y la eficiencia neta de la inversión β' han venido a ser una cifra mágica que expresa algunas fuerzas misteriosas creadoras inherentes al "capital". El propósito de este escrito es mostrar que la eficiencia de la inversión así como la eficiencia neta de la inversión simplemente dependen de las condiciones tecnológicas en que los procesos productivos tienen lugar.

2. *La balanza de inducto-producto.* El punto de arranque de nuestro análisis es el cuadro de inducto-producto. Dividamos la economía nacional en n sectores y sea X_i el producto anual total del sector i. Parte de este producto se asigna entre los varios sectores de la economía nacional (esto se llama entregas intersectoriales) que lo han de consumir como medio de producción. Las partes del producto total X_i asignadas a los varios sectores de la producción se designan como X_{11}, X_{12}, ..., X_{in}; X_{ij} constituyen la parte del producto del sector i que se asigna al sector j como medios de producción. La parte restante del producto total X_i no asignada a los otros sectores se denomina producto final del sector i y se le denota aquí con Y_i.

De esta manera, el cuadro de inducto-producto se presenta como sigue:

CUADRO I

Entregas intersectoriales	*Productos finales*	*Productos totales*
$X_{11} X_{12} \quad \ldots \quad X_{1n}$	Y_1	X_1
$X_{21} X_{22} \quad \ldots \quad X_{2n}$	Y_2	X_2
....	...	...
$X_{n1} X_{n2} \quad \ldots \quad X_{nn}$	Y_n	X_n
$X^{(1)} X^{(2)} \quad \ldots \quad X^{(n)}$	Y	X

Todas las cantidades del cuadro anterior se refieren a un año como unidad de tiempo; es decir, representan los productos totales anuales, los productos finales anuales y las entregas intersectoriales anuales. Hacemos aquí el supuesto adicional de que todas las cantidades se expresan en unidades de valor y así, no solamente las hileras sino también las columnas del cuadro se pueden sumar. Obviamente, algunas celdas del cuadro pueden tener valor de cero, por ejemplo, cuando $X_{35} = 0$, el producto del 3er. sector no tiene aplicación como medio de producción en el sector 5º

Las hileras del cuadro de inducto-producto satisfacen las siguientes *ecuaciones de equilibrio*

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.1}$$

La suma de las partes del producto que se asignan de un sector como medio de producción a varios sectores, más el producto final del sector, es igual a su producto total.

Sumando las columnas del cuadro de inducto-producto. obtenemos otro conjunto de ecuaciones de equilibrio

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = X^{(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.2}$$

donde $X^{(j)}$ es la suma de los medios de producción producidos por varios sectores y entregados al sector j.

Además,

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = Y. \tag{2.3}$$

Esta ecuación indica que el ingreso nacional Y es igual a la suma de los productos finales de los sectores particulares.

Finalmente, tenemos la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X. \tag{2.4}$$

El producto nacional X, es decir, el producto total de la economía nacional, es igual a la suma de los productos totales de los sectores particulares de la producción.

De la ecuación de equilibrio (2.1) obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y = X \tag{2.5}$$

y, tomando en cuenta la igualdad (2.2),

$$\sum_{j=1}^{n} X^{(j)} + Y = X. \tag{2.6}$$

Esto significa que el producto nacional se puede obtener por la vía de sumar ya sea la última columna o la última hilera del cuadro de inducto-producto (cuadro I de este apéndice). Tanto la una como la otra están marcadas con una separación del resto del cuadro por medio de rayas dobles.

La ecuación (2.5) se puede transformar directamente en

$$Y = X - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}. \tag{2.7}$$

Esto significa que el ingreso nacional es igual al producto nacional menos la cantidad anual total de los medios de producción que se consumieron en la economía nacional. La cantidad total de los medios de producción consumidos en la economía nacional es igual a la suma de todas las entregas intersectoriales; es decir, es la suma de todas las celdas de la primera parte cuadrada (matriz) del cuadro I.

3. *El equilibrio de las erogaciones de inversión.* Los productos finales de los varios sectores de la economía nacional se pueden utilizar de diferentes maneras. Parte de ellos se consume y otra parte se destina a inversión; es decir, a incrementar el inventario de medios de producción de la economía nacional.[1] Sea C_i la parte del producto final anual del sector i destinado al consumo e I_i la parte destinada a inversión. Tenemos entonces

$$C_i + I_i = Y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.1}$$

La parte del producto final del sector i destinada a inversión se asigna a varios sectores de la economía nacional en los que incrementa el inventario de los medios de producción. Sea I_{ij} la parte del producto final del sector i destinada a inversión en el sector j. Podemos ahora obtener el cuadro de las erogaciones de inversión:

[1] Parte del producto final se puede exportar y entonces se le asigna al consumo o a la inversión, ya sea que se cambie por bienes de consumo o por medios de producción.

CUADRO II

Entregas intersectoriales de inversión	*Producto final destinado a inversión*
$I_{11} I_{12} \quad \cdots \quad I_{1n}$	I_1
$I_{21} I_{22} \quad \cdots \quad I_{2n}$	I_2
....	...
$I_{n1} I_{n2} \quad \cdots \quad I_{nn}$	I_n
$I^{(1)} I^{(2)} \quad \cdots \quad I^{(n)}$	I

En este cuadro, como en el cuadro I, algunas casillas pueden tener valor de cero.

Los valores I_{ij} enlistados en la parte izquierda del cuadro II se llaman *entregas intersectoriales de inversión.* Estas entregas satisfacen dos clases de ecuaciones de equilibrio.

En primer lugar tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} I_{ij} = I_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.2}$$

Estas ecuaciones muestran que la suma de las entregas de inversión de un sector a varios otros de la economía nacional es igual a la parte del producto de este sector destinada a inversión.

Tenemos después,

$$\sum_{i=1}^{n} I_{ij} = I^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.3}$$

en que $I^{(j)}$ es la suma de todas las inversiones realizadas en el sector j de la economía nacional. Así, la suma de las inversiones en un sector de la economía es igual a la suma de todas las entregas de inversión de varios sectores a éste.

La suma total de todas las erogaciones de inversión en la economía nacional I se puede obtener ya sea mediante la suma de la última columna o de la hilera inferior del cuadro de inversión (cuadro II), ya que

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{j=1}^{n} I^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} I_{ij} = I\,. \tag{3.4}$$

Como se ha de ver, la suma total de las erogaciones de inversión en la economía nacional es la suma de todos los elementos contenidos en la parte cuadrada (matriz) del cuadro II.

4. *La Balanza ampliada de inducto-producto.* Los cuadros I y II se pueden combinar para formar un cuadro que se llamará cuadro ampliado de inducto-producto:

CUADRO III

Entregas para reposición	*Entregas de inversión*	*Consumo de productos finales*	*Producto total*
$X_{11}X_{12} \quad \ldots \quad X_{1n}$	$I_{11}I_{12} \quad \ldots \quad I_{1n}$	C_1	X_1
$X_{21}X_{22} \quad \ldots \quad X_{2n}$	$I_{21}I_{22} \quad \ldots \quad I_{2n}$	C_2	X_2
....	....	...	...
$X_{n1}X_{n2} \quad \ldots \quad X_{nn}$	$I_{n1}I_{n2} \quad \ldots \quad I_{nn}$	C_n	X_n
$X^{(1)}X^{(2)} \quad \ldots \quad X^{(n)}$	$I^{(1)}I^{(2)} \quad \ldots \quad I^{(n)}$	C	X

En el cuadro III el primer cuadrado (matriz) contiene las cantidades de los productos de varios sectores que se consumen anualmente como medios de producción en los sectores particulares de la economía nacional. Se debe suministrar a dichos sectores una cierta cantidad de productos para remplazar los medios de producción desgastados en la obtención del producto total de los sectores particulares de la economía nacional. Estas cantidades de productos se llaman, por lo tanto, *entregas para reposición.* El segundo cuadrado (matriz) del cuadro III enlista las cantidades del producto final que varios sectores suministran a los sectores de la economía nacional para incrementar los inventarios de los medios de producción; es decir, como inversión. Se llama a estas cantidades *entregas de inversión.*

Las hileras del cuadro III satisfacen las ecuaciones de equilibrio ampliado

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} + \sum_{j=1}^{n} I_{ij} + C_i = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4.1)$$

La suma de la cantidad del producto de un sector dado destinado a la reposición de los medios de producción desgastados más la cantidad del producto destinado a inversión más la cantidad destinada al consumo es igual al producto total de este sector.

De las igualdades (2.5), (2.3), (3.1) y (3.2) obtenemos

$$X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} I_{ij} + \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad (4.2)$$

y también

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} I_{ij} + \sum_{i=1}^{n} C_i, \qquad (4.3)$$

que significa que el producto nacional anual es igual a la suma de todas las reposiciones, todas las inversiones y el consumo total de la economía nacional, mientras que el ingreso nacional es igual a la suma de todas las inversiones y el consumo total.

5. *Los coeficientes técnicos de producción e inversión.* Para generar una cantidad dada de un producto en las condiciones tecnológicas existentes es necesario consumir cantidades definidas de los varios medios de producción. Si para la producción de X_j unidades del producto del sector j es necesario consumir X_{ij} unidades del producto del sector i, entonces

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5.1)$$

unidades del producto del sector i se deben consumir por unidad de producto del sector j.

Los valores de a_{ij} se denominan *coeficientes de producción,* pero podemos también llamarlos *coeficientes de desgaste,* ya que definen la cantidad de un medio de producción que se consume en la producción de una unidad de un producto. En los países socialistas estos coeficientes de ordinario se llaman *normas tecnológicas de producción* y se les usa como elementos de información al planificar la economía nacional.

Los coeficientes de producción se pueden ordenar en una tabla cuadrada; es decir, en una matriz

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{5.2}$$

Esta matriz representa las condiciones tecnológicas de la producción corriente que existen en la economía nacional y se denomina *matriz de tecnología de la producción.*

Sustituyendo la igualdad (5.1) en la ecuación de equilibrio (2.1) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$X_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = Y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{5.3}$$

Se encuentra así que la relación entre los productos totales X_i y los productos finales Y_i de los sectores particulares ($i = 1, 2, \dots, n$) depende de las condiciones tecnológicas de la producción expresadas por la matriz de tecnología de la producción.

Otra conclusión que se ha de sacar de la ecuación (5.3) es que de las $2n$ cantidades $X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n1}$ y $Y_{11}, Y_{21}, \dots, Y_{n1}$, solamente n cantidades son independientes. Las restantes resultan de las ecuaciones (5.3) y están así determinadas por las condiciones tecnológicas de la producción. En otras palabras, un plan de producción que comprenda n sectores de la economía nacional tiene n grados de libertad. El número de cantidades que se pueden determinar arbitrariamente en el plan es n, mientras que las restantes n cantidades están determinadas de manera única por las condiciones tecnológicas de la producción.[2]

Si el año siguiente la producción de algún sector, el i, digamos, se ha de elevar en ΔX_j, debe uno incrementar en este sector el inventario

[2] Suponemos que la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones (5.3); es decir, la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1 - a_{11} & - a_{12} & \dots & - a_{1n} \\ - a_{21} & - a_{22} & \dots & - a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ - a_{n1} & - a_{n2} & \dots & 1 - a_{nn} \end{Vmatrix}$$

es de grado n. Si el grado de la matriz es menor que n, el número de grados de libertad es concordantemente mayor.

de medios de producción consistente de productos de varios sectores (por ejemplo, acero, máquinas, edificios, etc.). Sea I_{ij} la cantidad de producto del sector i que se debe instalar en el sector j durante el año en curso con objeto de que el año siguiente el inventario de los medios de producción del sector j alcance el nivel incrementado necesario. La relación

$$b_{ij} = \frac{I_{ij}}{\Delta X_j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.4}$$

define la cantidad del producto del sector i que se debe instalar en el sector j con objeto de incrementar ahí el producto en una unidad.

Los coeficientes b_{ij} se llaman *coeficientes de inversión*; en la planeación económica socialista usualmente se llaman *normas de inversión*. Son elemento importante de información en la planeación de la inversión y el crecimiento de la producción.

Los coeficientes de inversión se pueden ordenar en una matriz cuadrada

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{Vmatrix} \tag{5.5}$$

Esta matriz expresa las condiciones tecnológicas en que el incremento de la producción tiene lugar. Sus elementos determinan la cantidad de producto de un sector dado que se debe instalar en un sector con objeto de que la producción ahí se incremente en una unidad. Llamaremos a ésta, *matriz de la inversión tecnológica.*

Este nombre de la matriz está plenamente justificado debido a que los coeficientes de inversión están enteramente determinados por las condiciones tecnológicas del incremento de la producción. La razón de esto es que dependen de los coeficientes de producción y del periodo de revolvencia (es decir, el periodo de desgaste) de los medios de producción. Para incrementar en una unidad el producto anual del sector j es necesario consumir anualmente una cantidad adicional del producto del sector i que alcanza a a_{ij}. Si los medios de producción producidos por el sector i se consumen enteramente en el sector j durante un año, entonces $b_{ij} = a_{ij}$, ya que para incrementar en una unidad el producto del sector j es necesario incrementar en él el inventario de los medios de producción generados en el sector i en a_{ij}.

Sin embargo, sea que un medio de producción, por caso una máquina, se desgasta gradualmente durante 10 años, digamos y supongamos que el desgaste es uniforme. Como se ha dicho, para incrementar el producto en una unidad, el desgaste de este medio de producción se debe incrementar en a_{ij}. Pero solamente 1/10 de este medio de producción se consume anualmente y así, para incrementar el producto del sector j en una unidad, la inversión en él debe alcanzar no a a_{ij}, sino a $b_{ij} = 10a_{ij}$ de los medios de producción generados en el sector i. El periodo de revolvencia —como lo llama Marx— de estos medios de producción es entonces de 10 años y la cantidad que se desgasta anualmente por unidad de incremento del producto es de a_{ij}. Debemos recordar que la cantidad de los medios de producción y de los productos se mide en unidades de valor, *verbi gratia* en unidades monetarias (tales como *zlotys)* a precios constantes.

Sea T_{ij} el periodo de revolvencia (o de desgaste) de un medio de producción generado en el sector i e instalado en el sector j.[3] En bien de la simplicidad supongamos además que la tasa a que el medio de producción en cuestión se desgasta, es uniforme.[4] El razonamiento anterior conduce entonces a la conclusión de que

$$b_{ij} = T_{ij}a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.6}$$

[3] Por regla el periodo de revolvencia es de varios años y aún de varias décadas (como en el caso de los edificios) pero, en ocasiones, puede ser menor de un año. Entonces $T_{ij} < 1$ y el medio de producción se consume y se remplaza varias veces en un año.

[4] El supuesto de una tasa uniforme de desgaste se ha hecho solamente con objeto de simplificar la exposición. Si se desea, este supuesto se puede omitir. Como aquí nos interesa el incremento del producto durante el siguiente año, solamente el desgaste de los medios de producción durante ese año es significativo. El valor T_{ij} se puede interpretar como el recíproco de la tasa a la que los medios de producción se desgastan en el año siguiente. La tasa de desgaste en los últimos años no tiene significación; por ejemplo, una máquina que se desgasta durante 10 años tiene una tasa de revolvencia de 10 años. Sea la tasa de desgaste del siguiente año, el primero después de que la máquina fue instalada, de 1/20 de su capacidad productiva y sea que esta tasa se incrementa en el tiempo en los años siguientes. Entonces durante el primer año después de la instalación, el desgaste por unidad de incremento del producto es de $a_{ij} = 1/20$ de la inversión necesaria para incrementar el producto en una unidad. Es decir, $a_{ij} = 1/20b_{ij}$ y, por lo tanto, $b_{ij} = 20\ a_{ij}$. En este caso, $T_{ij} = 20$.

La matriz tecnológica de inversión (5.5) se puede así escribir en la siguiente forma

$$\begin{Vmatrix} T_{11}a_{11} & T_{12}a_{12} & \cdots & T_{1n}a_{1n} \\ T_{21}a_{21} & T_{22}a_{22} & \cdots & T_{2n}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{n1}a_{n1} & T_{n2}a_{n2} & \cdots & T_{nn}a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Esta matriz muestra explícitamente el carácter puramente tecnológico de las condiciones en que la producción se incrementa. pues incluye los elementos a_{ij} y T_{ij}. Los primeros de estos elementos son los coeficientes tecnológicos de producción y los últimos, los periodos de revolvencia de los medios de producción. Los periodos de revolvencia dependen de la durabilidad de los medios de producción y. así, son también de naturaleza tecnológica.

6. *Eficiencia intersectorial de la inversión y eficiencia nacional de la inversión.* Mediante la transformación de la igualdad (5.4) y su sustitución en la (3.2) las ecuaciones de equilibrio de las entregas de inversión se pueden escribir de la siguiente manera

$$I_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Delta X_j \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{6.1}$$

Las ecuaciones de equilibrio escritas en esta forma muestran la relación entre el incremento del producto de los varios sectores y la cantidad del producto de un sector dado que se destina a inversión. Esta cantidad es la suma ponderada del incremento del producto de los varios sectores. Los coeficientes de inversión sirven como ponderaciones.

Las ecuaciones (6.1) muestran, sin embargo, de qué manera I_i depende de ΔX_1, ΔX_2, $\ldots$, ΔX_n o, en otras palabras, qué cantidad del producto del sector i se debe destinar a inversión con objeto de lograr el programa deseado de incrementos del producto en los varios sectores. Sin embargo, estas ecuaciones se pueden invertir de manera que muestren los incrementos del producto que se obtienen en los varios sectores como resultado de la asignación a la inversión de cantidades conocidas del producto de sectores particulares. Por ejemplo, se pueden usar para calcular el incremento ΔX_j cuando las cantidades de los productos asignados a inversión son I_1, I_2, $\ldots$, I_n.

Las ecuaciones (6.1) se pueden resolver para las incógnitas X_j cuando las I_i están dadas. Obtenemos así

$$\Delta X_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ji} I_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.2}$$

donde los coeficientes B_{ji} son los elementos de una matriz que es la inversa de la matriz de la inversión tecnológica (5.5).

La solución que así se obtiene muestra que el incremento del producto en un sector es la suma ponderada de las cantidades de los productos de los varios sectores que se destinan a inversión. Las ponderaciones en este caso son los coeficientes B_{ji} que llamaremos *eficiencia intersectorial de la inversión.*

Supongamos, por caso, que la cantidad de producto del sector k que se destina a inversión se incrementa en una unidad, es decir que es $I_k + 1$ en lugar de I_k como antes. Entonces el incremento del producto del sector j será

$$\Delta' X_j = \sum_{i=1}^{k-1} B_{ji} I_i + B_{jk}(I_k + 1) + \sum_{i=k+1}^{n} B_{ji} I_i \,.$$

Este resultado se puede escribir en la forma

$$\Delta' X_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ji} I_i + B_{jk} = \Delta X_j + B_{jk} \,.$$

Esto significa que un incremento de una unidad en la cantidad del producto del sector k destinada a inversión genera un incremento de B_{jk} de producto en el sector j. De esta manera, los coeficientes B_{ji} representan el incremento del producto de un sector originado por un incremento de una unidad en la cantidad del producto de un sector particular destinada a inversión. Por esto es que los llamamos eficiencia intersectorial de la inversión.

Según las reglas del álgebra

$$B_{ji} = \frac{D_{ij}}{D} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.3}$$

donde D es el determinante de la matriz (5.5) y D_{ij} es el cofactor de la línea i y la columna j de esta matriz.[5] Los determinantes D y D_{ij} tienen como elementos los coeficientes de inversión b_{ij}. Estos determinantes dependen así solamente de las condiciones tecnológicas que determinan la relación entre el incremento de la producción y la inversión. Por lo tanto, la eficiencia intersectorial de la inversión B_{ji} depende únicamente de las condiciones tecnológicas mencionadas.

Ordenando las relaciones B_{ji} en la matriz

$$\begin{Vmatrix} B_{11} & B_{21} & \dots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \dots & B_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots & B_{nn} \end{Vmatrix}$$

obtenemos la *matriz de la eficiencia intersectorial de la inversión*. Como se ha dicho, esta matriz es la inversa de la matriz de la inversión tecnológica (5.5). Sus elementos son, como se ha visto de la igualdad (6.3), funciones lineales de los coeficientes de inversión y, así, dependen exclusivamente de las condiciones tecnológicas del crecimiento de la producción en los varios sectores de la economía nacional.

El incremento del producto nacional es la suma de los incrementos de los productos totales en los varios sectores de la economía nacional y, por lo tanto,

$$\Delta X = \sum_{j=1}^{n} \Delta X_j . \tag{6.5}$$

Sustituyendo (6.2) en (6.5) obtenemos

$$\Delta X = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ji} I_i . \tag{6.6}$$

El incremento del producto nacional es, entonces, la suma ponderada de las cantidades de los productos de los varios sectores destinadas a inversiones y los elementos de la matriz de la eficiencia intersec-

[5] Suponemos que la matriz es del grado n y en ese caso $D \neq 0$. Cuando el grado de la matriz es menor que n no hay más grados de libertad además de la libre elección de las cantidades, I_1, I_2, ... I_n. Los cálculos son entoaces más complicados pero el resultado final de nuestro razonamiento permanece inafectado.

torial de la inversión sirven como ponderaciones. Como los elementos de esta matriz dependen solamente de las condiciones tecnológicas del crecimiento de la producción expresadas en la matriz de la inversión tecnológica (5.5), el incremento del producto nacional está completamente determinado por estas condiciones tecnológicas.

Con objeto de calcular la tasa de incremento del producto nacional, la fórmula (6.6) se transformará como sigue:

$$\mu_i = \frac{I_i}{I} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.7}$$

para indicar la fracción que muestra qué parte de las erogaciones totales de inversión consiste de los productos del sector i destinados a inversión. Obviamente

$$0 \leqq \mu \leqq 1 \ \text{ y } \ \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1\,. \tag{6.8}$$

Las fracciones μ_i definen la composición física de la inversión en la economía nacional porque muestran qué parte de las erogaciones totales de inversión en la economía nacional consiste de los productos del sector i. Por lo tanto, les llamaremos *coeficientes de composición física de la inversión* en la economía nacional.

De la igualdad (6.7) obtenemos

$$I_i = \mu_i I \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Sustituyendo la anterior en la fórmula (6.6) y colocando I antes del signo de suma, tenemos

$$\Delta X = I \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i B_{ji} \tag{6.9}$$

En vista de la igualdad (6.8) podemos decir que la expresión que tiene la forma de la doble suma es la media ponderada de toda la eficiencia intersectorial de la inversión en la economía nacional. En este caso, las ponderaciones son los coeficientes de la composición física de la inversión. Llamaremos a esta expresión *eficiencia nacional de la inversión.*

La relación de la eficiencia de la inversión se denotará con β y de esta manera tenemos

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i B_{ji} . \tag{6.10}$$

Así, la eficiencia nacional de la inversión es una media aritmética ponderada. Depende de dos factores: *1)* las condiciones tecnológicas del incremento de la producción expresadas por la eficiencia intersectorial de la inversión B_{ij} y *2)* la composición física de la inversión en la economía nacional expresada por los coeficientes μ_i.

Introduciendo la eficiencia nacional de la inversión en la fórmula (6.9) obtenemos

$$\Delta X = I\beta . \tag{6.11}$$

Así, el incremento anual del producto nacional es igual a las erogaciones totales de inversión en la economía nacional multiplicadas por la eficiencia nacional de la inversión. Debemos recordar que, como se ha señalado al comienzo de este documento, el incremento del producto nacional como aquí se considera es el incremento que tiene lugar al siguiente año después de aquel en que se hicieron las erogaciones de inversión.[6]

La fórmula (6.11) se puede transformar todavía más mediante la introducción de la tasa de inversión relativa al producto nacional. Cuando α denota la tasa de inversión, como al principio de este escrito, tenemos

$$\alpha = \frac{I}{X}. \tag{6.12}$$

de donde

$$I = \alpha X .$$

Introduciendo este valor en la igualdad (6.11) obtenemos

$$\Delta X = \alpha X\beta ,$$

y, por lo tanto,

[6]. Se puede indicar esto explícitamente fechando las cantidades de la fórmula (6.12). Así, si las cantidades del año t se marcan con el subíndice t y las cantidades del año siguiente se marcan con el subíndice $t+1$, la fórmula (6.12) se puede escribir en la forma

$$X_{t+1} - X_t = I_t\beta_t.$$

Escribiendo $\Delta X_t = X_{t+1} - X_t$, tenemos $\Delta X_t = I_t\beta_t$. Para simplificar se puede omitir el subíndice t. Esto es lo que se hizo en el texto.

$$\frac{\Delta X}{X} = \alpha\beta \,. \tag{6.13}$$

El primer miembro de la igualdad anterior es la tasa de incremento del producto nacional. Denotando esta tasa con R,

$$R = \frac{\Delta X}{X} \,, \tag{6.14}$$

de donde, finalmente,

$$R = \alpha\beta \,. \tag{6.15}$$

Ésta es la relación algebraica fundamental que establece que la tasa de incremento del producto nacional es igual a la tasa de inversión multiplicada por la eficiencia nacional de la inversión.

De esta manera, la eficiencia de la inversión se libera finalmente del "misterio" que la oscurece. Esta eficiencia demuestra ser la media aritmética ponderada dependiente de las condiciones tecnológicas del crecimiento de la producción y de la composición física de la inversión total en la economía nacional.

En las condiciones tecnológicas dadas y para una tasa dada de inversión, la tasa máxima de incremento del producto nacional se obtiene seleccionando la composición física de la inversión de manera que la eficiencia nacional de la inversión adquiera el valor más alto posible en las condiciones existentes. Este problema se puede resolver por la técnica de la programación lineal.

7. *La eficiencia sectorial de la inversión.* Hemos visto que la eficiencia nacional de la inversión es la media ponderada de la eficiencia intersectorial de la inversión. Pero también se puede representar como otra media: como la media ponderada de la eficiencia de la inversión en los varios sectores de la economía nacional.

Para este propósito regresemos al cuadro de las erogaciones de inversión (cuadro II) y sumemos sus columnas.

Hemos visto que la suma de las columnas de las ecuaciones de equilibrio (3.3) y (3.4)

$$\sum_{i=1}^{n} I_{ij} = I^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} I^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} I_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} I_{ij} = I .$$

Como se ha establecido, $I^{(j)}$ representa la suma de todas las inversiones (de diferente composición física) hechas durante un año en el sector j de la economía nacional, *verbi gratia,* la suma de todas las inversiones en la industria del carbón mineral (máquinas, madera, edificios, etc.) o en la industria química.

En virtud de la igualdad (5.4), la (3.3) se puede escribir como sigue:

$$I^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\Delta X_j , \tag{7.1}$$

de donde

$$I^{(j)} = \Delta X_j \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$$

y

$$\frac{\Delta X_j}{I^{(j)}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{7.2}$$

El primer miembro de esta última expresión representa el incremento del producto del sector j por unidad de erogaciones de inversión en este sector. Lo llamaremos *eficiencia sectorial de la inversión del sector* j y lo denotaremos con el símbolo β_j. Tenemos entonces

$$\beta_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.3}$$

que significa que la eficiencia sectorial de la inversión es el recíproco de la suma de los coeficientes de inversión de los productos que constituyen la composición física de las inversiones hechas en el sector.

Se sigue que la eficiencia sectorial de la inversión está determinada —de manera similar que la eficiencia intersectorial de la inversión— por las condiciones tecnológicas del crecimiento de la producción expresadas por los coeficientes b_{ij}. La fórmula (7.3) revela la naturaleza de esta relación.

Para incrementar el producto del sector j en una unidad es necesario invertir en él b_{ij} de los productos del primer sector, b_{2j} de los productos del segundo sector, etc. En total, es necesario invertir en el sector j

$$b_{1j} + b_{2j} + \ldots + b_{nj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$$

de productos de varios sectores. De esta manera

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = \frac{I^{(j)}}{X_j}$$

es la suma de todas las inversiones necesarias para incrementar en una unidad el producto del sector j. El recíproco de esta expresión es β_j e indica el incremento del producto del sector j por unidad de erogación de inversión en este sector.

Tomando en cuenta (7.2) y (7.3) obtenemos

$$\Delta X_j = I^{(j)}\beta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{7.4}$$

que significa que el incremento del producto en un sector de la economía nacional es igual a la cantidad de inversión hecha en este sector, multiplicada por la eficiencia sectorial de la inversión.

Sumando los valores de (7.4) de todos los sectores y en virtud de la igualdad (6.5) obtenemos el incremento del producto nacional

$$X = \sum_{j=1}^{n} I^{(j)}\beta_j . \tag{7.5}$$

De esta manera, el incremento del producto nacional es la suma ponderada de las inversiones efectuadas en los varios sectores de la economía nacional y las eficiencias sectoriales de la inversión sirven como ponderaciones.

Sea[7]

$$\lambda_j = \frac{I^{(j)}}{I} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{7.6}$$

[7] En el texto el símbolo ν_i se usó para denotar los coeficientes de asignación sectorial de la inversión. Ver las pp. 238 ss.

la fracción que indica qué parte de la inversión total en la economía nacional se asigna al sector j. Llamaremos a estas fracciones ***coeficientes de la asignación sectorial de la inversión.*** Obviamente

$$0 \leqq \lambda_j \leqq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \,. \tag{7.7}$$

Introduciendo los coeficientes de asignación sectorial de la inversión, tenemos

$$I^{(j)} = \lambda_j I$$

y la fórmula (7.5) toma la forma

$$\Delta X = I \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \beta_j \,. \tag{7.8}$$

En virtud de la igualdad (7.7), la expresión que tiene forma de suma es la media ponderada de la eficiencia sectorial de la inversión.

De la comparación de las dos fórmulas (7.8) y (6.11) -que indican el incremento del producto nacional correspondiente a las erogaciones de inversión I, se ve que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \beta_j = \beta \tag{7.9}$$

Esto significa que la media ponderada de la eficiencia sectorial de la inversión es igual a la eficiencia nacional de la inversión.

De las igualdades (7.9) y (6.10) obtenemos

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i B_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \beta_j \,. \tag{7.10}$$

Tenemos ahora dos maneras de representar la eficiencia nacional de la inversión en forma de media ponderada. Una de ellas es representarla como la media de la eficiencia intersectorial de la inversión ponderada con los coeficientes de la composición física de la inversión en la economía nacional. La otra es en la forma de una media de la eficiencia sectorial de la inversión, ponderada con los coeficientes de la asignación sectorial de la inversión.

Cuando consideramos la segunda manera de representar la eficiencia nacional de la inversión vemos que ésta depende, por una parte, de las condiciones tecnológicas del crecimiento de la producción expresadas por la eficiencia sectorial de la inversión β_j y, por otra parte, de la asignación sectorial de la inversión λ_j. Para obtener la mayor tasa posible de incremento del producto nacional con una tasa dada de inversión y en condiciones tecnológicas dadas de crecimiento de la producción, es necesario seleccionar los coeficientes de manera que la eficiencia nacional de la inversión sea la mayor posible.

De esta manera, en condiciones tecnológicas dadas y con una tasa dada de inversión, hay dos maneras de cambiar la tasa de incremento del producto nacional. Se puede lograr ya sea seleccionando los coeficientes de composición física de la inversión o seleccionando los de la asignación sectorial de la inversión. Sin embargo, como se ve por la igualdad (7.10), estas dos clases de coeficientes no son independientes entre sí. Un cambio en los coeficientes de una clase necesita de un cambio en los de la otra. Se tratará este problema con mayor detenimiento.

Para finalizar esta parte de nuestra exposición vale la pena observar que una estimación tentativa de la eficiencia intersectorial, la sectorial y la nacional de la inversión fue hecha por Krzysztof Porwit para la economía nacional de Polonia.