Unidad 2

- Contrastación de Hipótesis Estadísticas

2.1 Conceptos fundamentales.
2.2 Contraste de hipótesis acerca de proporciones.
2.3 Potencia y tamaño muestral.
2.4 Contrastes sobre la esperanza matemáticas de una población Normal.
2.5 Contrastes sobre la varianza de una población Normal.
2.6 Regiones críticas óptimas.
2.7 Contrastes de razón de verosimilitudes.
2.8 El problema de dos muestras.
2.9 Contrates de igualdad de esperanzas en poblaciones Normales.
2.10 Contraste de igualdad en proporciones.
2.11 Contraste de igualdad en varianzas.

10.1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES EN LA CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS

En capítulos anteriores hemos aprendido a efectuar *inferencias* acerca de los valores paramétricos poblacionales, a partir de información muestral, y lo hemos hecho tanto a través de *estimadores puntuales* como de *intervalos de confianza*. Sin embargo, en muchas ocasiones, el investigador tiene una creencia *a priori*, posiblemente basada en su experiencia previa con el fenómeno que está estudiando, acerca de los valores numéricos de los parámetros de dicho proceso. En tal caso, el investigador estará interesado en *estimar* los valores numéricos de dichos parámetros desconocidos, pero también querrá *contrastar* diversas hipótesis posibles acerca de la distribución de probabilidad de la población que generó la muestra disponible. Generalmente las hipótesis se refieren a si la información muestral es consistente con su creencia *a priori* acerca de los valores paramétricos, lo que configura los denominados *problemas de una muestra*.

En ocasiones, el investigador dispone de dos muestras, y se cuestiona acerca de si la información que proporcionan ambas es consistente con la posibilidad de que provengan de la misma población, frente a la alternativa de que proviene de poblaciones diferentes, problemas estos denominados *de dos muestras*.

Los contrastes de hipótesis especifican siempre una posibilidad, denominada *hipótesis nula*, denotada por H_0, que es aquélla en que el investigador está dispuesto a creer a priori. Es preciso especificar asimismo una *hipótesis alternativa*, denotada por H_1, aquélla que pasará a aceptar si rechaza la hipótesis nula. La idea previa a la contrastación estadística de hipótesis es que existen razones para creer que la hipótesis nula pueda ser cierta: *es aquel suceso que parece más posible a priori el que debe definir la hipótesis nula*. Por otra parte, la hipótesis alternativa debe estar definida por aquellos sucesos, incompatibles con los que definen la hipótesis nula, que tienen probabilidad positiva. Un suceso de probabilidad nula no debe estar incluido ni en la *hipótesis nula* ni en la *hipótesis alternativa*.

De este modo, la pregunta que un investigador debe hacerse cuando lleva a cabo un contraste de hipótesis, es acerca de *si se encuentra suficiente evidencia en la muestra en contra de la hipótesis nula*, como para rechazarla. Como la hipótesis nula refleja una creencia *a priori*, sólo la rechazaremos en favor de la hipótesis alternativa si existe suficiente evidencia en su contra. Hay que insistir, por tanto, en que sólo deben contrastarse hipótesis nulas en las que el investigador está dispuesto a creer, y acerca de las cuales tiene fundada creencia *a priori*. La contrastación de hipótesis no es algo que deba hacerse mecánica ni sistemáticamente. Sería absurdo plantearse en una aplicación empírica un número elevado de contrastes de hipótesis, con objeto de ver cuáles se rechazan y cuáles no.

En los *problemas de una muestra*, se contrasta una hipótesis nula que asigna valores numéricos a uno o más parámetros poblacionales desconocidos, frente a otro valor o rango de valores, que se incluyen en la hipótesis alternativa. Para resolver el contraste de tal hipótesis, es preciso disponer de información muestral, sobre la cual calcular el valor de un estadístico que guarde relación estrecha con el parámetro acerca del cual se quiere efectuar el contraste. El valor numérico obtenido para el estadístico nos dirá si es aceptable nuestra hipótesis *a priori* acerca del valor del parámetro desconocido o si, por el contrario, no podemos mantener nuestra hipótesis, debiendo rechazarla en favor de la hipótesis alternativa. Todo contraste de hipótesis se desarrolla en varias etapas:

1. Planteamiento de la hipótesis nula H_0 y de la hipótesis alternativa H_1, ambas referentes a valores posibles de uno o varios parámetros desconocidos, θ.

2. Decisión acerca de un estadístico que resuma adecuadamente la información muestral, en relación con el parámetro acerca del cual se va a llevar a cabo el contraste.
3. División del espacio muestral en dos regiones no solapadas: *región crítica* y *región de aceptación*. Ambas constituyen una *partición* del espacio muestral.
4. Obtención de una muestra de un determinado tamaño, en la que medir la característica de interés.
5. Cálculo del valor del estadístico en la muestra recogida.
6. Resolución del contraste: si el valor muestral del estadístico cae en la región crítica, se rechaza la hipótesis nula H_0 en favor de la alternativa H_1; si el valor muestral del estadístico cae en la región de aceptación, no se rechaza la hipótesis nula.

Como ejemplo, vamos a considerar el caso de contrastación de una hipótesis acerca de la proporción de elementos poblacionales que satisfacen una determinada característica, utilizando para ello una determinada muestra; es decir, queremos contrastar una hipótesis acerca del parámetro p de una distribución Bernouilli. Supongamos que, antes de acometer una campaña publicitaria a nivel nacional, lo que representa un enorme gasto, una empresa de cosmética ha realizado una campaña publicitaria acerca de una de sus colonias en una determinada ciudad, y quiere contrastar si dicha campaña ha sido efectiva, lo que le motivaría a implantarla a nivel nacional. Evidentemente, para que este análisis sea riguroso, debe cumplirse que la ciudad utilizada como muestra sea representativa, es decir, que no haya razones para pensar que la proporción de usuarios antes o después de la campaña vaya a ser distinta en la ciudad utilizada que en el resto del país.

El departamento de marketing de la empresa realiza una encuesta tras la campaña de publicidad en dicha ciudad, entrevistando a 200 personas. El porcentaje de personas que consumían habitualmente su producto antes de la campaña publicitaria, que es conocido, era del 5 % y la empresa decidirá que la campaña ha sido efectiva si el nuevo porcentaje es superior a un determinado umbral, por ejemplo, del 7 %. Ahora bien, no conocemos la proporción de consumidores tras la campaña. Todo lo que hacemos es encuestar a 200 personas, y calcular una estimación de la nueva proporción de consumidores.

Lo primero que hemos de hacer es escoger un estimador del parámetro objeto de contraste. Ya sabemos que la proporción muestral es un estimador insesgado de la proporción poblacional, por lo que parece razonable que utilicemos el porcentaje muestral. Imaginemos que 15 personas, un 7,5 % de los encuestados, contesta afirmativamente, con lo que concluimos que la campaña ha sido un éxito. Ahora bien, proceder de este modo supone asignar a la información muestral una fiabilidad absoluta, que nos lleva a comparar la estimación en ella obtenida, con el umbral establecido del 7 %. Sin embargo, la estimación es tan sólo una realización del estimador (la proporción muestral, en este caso), que ha sido de 7,5 % en esta muestra, pero que habría sido diferente si tomásemos otra muestra distinta. Salvo que entrevistásemos a todos los potenciales consumidores de la ciudad, no podemos conocer el verdadero valor de la proporción tras la campaña publicitaria.

Tratar adecuadamente estas *variaciones muestrales* es crucial, pues nada impide que tengamos una estimación como la mencionada, incluso si la proporción poblacional es, realmente, prácticamente la misma de antes de la campaña, lo que nos llevaría a *incurrir en el enorme coste* que representa efectuar la campaña publicitaria a nivel nacional, cuando ésta no es, en realidad, eficaz.

Ello constituiría lo que denominamos un *Error de tipo I*, por rechazar la hipótesis nula de ausencia de cambio en la proporción de consumidores, cuando ésta es cierta, puesto que no ha habido variación relevante, aunque la información muestral nos hace creer que sí la ha habido. También podría suceder lo contrario, y obtener *sólo* 13 respuestas afirmativas, una proporción del 6,5 %, lo que nos llevaría a *no rechazar* la hipótesis nula cuando, realmente, el consumo se ha extendido con respecto al existente antes de la campaña. Esto es lo que denominamos un *Error de tipo II*, consistente en no rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa.

		RESULTADO DEL CONTRASTE	
		H_0	H_1
ESTADO DE LA NATURALEZA	H_0	CORRECTO	Error de tipo I
	H_1	Error de tipo II	CORRECTO

Formalicemos un poco más el proceso: Queremos contrastar una hipótesis, denominada *hipótesis nula*, consistente en que la campaña publicitaria no ha tenido efecto, es decir, que el porcentaje de consumidores no es significativamente superior al de antes de la misma. Representamos esta hipótesis nula mediante: H_0: $p = 0{,}05$. Esta hipótesis nula se dice *simple*, por contener sólo un valor numérico del parámetro desconocido. Frente a ésta, hemos de formular una *hipótesis alternativa*, en la que recogemos los valores del parámetro que pasaremos a aceptar en caso de rechazar la hipótesis nula. Tomemos, de momento: H_1: $p \neq 0{,}05$. Esta hipótesis alternativa es *compuesta*, pues incluye todo un rango de valores alternativos para el parámetro desconocido. A diferencia de la hipótesis nula, que es simple, la hipótesis alternativa no define una única distribución de probabilidad. La hipótesis nula sí lo hace, pues de ser cierta, la distribución de probabilidad de la variable indicatriz que para cada persona en la población toma el valor 1 si consume la colonia, y 0 si no lo hace, queda totalmente determinada como una distribución Bernouilli, $B(1,p)$, con $p = 0{,}05$.

De este modo, tenemos:

Error de tipo I: Rechazar H_0 y, por tanto, aceptar H_1, cuando H_0 es cierta.
Error de tipo II: No rechazar H_0 cuando H_1 es cierta, es decir, cuando H_0 es falsa.

El *nivel de significación o tamaño* de un contraste de hipótesis, que denotaremos por α, es la probabilidad de cometer un error de tipo I, es decir, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta. La *potencia* de un contraste es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es falsa, lo cual es algo que querríamos hacer. Por tanto, a diferencia del nivel de significación del contraste, que preferiremos que sea reducido, querremos que la potencia del contraste sea elevada. Si denotamos por β la probabilidad de cometer un error de tipo II, entonces la potencia es igual a $1 - \beta$, ya que:

$$P[\text{no rechazar } H_0/H_0 \text{ es falsa}] + P[\text{rechazar } H_0/H_0 \text{ es falsa}] = 1$$

y el primer sumando es igual a β.

Veremos en las próximas secciones que la forma de resolver el contraste de hipótesis es distinta con cada especificación de la hipótesis alternativa, ya sea ésta simple o compuesta y, si es compuesta, el contraste se lleva a cabo también de distinta manera según el rango de valores paramétricos alternativos que incluya. Tal como hemos expuesto este ejemplo, se llevaría a cabo un contraste llamado *de dos colas*, en el que rechazaremos la hipótesis nula si encontramos mucha evidencia en su contra, lo que ocurrirá si la proporción muestral difiere apreciablemente de $p = 0{,}05$. Sin embargo, no puede aceptarse a priori que la campaña publicitaria haya tenido un efecto perjudicial sobre el consumo, es decir, que la proporción de clientes sea inferior tras la campaña publicitaria, por lo que la hipótesis alternativa debería ser: H_1: $p > 0{,}05$. En tal caso, detectaremos evidencia en contra de H_0, si obtenemos una proporción muestral relativamente alta, pero no si es baja.

Un ejemplo del tipo de contrastes que llevamos a cabo en *problemas de dos muestras* es de las hipótesis: H_0: $p_h = p_m$: la proporción de fumadores entre los alumnos de la Facultad de Económicas es igual en hombres que en mujeres, para lo que habría que extraer dos muestras, una de cada grupo poblacional. La alternativa podría consistir simplemente en que ambas proporciones son diferentes H_1: $p_h \neq p_m$, o ser más estricta, en el sentido de especificar que la proporción de fumadores entre los estudiantes varones es superior a la de las mujeres: H_1: $p_h > p_m$. La forma de resolver el contraste de hipótesis es distinta con cada especificación de la hipótesis alternativa: en el primer caso efectuaríamos un contraste *de dos colas*, mientras que en el segundo efectuaríamos un *contraste de una sola cola*.

En este tipo de problemas no se trata de contrastar un valor numérico concreto para ambos parámetros, sino tan sólo que ambos son iguales entre sí. A la vez que efectúa el contraste, el investigador estimará las proporciones de ambas poblaciones, potencialmente diferentes, y también podría estimar una única proporción, utilizando ambas muestras, si es que no rechaza la hipótesis nula. Los problemas de dos muestras más habituales se refieren, además del expuesto en el ejemplo, al contraste de hipótesis de igualdad de esperanzas matemáticas o de varianzas entre poblaciones posiblemente diferentes.

10.2. CONTRASTE DE HIPÓTESIS ACERCA DE PROPORCIONES

Comenzamos en esta sección la discusión de los métodos precisos para llevar a cabo un contraste de hipótesis continuando con el ejemplo anterior, en que se quiere efectuar un contraste sobre la proporción poblacional. Para ello, mantengamos en dicho ejemplo el supuesto de que la regla de rechazo elaborada a priori por la empresa ha sido: rechazar si el estimador insesgado de la nueva proporción, es decir, la proporción muestral, denotada por $\hat{p}$, $\hat{p} = x/n$, es igual o superior a 0,07. Puesto que cometemos un error de tipo I cuando rechazamos H_0 siendo cierta, es decir, siendo $p = 0{,}05$, y puesto que rechazamos H_0 si la proporción muestral es igual o superior a 0,07, tenemos que la *probabilidad de cometer un error de tipo I*, es decir, el *nivel de significación* del contraste, es:

$$a = P(\hat{p} \geqslant 0{,}07 \,/\, p = 0{,}05) = P\left(\frac{x}{n} \geqslant 0{,}07 \,/\, p = 0{,}05\right)$$

donde x denota el número total de personas que se declaran usuarios de la colonia, de entre los 200 entrevistados, y n es el tamaño muestral, en este caso, $n = 200$. Para hallar esta probabilidad, utilizamos el hecho de que si cada variable individual es $B(1,p)$, entonces la suma x es $B(n,p)$. Por tanto:

$$a = P\left(\frac{x}{n} \geqslant 0{,}07 \,/\, p = 0{,}05\right) = P(x \geqslant (0{,}07)(200) = 14 \,/\, p = 0{,}05) =$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{13} P(x = i \,/\, p = 0{,}05) = 1 - \sum_{i=0}^{13} \binom{200}{i} (0{,}05)^i (0{,}95)^{200-i}$$

Evaluar cada uno de los sumandos puede resultar complejo, por lo que es preferible utilizar bien la aproximación de Poisson a la distribución binomial, o la aproximación Normal, que son válidas cuando la probabilidad individual p es pequeña, pero el producto np es suficientemente grande. Aquí tenemos: $np = (200)(0{,}05) = 10$. Examinando las tablas de la distribución de Poisson para $\lambda = 10$, tenemos que la probabilidad de que dicha variable tome un valor numérico igual o inferior a 13 es de 0,864, por lo que: $\alpha = 1\text{-}0{,}864 = 0{,}136$.

Podríamos asimismo calcular la probabilidad β de cometer un error de tipo II pero, para ello, es preciso suponer que la proporción poblacional ha cambiado hasta un nuevo valor p'. Por ejemplo, supongamos que, realmente, ahora $p' = 0{,}6$, aunque esto es desconocido. Recordemos que no rechazamos H_0 si $x < 14$, de modo que:

$$\beta = P(x < 14/p' = 0{,}06) = \sum_{i=0}^{13} \binom{200}{i} (0{,}06)^i (0{,}94)^{200-i} = 0{,}682$$

valor numérico que aparece en las tablas de la distribución de Poisson para $np = (200)(0{,}06) = 12$. Es fácil calcular que si $p' = 0{,}7$, entonces se tendría: $\lambda = 14$ y $\beta = 0{,}464$, mientras que si $p' = 0{,}8$, entonces: $\lambda = 16$ y $\beta = 0{,}275$. Por tanto, cuando la verdadera proporción de usuarios actuales de la colonia excede del 5 %, la probabilidad de cometer error de tipo II, no rechazando H_0, que es falsa, es tanto menor cuanto mayor sea la discrepancia entre la nueva proporción y la antigua, 5 %.

Los valores de α y β dependen de la estrategia que se adopte para efectuar el contraste. En este caso, al exigir superar el 7 %, la empresa está siendo bastante exigente para rechazar H_0. Ello hace que la probabilidad de cometer el error de tipo I sea relativamente pequeño, mientras que la probabilidad de cometer un error de tipo II es elevada. Esto se debe a que el error de tipo II sucede *cuando no se rechaza* H_0, siendo falsa: dado que estamos exigiendo bastante evidencia en contra de H_0 para rechazar, tendemos a *no rechazar demasiado a menudo*.

Supongamos que la empresa sigue una estrategia algo distinta: rechazar H_0: $p = 0{,}05$, si la proporción muestral es igual o superior a 0,08. En tal caso, el error de tipo I o nivel de significación, sería:

$$\alpha = P(x \geqslant 16/p = 0{,}05) = 1 - \sum_{i=0}^{15} P(X = i \,/\, p = 0{,}05) =$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{15} \binom{200}{i} (0{,}05)^i (0{,}95)^{200-i} = 1 - 0{,}951 = 0{,}049$$

sustancialmente inferior a la que alcanzamos con el umbral del 7%, que era de $\alpha = 0{,}136$.

Parece claro, por tanto, que la estrategia concreta que se adopte *a priori* para resolver el contraste incide sobre los niveles de ambas probabilidades de cometer error. Este ejemplo también sugiere, como así es cierto, que al variar el umbral de rechazo, tendemos a reducir la probabilidad de cometer un tipo de error, pero a costa de incrementar la probabilidad de cometer el error del otro tipo.

Dejemos esta discusión por un momento, y pasemos a considerar un modo alternativo, asimismo adecuado, de resolver un contraste de hipótesis acerca de proporciones: H_0: $p = p_0$, frente a H_1: $p \neq p_0$. Para ello, nos basaremos en que, *suponiendo que la hipótesis nula sea cierta*, si x es el número de éxitos en una prueba de n repeticiones independientes de una binomial $B(n,p_0)$ entonces la proporción muestral x/n puede aproximarse por una distribución $N(p_0, p_0(1-p_0)/n)$, siempre que n sea suficientemente grande [Sección 7.8.3]. En tal caso, la variable aleatoria es:

$$Z = \frac{x/n - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \simeq N(0,1) \tag{10.1}$$

y por tanto, satisface que:

$$0{,}01 = P\left(\left|\frac{x/n - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right| \geqslant 2{,}57\right) = 1 - P\left(-2{,}57 \leqslant \frac{x/n - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leqslant 2{,}57\right) =$$

$$= 1 - P\left(p_0 - 2{,}57\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \leqslant \frac{x}{n} \leqslant p_0 + 2{,}57\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$$

y, en el caso en que $p_0 = 0{,}05$, dicho intervalo es:

$$0{,}01 = 1 - P\left(0{,}05 - (2{,}57)\sqrt{\frac{(0{,}05)(0{,}95)}{200}} \leqslant \frac{x}{n} \leqslant 0{,}05 + (2{,}57)\sqrt{\frac{(0{,}05)(0{,}95)}{200}}\right) =$$

$$= 1 - P\left(0{,}010 \leqslant \frac{x}{n} \leqslant 0{,}090\right)$$

Es decir, si la hipótesis nula es cierta, la probabilidad de que la proporción muestral que calculemos a partir de las 200 observaciones muestrales se aleje de $p_0 = 0{,}05$ por encima de 0,090 o por debajo de 0,010 es igual a 0,01, el nivel de significación escogido. Si al encuestar a las 200 personas obtenemos una proporción inferior al 1 %, o superior al 9 %, diremos que es un suceso muy poco probable, por lo que la hipótesis que hemos mantenido: H_0: $p = 0{,}05$, seguramente no es cierta. En consecuencia, si ello sucede, rechazaremos la hipótesis nula, habiendo efectuado el contraste a un nivel de significación, o con un tamaño, del 1 %.

Puede parecer que el requerimiento de exigir una proporción poblacional fuera del intervalo (0,01;0,09) sea demasiado estricto, y que H_0 debería rechazarse también para otras estimaciones, como $\hat{p} = 0{,}025$ o $\hat{p} = 0{,}075$. Sin embargo, esto no es debatible. Los niveles extremos del 1 % y 9 % surgen porque el nivel de significación del contraste se ha escogido igual al 1 %. Si hubiésemos escogido un nivel de significación del 5 %, habríamos tenido:

$$0{,}05 = P\left(\left|\frac{x/n - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right| \geqslant 1{,}96\right) = 1 - P\left(-1{,}96 \leqslant \frac{x/n - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leqslant 1{,}96\right) =$$

$$= 1 - P\left(p_0 - 1{,}96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \leqslant \frac{x}{n} \leqslant p_0 + 1{,}96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right) =$$

$$= P\left(0{,}05 - (1{,}96)\sqrt{\frac{(0{,}05)(0{,}95)}{200}} \leqslant X/n \leqslant 0{,}05 + (1{,}96)\sqrt{\frac{(0{,}05)(0{,}95)}{200}}\right) =$$

$$= P(0{,}020 \leqslant X/n \leqslant 0{,}080)$$

un intervalo más estrecho.

El que acabamos de describir es un contraste denominado *de dos colas*, y es adecuado cuando no se tiene información acerca de los valores alternativos al incluido en la hipótesis nula. Pero ya hemos comentado que en este ejemplo, tiene pleno sentido creer que si la proporción de usuarios ha variado tras la campaña publicitaria, será para aumentar, no para disminuir, por lo que debe especificarse una hipótesis alternativa del tipo: H_1: $p > 0{,}05$. En tal caso, el contraste se lleva a cabo del siguiente modo: para detectar evidencia en contra de H_0, deberemos obtener una proporción muestral relativamente alta. Ello indicaría que la situación de mercado ha cambiado tras la campaña de publicidad, siendo ahora la proporción de clientes superior a la inicial. Por tanto, una proporción muestral algo elevada será inconsistente con la hipótesis de mantenimiento de $p = 0{,}05$. Ahora bien, ¿cuál debe ser el umbral crítico de la proporción poblacional por encima del cual rechacemos H_0? De nuevo, podemos obtenerlo utilizando un argumento similar al anterior.

Necesitamos determinar el umbral z_a por encima del cual la distribución $N(0,1)$ tiene una probabilidad de 0,01. Nos interesa este sentido de la desigualdad porque rechazaremos la hipótesis nula cuando detectemos un valor numérico tan grande del estadístico que no pueda haberse obtenido bajo H_0. Notemos que el estadístico Z que definimos en (10.1) sigue una distribución $N(0,1)$ bajo H_0, pero sigue una distribución con una media *mayor que 0,05* si H_0 no es cierta. Por eso es que valores numéricos altos proporcionan evidencia en contra de H_0. Examinando las tablas de la $N(0,1)$ vemos que el umbral que buscamos es 2,325, por lo que tenemos:

$$0{,}01 = P\left(Z = \frac{x/n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \geqslant 2{,}325\right) = P\left(\frac{x}{n} \geqslant 0{,}05 + (2{,}325)\sqrt{\frac{(0{,}01)(0{,}99)}{200}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{x}{n} \geqslant 0{,}066\right)$$

que conduce a rechazar la hipótesis nula si obtenemos una proporción muestral por encima de 6,6 %. Nuestro análisis nos dice que tal resultado sería muy poco probable bajo el supuesto mantenido en H_0, que es: $p = 0{,}05$.

La región que estamos determinando, tanto en contrastes de una cola como en contrastes de dos colas, se denomina *región crítica*, y comprende la parte del espacio muestral menos probable bajo H_0. Por tanto, si cae en ella el estadístico muestral utilizado en el contraste (en nuestro ejemplo, la proporción muestral), se rechaza H_0. La *región de aceptación* es el complemento de la región crítica. La estrategia seguida en el contraste del ejemplo y, con ella, la región crítica, serían diferentes si la hipótesis alternativa fuese: H_1: $p < 0{,}05$. En tal caso, sería una proporción muestral reducida la que proporcionaría evidencia en contra de H_0. Así, como también es 0,01 la probabilidad de que una variable aleatoria $N(0,1)$ tome valores por debajo de $-2{,}325$, tendríamos:

$$0{,}01 = P\left(Z = \frac{x/n - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leqslant -2{,}325\right) = P\left(x/n \leqslant -(2{,}325)\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{x}{n} \leqslant 0{,}05 - (2{,}325)\sqrt{\frac{(0{,}01)(0{,}99)}{200}}\right) = P\left(\frac{x}{n} \leqslant 0{,}034\right)$$

por lo que una proporción muestral inferior al 3,4% constituiría suficiente evidencia en contra de la hipótesis nula, al nivel de significación $\alpha = 1\%$, como para rechazarla.

La metodología de contrastación de hipótesis estadísticas que hemos expuesto en este ejemplo acerca de la proporción es común a cualquier otro contraste de una hipótesis nula simple acerca de un parámetro. La única dificultad estriba solamente en que, en ocasiones, no es fácil deducir el estadístico muestral que es preciso utilizar, aunque en los casos que nosotros consideraremos en este texto, es siempre sencillo.

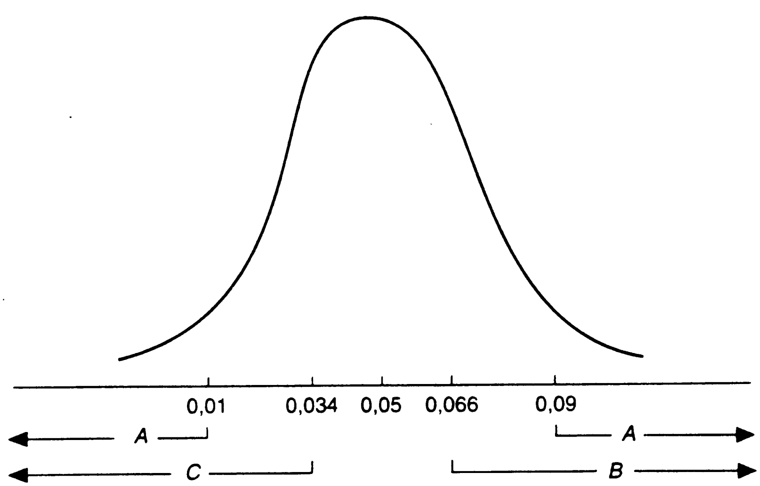

Gráfico 10.1. Regiones críticas para el contraste de H_0: $p = 0{,}05$ al nivel de significación del 1 %.

A: Contraste de dos colas: H_1: $p \neq 0{,}05$.
B: Contraste de una cola: H_1: $p > 0{,}05$.
C: Contraste de una cola: H_1: $p < 0{,}05$.

10.3. POTENCIA Y TAMAÑO MUESTRAL

Para introducir algunos conceptos adicionales acerca de la contrastación de hipótesis, supongamos que queremos contrastar un valor numérico acerca de la esperanza matemática de una población Normal de varianza conocida, $\sigma^2 = 125$. Supongamos que dudamos entre $\mu = 60$ o $\mu = 65$. Es decir, establecemos hipótesis nulas y alternativas, ambas simples: $H_0 : \mu = 60$, frente a $H_1 : \mu = 65$. Una vez más, el contraste se resuelve construyendo una *región crítica*. A continuación, tomaremos una muestra, y si el valor numérico del estadístico utilizado para el contraste cae en la región crítica, rechazaremos la hipótesis $\mu = 60$, pasando a aceptar que $\mu = 65$.

En este ejemplo es natural pensar en utilizar la media muestral como estadístico, y construir una región crítica en la que *se rechaza* H_0 *si la media muestral excede de un umbral* λ. Ello se debe a que la hipótesis alternativa contempla un valor de μ superior al de la hipótesis nula y, por tanto, una media muestral elevada proporcionaría evidencia en contra de H_0. Si, por el contrario, tuviésemos: H_0: $\mu = 60$ frente a: H_1: $\mu = 55$, la región crítica sería: *Rechazar* H_0 *si la media muestra es inferior a un cierto umbral*, pues una media muestral suficientemente reducida sería evidencia a favor de una esperanza matemática reducida, e inferior, en cualquier caso, a la que se contempla en la hipótesis nula.

En nuestro ejemplo, escojamos un nivel de significación, por ejemplo: $a = 0{,}10$. Sabemos que la media de una muestra aleatoria simple extraída de una población Normal sigue asimismo una distribución Normal, con esperanza matemática igual a la poblacional, y varianza igual a la varianza poblacional, dividida por el tamaño muestral. Por tanto, tenemos:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

Rechazaremos H_0 al nivel de significación a si la media muestral es suficientemente grande, es decir, cuando:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{\bar{x} - 60}{\sqrt{125/100}} \geqslant \lambda_a$$

donde λ_a se selecciona de modo que:

$$a = P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \geqslant \lambda_a \Big/ H_0 \right) = P\left(\frac{\bar{x} - 60}{\sqrt{125/100}} \geqslant \lambda_a \right)$$

puesto que ello garantiza que, si el verdadero valor numérico, desconocido, de la esperanza matemática es $\lambda = 60$, entonces la probabilidad de obtener una media muestral superior a λ_a en una muestra de 100 observaciones de una población Normal $N(\mu, 125)$ y, con ello, rechazar H_0, es precisamente 0,10, el nivel de significación deseado para el contraste.

En el caso de la $N(0,1)$, el umbral superior de probabilidad de 0,90 es 1,285, como puede verse en las tablas de esta distribución, de modo que se tiene:

$$a = 0{,}10 = P\left(\frac{\bar{x} - 60}{\sqrt{125/100}} \geqslant 1{,}285 \right) = P\left(\bar{x} \geqslant 60 + (1{,}285)\sqrt{125/100}\right) = P(\bar{x} \geqslant 61{,}437)$$

Construida la región crítica, ya podemos proceder a extraer una muestra de tamaño 100, calcular su media muestral, y, si supera a 61,437, rechazaremos H_0: $\mu = 60$, pasando a aceptar: H_1: $\mu = 65$.

La probabilidad de cometer un error de tipo II con esta región crítica es:

$$\beta = P(\bar{x} < 61{,}437 \, / \, \mu = 65) = P\left(\frac{\bar{x} - 65}{\sqrt{125/100}} < \frac{61{,}437 - 65}{\sqrt{125/100}} \right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{61{,}437 - 65}{1{,}118} = -\,3{,}19 \right) \simeq 0$$

prácticamente cero, lo cual nos pone bastante a salvo en este sentido. Ello se ha logrado, en parte, debido a que el nivel de significación, probabilidad de cometer un error de tipo I, es relativamente alto, 0,10.

Recordemos que la *potencia* del contraste es el complemento de la probabilidad de cometer un error de tipo II, es decir, la *probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando esta es falsa.* Nótese, por tanto, que la potencia es la probabilidad de no cometer un cierto tipo de error y, por ello, se quiere que sea lo más próximo a 1 que se pueda. Como veremos en las siguientes secciones, uno de los objetivos de la teoría de contrastación de hipótesis estadísticas es, precisamente, la construcción de contrastes de máxima potencia.

Supongamos ahora que en el caso de la población Normal anterior, en que queremos contrastar la hipótesis nula H_0: $\mu = 60$, la hipótesis alternativa es compuesta: H_1: $\mu < 60$ siendo la varianza igual a 125, y que hemos tomado una muestra de tamaño $n = 25$. Supongamos asimismo que establecemos a priori como región crítica: *Rechazamos H_0 si la media muestral excede de 62.*

Encontremos la función de potencia de este contraste. Para ello, necesitamos:

$$W(\mu) = P(\bar{x} \geqslant 62/\mu) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{125/25}} \geqslant \frac{62 - \mu}{\sqrt{125/25}} \right)$$

probabilidad que, para valores de la esperanza matemática μ entre 60 y 67, vale, respectivamente: $W(60) = 0{,}185$; $W(61) = 0{,}327$; $W(62) = 0{,}500$; $W(63) = 0{,}671$; $W(64) = 0{,}814$; $W(65) = 0{,}910$; $W(66) = 0{,}964$; $W(67) = 0{,}987$. El Gráfico 10.2 de esta función nos da los valores de la *potencia del contraste* bajo distintos valores de *μ alternativos* al considerado en la hipótesis nula. Esta es la *función de potencia del contraste.* El valor de la función $W(\mu)$ en el valor paramétrico especificado en H_0, $\mu = 60$, nos da la probabilidad de rechazar H_0 cuando $\mu = 60$, es decir, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta, es decir, *el nivel de significación* del contraste y, con la región crítica establecida, es de 0,185. Cuando $\mu = 65$, la hipótesis nula es obviamente falsa, y la probabilidad de rechazarla, es decir, la potencia del contraste en dicho punto, es de 0,910, bastante alta, lo cual es bueno.

Sin embargo, el nivel de significación que hemos obtenido, de 0,185, es considerado como demasiado elevado para la mayoría de las aplicaciones de interés. Lo más frecuente es que los investigadores suelan preferir niveles de significación del 1 %, 5 % o, como mucho, del 10 %. No existe, sin embargo, gran justificación para escoger estos niveles en vez de otros alternativos. En el ejemplo del fabricante de colonias, tanto el nivel escogido para el error de tipo I

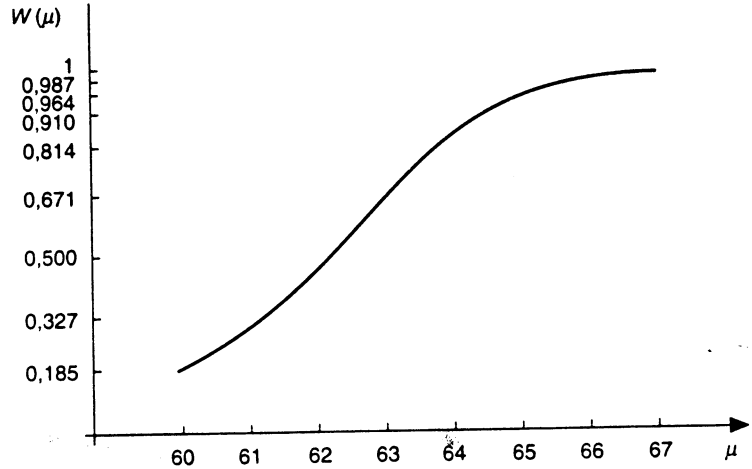

Gráfico 10.2. Función de potencia del contraste: H_0: $\mu = 60$ para la regla: Rechazar si $\bar{x} > 62$.

como el del error de tipo II tendrían repercusiones muy distintas sobre sus resultados, acarreando consecuencias, en la forma de pérdidas, que el fabricante puede evaluar a priori. Por tanto, está en condiciones de fijar un nivel de significación preferido, una vez que cuente con dicha estimación de pérdidas posibles, y no hay razón para creer que estará indiferente entre cometer error de tipo I o de tipo II.

En cualquier caso, vamos a proceder bajo el supuesto de que se ha fijado un nivel de significación, digamos que del 0,05. ¿Cómo debemos escoger la región crítica? La respuesta viene de un argumento similar a los anteriores; puesto que lo que queremos es que $W(60) = 0.05$, tenemos que hallar un umbral λ tal que:

$$0{,}05 = W(60) = P(\bar{x} \geqslant \lambda_{0.05}/\mu = 60) = P\left(\frac{\bar{x} - 60}{\sqrt{125/25}} \geqslant \frac{\lambda_{0.05} - 60}{\sqrt{125/25}} \,/\, \mu = 60 \right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\lambda_{0.05} - 60}{2{,}236} \right)$$

donde Φ denota la función de distribución de una $N(0,1)$, lo que implica:

$$\frac{\lambda - 60}{2{,}236} = 1{,}645 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 60 + (1{,}645)(2{,}236) = 63{,}68$$

es decir, *rechazar H_0 si se obtiene una media muestral superior a 63,68*. Esta es una región crítica más pequeña que la que antes teníamos. La probabilidad de cometer un error de tipo II con esta región crítica, para $\mu = 65$, es:

$$\beta = P(\bar{x} < 63{,}68) = P\left(\frac{\bar{x} - 65}{\sqrt{125/25}} < \frac{63{,}68 - 65}{\sqrt{125/25}} \right) = \Phi\,(-\,0{,}590) = 0{,}2776$$

o sea, una potencia en $\mu = 65$ de 0,722, notablemente inferior a la que obtuvimos con la regla anterior de rechazar con una media muestral superior a 62. Hemos reducido el nivel de significación del contraste, pero a costa de aumentar la probabilidad de cometer un error de tipo II, es decir, a cambio de *reducir la potencia* del contraste.

Ya mencionamos antes que este es un resultado general: sólo puede reducirse la probabilidad de cometer un error de un tipo, a costa de incrementar la probabilidad de cometer un error de otro tipo. Sólo pueden reducirse ambas probabilidades simultáneamente si se aumenta el tamaño muestral, o si se consigue un contraste distinto que tenga mejores propiedades que el que se está utilizando.

Supongamos ahora que hemos recogido más información muestral, $n = 125$, de modo que la varianza de la media muestral pasa a ser igual a 1. Para obtener un contraste con nivel de significación del 5 %, necesitamos determinar un umbral λ_a tal que:

$$0{,}05 = P(\bar{x} \geqslant \lambda_a | \mu = 60) = \text{P}(\bar{x} - 60 \geqslant \lambda_a - 60 | \mu = 60)$$

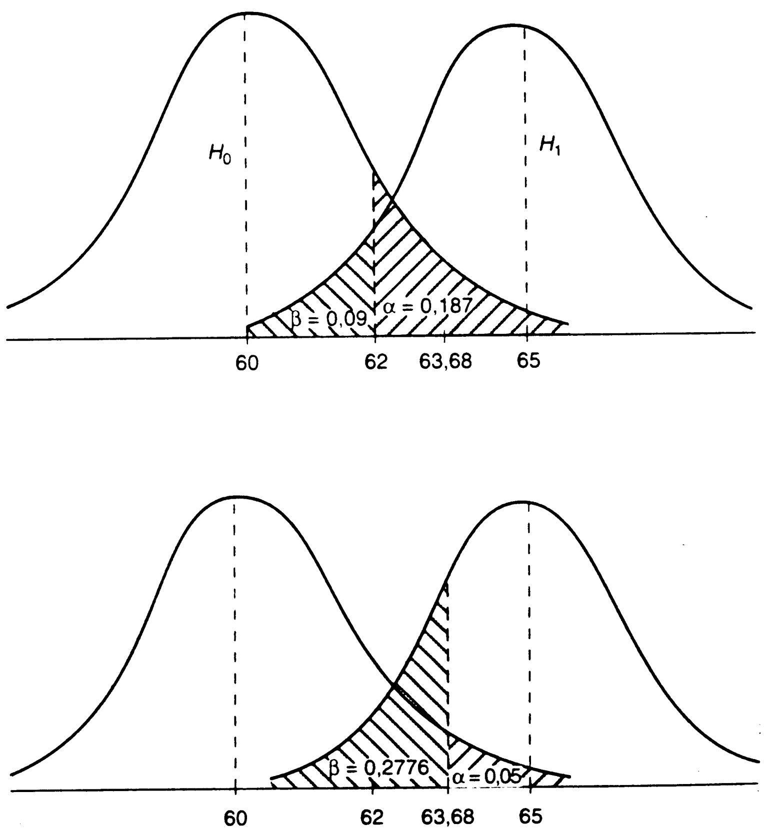

Gráfico 10.3. Región crítica y potencias de distintas estrategias para contrastar: H_0: $\mu = 60$ frente a: H_1: $\mu = 65$.

Pero $\bar{x} - 60$ es ahora una variable aleatoria $N(0,1)$, por lo que todo lo que necesitamos es:

$$\lambda_a - 60 = 1{,}645 \quad \Rightarrow \quad \lambda_a = 61{,}645$$

La función de potencia es ahora:

$$W(\mu) = P(\bar{x} \geqslant 61{,}645/\mu) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{125/125}} \geqslant \frac{61{,}645 - \mu}{\sqrt{125/125}} \right) = 1 - \Phi(61{,}645 - \mu)$$

En particular, se tiene en $\mu = 65$, que:

$$\beta = 1 - W(\mu) = \Phi(61{,}645 - 65) = \Phi(-3{,}355) = 0$$

o, equivalentemente con potencia: $W(65) = 1$, mientras que con la muestra anterior era $W(65) = 0{,}91$. Lo mismo ocurre con los demás valores de μ. Aumentando el tamaño muestral, hemos podido aumentar la potencia sin tener que aumentar a la vez el nivel de significación.

Como puede fácilmente imaginarse, tratar de adivinar el tamaño muestral que proporcionará las características deseadas al contraste es muy poco práctico. Resulta mucho más adecuado proceder a calcular dicho tamaño muestral directamente, una vez que se ha decidido acerca del nivel de significación y la potencia que se desea en un determinado valor de μ, alternativo al de la hipótesis nula. Por ejemplo, supongamos que queremos: $\alpha = 0{,}01$, a la vez que: $\beta = 0{,}05$ en el punto $\mu = 65$. Entonces:

$$0{,}01 = P(\bar{x} \geqslant \lambda | \mu = 60) = 1 - \Phi\left(\frac{\lambda - 60}{\sqrt{125/n}} \right)$$

$$0{,}05 = 1 - P(\bar{x} \geqslant \lambda | \mu = 65) = \Phi\left(\frac{\lambda - 65}{\sqrt{125/n}} \right)$$

es decir:

$$2{,}325 = \frac{\lambda - 60}{\sqrt{125/n}}; \qquad -1{,}645 = \frac{\lambda - 65}{\sqrt{125/n}}$$

un sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas que puede resolverse para encontrar simultáneamente λ y el tamaño muestral n. En este caso, se tiene:

$$\lambda = 62{,}928 \qquad \sqrt{n} = 8{,}878$$

que redondeamos a: $n = 79$. Si seguimos la estrategia de extraer una muestra de 79 elementos, y rechazar H_0 si la media muestral excede de 62,928, tenemos un nivel de significación del 1 %, así como una potencia en $\mu = 65$, de 0,95.

Otro concepto de gran interés en el contraste de hipótesis estadísticas es el de *valor p proporcionado por una muestra en un determinado contraste*. Este se define como la probabilidad de obtener un valor del estadístico utilizado en el contraste, que sea igual al qué hemos obtenido en la muestra o aún más extremo en la dirección de la hipótesis alternativa, bajo el supuesto de que la hipótesis nula es cierta.

Supongamos que en el contraste anterior, con 25 observaciones, hemos obtenido una media muestral de 63,5. El valor p de esta media muestral es entonces la probabilidad de obtener un valor de 63,5 o superior (ésta es la dirección en que rechazamos H_0), bajo la hipótesis nula de que: $\mu = 60$ es cierta, es decir:

$$p = P(\bar{x} \geqslant 63{,}5/\mu = 60) = P\left(\frac{\bar{x} - 60}{\sqrt{125/25}} \geqslant \frac{63{,}5 - 60}{\sqrt{125/25}} \Big/ \mu = 60 \right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{63{,}5 - 60}{\sqrt{125/25}} \right) = 1 - \Phi(1{,}565) = 1 - 0{,}941 = 0{,}059$$

Que el valor p de un estadístico en un contraste sea pequeño significa que es poco probable que pudiéramos obtener evidencia aún más en contra de H_0 que la que hemos obtenido en la muestra. Tenemos, por tanto, que la información muestral proporciona evidencia bastante significativa contra la hipótesis nula, que tenderemos a rechazar, con la muestra disponible, casi bajo cualquier nivel de significación a que fijemos. El valor p es *el menor nivel de significación para el cual rechazamos la hipótesis nula con la información muestral disponible*. Para niveles de significación mayores que él, rechazamos H_0. Con el valor p que hemos calculado en el contraste anterior, rechazaríamos H_0 para niveles de significación superiores a 0,059, como $a = 0{,}10$, pero no para valores inferiores, como $a = 0{,}05$ o $a = 0{,}01$. En este caso, la media de 63,5 en la muestra de 25 elementos no parece ser muy dañina contra H_0. Es claro que el nivel p proporcionado por una muestra depende tanto del valor numérico del estadístico que con ella se calcule, como del tamaño muestral.

El interés del valor p reside en que no determina de manera única el resultado de un contraste, sino que distintos investigadores que tengan distintos puntos de vista respecto al nivel de significación que es conveniente utilizar en un contraste, calcularán el mismo valor p en una muestra, pudiendo alcanzar la misma o diferente decisión.

10.4. CONTRASTES SOBRE LA ESPERANZA MATEMÁTICA DE UNA POBLACIÓN NORMAL

El contraste de hipótesis acerca de la esperanza matemática de una población Normal se realiza utilizando como estadístico la media muestral. Si la hipótesis nula es simple y establece que H_0: $\mu = \mu_0$ entonces, si es cierta, la población es $N(\mu_0, \sigma^2)$, y la media muestral se distribuye $N(\mu_0, \sigma^2/n)$. En consecuencia, el estadístico:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

nos permite llevar a cabo el contraste. Si la hipótesis alternativa es compuesta, del tipo: H_1: $\mu \neq \mu_0$, entonces la región crítica consiste en *no rechazar* si la media muestral está *suficientemente próxima* a μ_0, es decir, si:

$$|Z| \leqslant 1{,}96 \quad \textit{o lo que es lo mismo si:} \quad \mu_0 - (1{,}96)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \bar{x} \leqslant \mu_0 + (1{,}96)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

y *rechazar* en caso contrario.

Si la hipótesis alternativa es del tipo: H_1: $\mu < \mu_0$, entonces encontraremos evidencia en contra de la hipótesis nula, es decir, a favor de H_1, cuando la media muestral sea *suficientemente grande*, ya que la hipótesis alternativa afirma que la esperanza matemática es mayor que μ_0, el valor especificado en la hipótesis nula. Por tanto, *rechazamos* la hipótesis nula si:

$$Z \geqslant 1{,}645 \quad \textit{o lo que es lo mismo} \quad \bar{x} \geqslant \mu_0 + (1{,}645)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si la hipótesis alternativa es del tipo: H_1: $\mu < \mu_0$, entonces encontraremos evidencia en contra de la hipótesis nula, es decir, a favor de H_1, cuando la media muestral sea *suficientemente pequeña* ya que la hipótesis alternativa establece que la esperanza matemática es menor que μ_0. Por tanto, *rechazamos* la hipótesis nula si:

$$Z \leqslant 1{,}645 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} \leqslant \mu_0 - (1{,}645)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Este contraste lo hemos resuelto suponiendo que la varianza poblacional es conocida. Cuando no lo es, se sustituye por la cuasivarianza muestral, y se utiliza la distribución t de Student, con $n - 1$ grados de libertad, del mismo modo que antes:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Ejemplo 10.1. El dueño de un restaurante cree que la cantidad de dinero que, en término medio, gasta cada cliente en una comida, es de 2.500 ptas.. Supongamos que el dueño del restaurante *sabe* quizá por muestreos de ocasiones anteriores, que la desviación típica en las facturas individuales es de 800 ptas. Para contrastar dicha hipótesis, toma las facturas correspondientes a 100 comensales, extraídos al azar a lo largo de varios días, obteniendo una media muestral de 2.380 ptas. por comensal. Bajo la hipótesis nula: H_0: $\mu = 2.500$, tenemos la siguiente distribución:

$$Z = \frac{\bar{x} - 2500}{800/\sqrt{100}} \sim N(0,1)$$

de modo que, fijado un nivel de significación $a = 0{,}05$, por ejemplo, tenemos:

$$0{,}05 = 1 - P\left(\left|\frac{\bar{x} - 2500}{800/\sqrt{100}}\right| \leqslant 1{,}96\right) =$$

$$= 1 - P[2500 - (1{,}96)\,80 \leqslant \bar{x} \leqslant 2500 + (1{,}96)\,80] = 1 - P\,(2343 \leqslant \bar{x} \leqslant 2657)$$

La media muestral se halla fuera de la región crítica que hemos construido, por lo que no rechazamos la hipótesis de que el gasto medio es de 2.500 ptas. Sin embargo, con un nivel de significación algo superior al 5 %, habríamos rechazado la hipótesis nula.

Si el dueño del restaurante hubiese estado interesado en contrastar la hipótesis citada porque temiese que el gasto estaba siendo inferior a 2.500 ptas. por comensal, entonces debería utilizar un contraste de una cola, rechazando H_0 si encuentra suficiente evidencia en contra de ella. Como la hipótesis alternativa es ahora: H_1: $\mu < 2.500$, rechazará H_0 si la media muestral es suficientemente pequeña, teniendo:

$$0{,}05 = P\left(\frac{\bar{x} - 2500}{800/\sqrt{100}} \geqslant -1{,}645 \right) = P[\bar{x} \leqslant 2500 - (1{,}645)(80)] = P\,(\bar{x} \leqslant 2368)$$

Como la media muestral obtenida no cae dentro de esta región crítica (bien es verdad que por poco), no rechazamos la hipótesis nula tampoco en este caso: no hemos encontrado suficiente evidencia en contra de la creencia de que cada comensal gasta en media 2.500 ptas..

En la mayoría de las situaciones es difícil mantener que el investigador conoce la varianza de la población. Cuando ello no ocurre, la sustituye en el estadístico anterior, que no es sino la media muestral tipificada, por la cuasivarianza muestral, y obtiene el umbral crítico del contraste a partir de la distribución t_{n-1}, en vez de la $N(0,1)$. En el ejemplo anterior, supongamos que no se tiene suficiente garantía acerca del valor de la varianza poblacional, y que se hubiese procedido a estimarla mediante la cuasivarianza muestral, obteniendo: $s = 700$. El desarrollo seguiría a partir de aquí como antes, sólo que utilizando la distribución t. Ahora bien, el tamaño muestral es elevado y, con él, el número de grados de libertad: $n - 1 = 99$, y la distribución de probabilidad t_{99} es indistinguible de la distribución $N(0,1)$.

El valor numérico del umbral inferior del intervalo de confianza del 95 % sería ahora de 2.384,9, distinto de antes porque la estimación de la cuasivarianza no ha coincidido con el

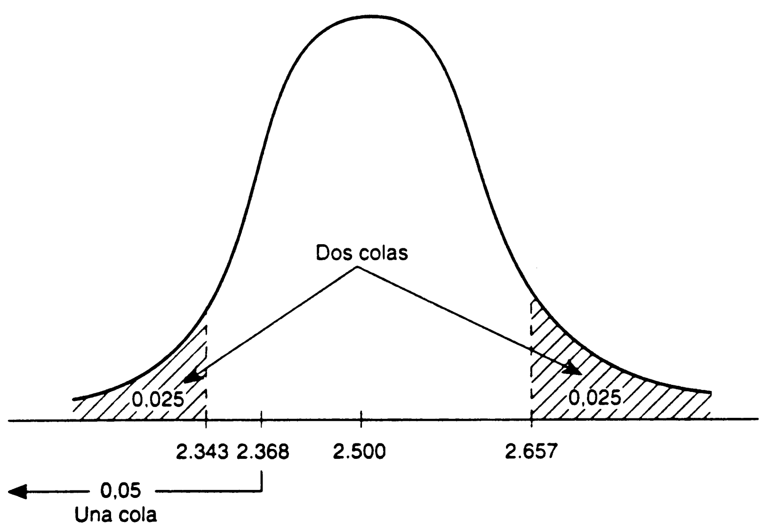

Gráfico 10.4. Regiones críticas para los contrastes de una y dos colas de H_0: $\mu = 2.500$.

valor teórico que antes supusimos conocido, $\sigma = 800$. Puesto que la media muestral obtenida está por debajo de este umbral, si bien ligeramente, consideramos que es *suficientemente pequeña* y rechazamos H_0, pasando a creer que el gasto medio por comensal es inferior a las 2.500 ptas. Por el contrario, la misma cuasivarianza muestral estimada, pero a partir de una muestra de sólo 25 comensales, conduciría a no rechazar la hipótesis nula.

10.5. CONTRASTE SOBRE LA VARIANZA DE UNA POBLACIÓN NORMAL

Para contrastar una hipótesis acerca de la varianza de una población Normal, $N(\mu,\sigma^2)$ se utiliza el hecho de que en dicha distribución de probabilidad se tiene:

$$(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Esta distribución de la cuasivarianza muestral, adecuadamente normalizada, no depende de que la esperanza matemática de la población Normal sea conocida, por lo que para llevar a cabo este contraste de hipótesis no es preciso conocer μ. Sin embargo, este contraste es algo más delicado que los anteriores, debido a que la distribución chi-cuadrado no es simétrica; en consecuencia, no obtenemos umbrales o valores críticos simétricamente repartidos en torno al estadístico utilizado para el contraste, como ha ocurrido en todos los contrastes analizados hasta ahora. El procedimiento que se sigue con la distribución chi-cuadrado es el mismo que utilizamos para construir intervalos de confianza: fijado un nivel de significación α, consideramos los umbrales que dejan una probabilidad $\alpha/2$ *a su derecha e izquierda*, respectivamente:

$$P\left(\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2} \leqslant \chi^2_{n-1,\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2} \qquad P\left(\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2} \geqslant \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

y ambos tramos, el intervalo a la izquierda de $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$, y el intervalo a la derecha de $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$, constituyen la *región crítica* de este contraste. Como siempre, para obtener la región crítica, utilizamos la distribución de probabilidad que se obtiene bajo la hipótesis nula.

Nótese la lógica de este contraste: el estadístico que se utiliza es el cociente entre la cuasivarianza muestral, y el valor de la varianza contenido en la hipótesis nula. Si ésta es cierta, dicho cociente no será muy distinto de 1. En el estadístico, el cociente queda multiplicado por el número de grados de libertad: si H_0 es cierta, el cociente citado tenderá a ser más próximo a 1 cuanto mayor sea el tamaño muestral. Este posible sesgo hacia no rechazar la hipótesis nula queda corregido mediante el producto por $n-1$. Si H_0 no es cierta, entonces el cociente será o bien significativamente superior a 1, si el verdadero valor de σ^2 excede de σ_0^2, o significativamente inferior a 1, en caso contrario. Será positivo, en cualquier caso, y así lo es la distribución chi-cuadrado, a diferencia de las distribuciones Normal o t.

Ejemplo 10.2. Supongamos que se quiere contrastar que el tipo de cambio peseta/marco alemán se ha hecho más volátil en el último mes que en el mes anterior, en el que su varianza fue de 64,25. Para ello, tomamos las cotizaciones de los 20 días en que ha estado abierto el mercado de cambios este mes, y obtenemos una cotización media de 81,42 y una cuasivarianza muestral de: $s = 87{,}47$. Con este tamaño muestral, el número de grados de libertad de la distribución chi-cuadrado correspondiente es 19, por lo que si fijamos un nivel de significación del 5 %, tenemos:

$$P(\chi^2_{19:0,025} \leqslant 8,91) = 0,025 \qquad P(\chi^2_{19:0,975} \geqslant 32,85) = 0,025$$

por lo que el intervalo a la izquierda de 8,95, junto con el intervalo a la derecha de 32,85, forman la región crítica de este contraste. Tenemos la región crítica definida por los dos tramos:

$$0,025 = P\left(\frac{(19)\,s^2}{64,25} \leqslant 8,91\right) = P\left(s^2 \leqslant \frac{(8,91)(64,25)}{19} = 30,1\dot{3}\right)$$

$$0,025 = P\left(\frac{(19)\,s^2}{64,25} \geqslant 32,85\right) = P\left(s^2 \geqslant \frac{(32,85)(64,25)}{19} = 111,08\right)$$

Como la cuasivarianza muestral estimada 87,47, no cae dentro de la región crítica, no rechazamos la hipótesis nula de que la volatilidad del tipo de cambio este mes ha sido similar a la del mes pasado.

Ahora bien, si la motivación para el contraste reside en el temor a que la volatilidad haya aumentado, deberíamos efectuar un contraste de una sola cola, buscando evidencia en el sentido de un cociente s^2/σ_0^2 grande, donde $\sigma_0^2 = 64,25$. En tal caso, la región crítica sería:

$$0,05 = P\left(\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2} \geqslant \chi^2_{19:0.05}\right) = P\left(s^2 \geqslant \frac{(30,14)(64.25)}{19} = 101,92\right)$$

y tampoco rechazamos H_0.

El contraste de hipótesis puede llevarse a cabo asimismo calculando el valor numérico del estadístico chi-cuadrado, y comparándolo con los valores críticos o umbrales de la correspondiente distribución de probabilidad. En este ejemplo, el valor numérico del estadístico es:

$$\chi^2_{19} = \frac{(19)(87,47)}{64,25} = 25,87$$

que no es inferior a 8,91, ni superior a 32,85, que son los umbrales que definen la región crítica al nivel de significación del 5 %, con 19 grados de libertad, para el contraste de dos colas. Para el contraste de una sola cola se procedería de modo análogo.

El valor p sería la probabilidad de obtener un valor del estadístico igual o superior a 25,87, es decir:

$$\text{Valor } p = P(\chi^2_{19} \geqslant 25,87) = 1 - 0,832 = 0,168$$

por lo que no rechazaríamos [1] H_0 a los niveles de significación más habituales: 1 %, 5 % o 10 %.

[1] La probabilidad de 0,832 se ha obtenido mediante una interpolación lineal de las probabilidades en la tabla de la distribución chi-cuadrado.

10.6. REGIONES CRÍTICAS ÓPTIMAS

En las secciones anteriores se ha podido apreciar una gran afinidad entre los procedimientos de llevar a cabo contrastes de hipótesis simples, y la elaboración de intervalos de confianza. En efecto, aunque la resolución de los contrastes se ha efectuado mediante la construcción de una *región crítica*, aquella que, de incluir el valor del estadístico utilizado conduciría a rechazar H_0, en realidad, ésta no es sino el complemento de un intervalo de confianza para el parámetro desconocido. La analogía es total en el caso de contrastes de dos colas, si bien los contrastes de una cola ya no se prestan a esta comparación.

En las secciones restantes presentamos un enfoque diferente de la contrastación de hipótesis, primero para el caso de hipótesis nulas simples frente a hipótesis alternativas asimismo simples, y en la sección siguiente, para hipótesis cualesquiera, tanto simples como compuestas.

Presentamos en esta sección un resultado importante, el teorema de Neyman-Pearson, que permite construir regiones críticas *óptimas*, en un cierto sentido que definiremos enseguida. para el caso de un contraste de hipótesis nula simple frente a hipótesis alternativa simple. Aunque resuelve sólo este caso, nos será también de utilidad cuando, posteriormente, analicemos contrastes de hipótesis más generales.

Definición 10.1. Sea RC una región crítica, de nivel de significación a, de un determinado contraste de la hipótesis nula simple: H_0: $\theta = \theta_1$, frente a la hipótesis alternativa, también simple: H_1: $\theta = \theta_1$. Se tiene, por tanto: $a = P(RC/\theta = \theta_0)$. Se dice que RC es una *región crítica óptima* de tamaño a, si para cualquier otra región crítica RC' de tamaño $a = P(RC'/\theta = \theta_0)$, se tiene:

$$P(RC/\theta_1) \geqslant P(RC'/\theta_1)$$

esto es, RC es *óptima* si, supuesto que la hipótesis alternativa fuese cierta, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula (algo que querríamos hacer) utilizando la región RC es al menos tan grande como la probabilidad análoga utilizando cualquier otra región crítica de tamaño a. RC es entonces *la región crítica más potente, de nivel de significación a.*

Teorema 10.1 (de Neyman-Pearson). Sea $L(\theta/x_1, x_2, ..., x_n)$ la función de verosimilitud dada una muestra aleatoria simple $x_1, x_2, ..., x_n$ extraída de una población con función de densidad $f(x/\theta)$, y sean θ_0 y θ_1 dos valores posibles del parámetro θ. Si existe una constante positiva λ y una partición del espacio muestral en dos subespacios RC y RC' tales que:

1) $P(x_1, x_2, ..., x_n \in RC/\theta_0) = a$

2) $$\frac{L(\theta_0/x_1, x_2, ..., x_n)}{L(\theta_1/x_1, x_2, ..., x_n))} \leqslant \lambda \qquad \text{cuando } (x_1, x_2, ..., x_n) \in RC$$

3) $$\frac{L(\theta_0/x_1, x_2, ..., x_n)}{L(\theta_1/x_1, x_2, ..., x_n))} \geqslant \lambda \qquad \text{cuando } (x_1, x_2, ..., x_n) \in RC'$$

entonces RC es una región crítica óptima de tamaño a para el contraste de la hipótesis nula simple: H_0: $\theta = \theta_0$ frente a la alternativa simple: H_1: $\theta = \theta_1$.

La primera condición simplemente dice que RC tiene, efectivamente, tamaño α. La segunda afirma que RC consta de aquellos puntos del espacio muestral que son *relativamente* más probables bajo el valor paramétrico contenido en H_1, mientras que la tercera condición afirma que RC', que es el complemento de la región crítica RC, está formada por los puntos *relativamente* más probables bajo el valor paramétrico contenido en H_0.

Ejemplo 10.3. Supongamos que hemos extraído una muestra aleatoria simple de tamaño n de una población Normal (μ, 25). Vamos a hallar la región crítica óptima para el contraste de la hipótesis H_0: $\mu = 10$ frente a la alternativa: H_1: $\mu = 15$. Para ello, utilizaremos el cociente de verosimilitudes: $L(10)/L(15)$, y trataremos de encontrar los puntos del espacio muestral para los que este cociente es igual o menor a una cierta constante λ. Para ello consideramos la desigualdad:

$$\frac{L(10)}{L(15)} = \frac{(50\pi)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 10)^2\right)}{(50\pi)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 15)^2\right)} = \exp\left(-\frac{1}{50}\left(10\sum_{i=1}^{n}x_i - 125n\right)\right) \leqslant \lambda$$

y tomando logaritmos en ambos miembros, tenemos la desigualdad equivalente:

$$-10\sum_{i=1}^{n}x_i + 125n \leqslant 50(\ln\lambda)$$

es decir:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \geqslant 125 - \frac{50}{n}\ln\lambda$$

que conduce a rechazar la hipótesis nula si la media muestral excede de una determinada constante, es decir, que la región crítica óptima para ese contraste es de la forma: *Rechazar H_0 si $\bar{x} \geqslant k$ para una determinada constante.* La constante k se escoge de modo que el tamaño del contraste sea α. Si, por ejemplo, $n = 100$, y $k = 10{,}75$, se tiene un tamaño:

$$\alpha = P(\bar{x} \geqslant 10{,}75/\mu = 10) = P\left(\frac{\bar{x} - 10}{\sqrt{25/100}} \geqslant \frac{10{,}75 - 10}{\sqrt{25/100}}\right) = 1 - \Phi(1{,}5) = 0{,}067$$

Alternativamente, si queremos que el tamaño tome un valor concreto, por ejemplo, $\alpha = 0{,}10$, entonces podemos escoger k convenientemente:

$$0{,}10 = 1 - \Phi(1{,}285) = P(\bar{x} \geqslant k/\mu = 10) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{x} - 10}{\sqrt{25/100}} \geqslant \frac{k - 10}{\sqrt{25/100}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{k - 10}{0{,}5}\right)$$

que implica:

$$\frac{k - 10}{0,5} = 1,285 \Rightarrow k = 10,643$$

Este ejemplo ilustra que el teorema de Neyman-Pearson proporciona *la forma* que tiene una región crítica óptima para el contraste de una hipótesis nula simple frente a alternativa también simple. Ello es equivalente a disponer de una *estrategia* para la resolución del contraste, como por ejemplo: *rechazar* H_0 *si la media muestral es elevada.* Posteriormente, el investigador determina con precisión, en su aplicación específica, lo que se entiende por *suficientemente elevada.*

En el ejemplo anterior, el Teorema nos ha proporcionado directamente una región en una cola de la distribución, resultado al que ya llegamos en la Sección 10.3 tras una breve argumentación.

Ejemplo 10.4. Consideremos el contraste de la hipótesis: H_0: $\lambda = 1$ frente a $\lambda = 2$ en una distribución de Poisson. A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño n, tenemos:

$$\frac{L(1)}{L(2)} = \frac{1^{\Sigma x_i} e^{-n}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i!}{2^{\Sigma x_i} e^{-2n}} = \frac{e^n}{2^{\Sigma x_i}} \leqslant k$$

y, tomando logaritmos en la última desigualdad:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln 2 \geqslant n - \ln k$$

es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \frac{n - \ln k}{\ln 2} = c$$

que sugiere rechazar la hipótesis nula cuando la suma de los elementos muestrales sea *suficientemente grande.* Es razonable, puesto que el valor del parámetro λ bajo H_1 es mayor que bajo H_0, y λ es la esperanza matemática de la distribución [2].

Si el tamaño muestral es $n = 8$, entonces, la suma de los elementos muestrales, todos ellos variables de Poisson con parámetro λ, independientes entre sí, sigue una distribución también de Poisson, con parámetro 8λ. Bajo la hipótesis nula, la suma de los 8 elementos muestrales

[2] También es la varianza, por lo que cabría construir un contraste basado tanto en la suma de los elementos muestrales como en la suma de sus cuadrados.

será Poisson con $\lambda = 8$. Si fijamos un nivel de significación del 10 %, tendríamos, de las tablas de la distribución de Poisson que, para $\lambda = 8$:

$$P\left(\sum_{i=1}^{8} x_i \leqslant 11\right) = 0{,}888; \qquad P\left(\sum_{i=1}^{8} x_i \leqslant 12\right) = 0{,}936;$$

sin poder encontrar un valor numérico exacto que corresponda a una probabilidad de 0,90, por el hecho de ser la distribución Poisson de tipo discreto. Ahora bien, si queremos garantizar un nivel de significación del 10 %, hemos de tomar 11 como umbral máximo permitido, bajo H_0, para la suma de los elementos muestrales, puesto que de este modo:

$$\alpha = P(\text{Rechazar } H_0/H_0 \text{ cierta}) = P\left(\sum_{i=1}^{8} x_i > 11 \Big/ \sum_{i=1}^{8} x_i \text{ es Poisson (8)}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{8} x_i \leqslant 11 \Big/ \sum_{i=1}^{8} x_i \text{ es Poisson (8)}\right) = 1 - 0{,}888 = 0{,}112$$

La región crítica óptima para el contraste de hipótesis nula simple frente a alternativa simple, es aquella región a la que θ_1 asigna una mayor probabilidad, de entre todas las regiones muestrales con nivel de significación α. En consecuencia, el contraste que utiliza una región crítica óptima tiene la propiedad de que su función de potencia alcanza en $\theta = \theta_1$ el máximo valor de entre las funciones de potencia de todos los contrastes de tamaño α. Por eso, un contraste que utiliza una región crítica óptima se denomina *contraste de máxima potencia y tamaño α*. Si H_1 es una hipótesis compuesta, entonces la potencia de un contraste depende de cada alternativa simple contenida en H_1, y ya no es obvio como escoger una región crítica que maximice la potencia, en algún sentido. Por ello, damos la siguiente definición:

> **Definición 10.2.** Un contraste, definido por una región crítica RC de tamaño α es un contraste *uniformemente de máxima potencia*, si es un contraste de máxima potencia frente a cada alternativa puntual contenida en H_1. La región crítica RC se denomina entonces *región crítica uniformemente de máxima potencia, de tamaño α*.

Volviendo al contraste acerca de la esperanza matemática de una distribución Normal con varianza conocida, supongamos ahora que la hipótesis alternativa fuese: H_1: $\mu > 10$, *y consideremos un valor genérico* μ_1 contenido en H_1. Tendríamos el cociente de valores de la función de verosimilitud:

$$\frac{L(10)}{L(15)} = \frac{(50\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 10)^2\right)}{(50\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2\right)} =$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{50}\left(2(\mu_1 - 10)\sum_{i=1}^{n} x_i + n(100 - \mu_1^2)\right)\right] \leqslant k$$

y tomando logaritmos en la desigualdad, tenemos que ésta se cumple si y sólo si:

$$\bar{x} \geqslant \frac{10 + \mu_1}{2} - \frac{50 \ln k}{2n(\mu_1 - 10)} = c$$

sugiere rechazar H_0 si la media muestral es *suficientemente grande*. Ahora, fijado un nivel de significación α, determinaríamos de las tablas de la distribución Normal el valor de la constante c de modo que, bajo H_0, la probabilidad de rechazar sea igual a α. Por ejemplo, si se quiere $\alpha = 0{,}05$, se tiene nuevamente: $c = 10{,}643$. Este cálculo no depende del valor numérico que se considere bajo la hipótesis alternativa. Por tanto, el valor escogido para la constante c proporciona un nivel de significación deseado α, con independencia del verdadero valor que μ pudiese tomar en caso de ser H_0 falsa. Ya sabemos que la función de potencia del contraste que así resulta dependerá, por supuesto del valor numérico μ_1, pero no así la región crítica, que existe y es única, con independencia de μ_1. El contraste anterior es, por tanto, *uniformemente de máxima potencia, de tamaño* α. Sin embargo, tal contraste no siempre existe.

10.7. CONTRASTES DE RAZÓN DE VEROSIMILITUDES

Presentamos en esta sección un procedimiento general para el contraste de hipótesis cuando tanto la hipótesis nula como la alternativa pueden ser de tipo *compuesto*. No siempre es sencillo o, incluso, posible, encontrar una solución analítica a un contraste tan general, habiendo de resolverse numéricamente, pero es una metodología para el contraste de hipótesis que es de enorme utilidad en trabajos econométricos.

Si denotamos por Ω al espacio paramétrico total, supongamos que la hipótesis nula especifica que el verdadero valor del parámetro (o parámetros) sobre el que se contrasta, está contenido en una región Θ de Ω, y consideramos la partición natural: $\Omega = \Theta \cup \Theta^C$. Queremos contrastar:

$$H_0\!: \theta \in \Theta \quad \textit{frente a:} \quad H_1\!: \theta \in \Theta^C$$

donde la hipótesis nula especifica, simplemente, que el verdadero valor del parámetro desconocido no está en Θ.

El método de contrastación que vamos a proponer es una generalización del resultado de Neyman-Pearson que antes analizamos para el caso de alternativas simples.

Definición 10.3. La *razón de verosimilitudes* es el cociente:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\Theta})}{L(\hat{\Omega})}$$

donde $L(\hat{\Theta})$ denota el *valor máximo* de la función de verosimilitud entre los que toma en los puntos considerados *bajo la hipótesis nula*, mientras que $L(\hat{\Omega})$ denota el *valor máximo* de la función de verosimilitud cuando θ toma valores en todo Ω.

Es fácil comprender las razones por las que la razón de verosimilitudes puede ayudar a resolver este tipo de contrastes generales, pues no son muy diferentes de las que ya nos llevaron a utilizarlo en el caso de hipótesis simples, en el Teorema de Neyman-Pearson. En primer lugar, el cociente es siempre positivo. Además, puesto que Θ es una región contenida en Ω entonces se tiene necesariamente: $L(\Theta) \leqslant L(\Omega)$, puesto que el punto de la región Θ que maximiza la verosimilitud, también está contenido en Ω. Por tanto, dicho punto es alcanzable al tratar de maximizar la verosimilitud en todo el espacio Ω. El valor máximo que se alcance no puede ser inferior a $L(\Theta)$. En consecuencia, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Cuanto más se acerque a 0, menos verosímil es Θ a la luz de la información muestral, mientras que cuanto más se acerque a 1, más verosímil es. La región crítica reviste la forma: *Rechazar H_0 si la razón de verosimilitudes λ es suficientemente reducida*, y motiva la siguiente definición:

Definición 10.4. Para contrastar H_0: $\theta \in \Omega$ frente a la alternativa H_0: $\theta \notin \Omega$, *la región crítica del contraste de razón de verosimilitudes* está formado por el conjunto de puntos del espacio muestral para los cuales:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \leqslant k$$

donde $0 < k < 1$, y k se escoge de modo que el contraste tenga el nivel de significación deseado, a.

Como ejemplo, consideremos nuevamente el contraste de hipótesis acerca de la esperanza matemática de una Normal de varianza σ^2 conocida, $\sigma^2 = 50$, por ejemplo, con hipótesis nula simple H_0: $\mu = \mu_0$, frente a la alternativa compuesta: H_1: $\mu \neq \mu_0$. En este caso:

$$\Theta = \{\mu_0\} \qquad \Omega = \{\mu;\ -\infty < \mu < \infty\}$$

Dado que la hipótesis nula es simple, entonces, si ésta es cierta, la función de verosimilitud sólo puede tomar un valor, aquél que alcanza en $\mu = \mu_0$, $L(\mu_0)$. Por tanto, ése es su valor máximo en Θ.

Por otra parte, hallar su valor máximo en el espacio paramétrico global, Ω, equivale a encontrar el estimador de máxima verosimilitud de μ, que ya sabemos que es la media aritmética. Por tanto: $L(\Omega) = L(\bar{x})$. La razón de verosimilitudes es:

$$\frac{L(\mu_0)}{L(\bar{x})} = \frac{(50\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2 \right)}{(50\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right)} =$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{50}\left(-2\mu_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_0^2 - n\bar{x}^2 + 2\bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i) \right) \right] =$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{50} (-2\mu_0 n\bar{x} + n\bar{x}^2 + n\mu_0^2) \right] = \exp\left(-\frac{n}{50} (\bar{x} - \mu_0)^2 \right) \leqslant k$$

lo que ocurre cuando la media muestral, pudiendo ser inferior o superior a μ_0, no se aleja mucho de este valor numérico. En tal caso, la función exponencial será relativamente grande, y la muestra no estará proporcionando evidencia en contra de la hipótesis nula. Cuando la media muestral se aleje *suficientemente*, por encima o por debajo, de μ_0, ocurrirá lo contrario.

Todo lo que resta, aunque no es inmediato, es hallar el valor numérico de la constante k de modo que el contraste tenga el nivel de significación deseado. En este caso, se cumple la desigualdad anterior si y sólo si:

$$(\bar{x} - \mu_0)^2 \geqslant -\frac{50}{n} \ln k$$

donde no debe olvidarse que el logaritmo de k puede ser negativo. Esta desigualdad, a su vez, se satisface si y sólo si:

$$\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geqslant \frac{\sqrt{-(50/n)\ln k}}{\sigma/\sqrt{n}} = c$$

pero la variable de la izquierda es $N(0,1)$. Es fácil ver que, para alcanzar un nivel de significación del 0,05, por ejemplo, debe escogerse: $c = 1{,}96$, lo que demuestra que el procedimiento que propusimos en la Sección 10.4 es *el contraste de la razón de verosimilitudes* para el contraste de la hipótesis H_0: $\mu = \mu_0$, frente a la alternativa compuesta: H_1: $\mu \neq \mu_0$, en una población $N(\mu,\sigma^2)$, con σ conocida.

10.8. EL PROBLEMA DE DOS MUESTRAS

Denominamos problemas de dos muestras aquellas situaciones en las que el investigador quiere contrastar hipótesis acerca de los valores numéricos que toman parámetros de dos poblaciones distintas. Esto los distingue de los problemas analizados en capítulos previos, en los que las hipótesis que se contrastaban se referían a parámetros de una sola población.

Muy frecuentemente, el problema que interesa a un investigador no sólo es el de estimar un parámetro poblacional, sino contrastar que su valor numérico es el mismo en dos muestras de las que se dispone. Hemos mencionado en capítulos anteriores ejemplos como el de contrastar si la altura media de hombres y mujeres es la misma en una determinada población, o si la presión sanguínea de personas que han sido sometidas a un determinado tratamiento es la misma que la de personas que no han sido sometidas al mismo. En economía, los ejemplos son continuos: podemos estar interesados en contrastar si un determinado grupo poblacional tiene mayor renta que otro, o si sus dispersiones son diferentes, lo que podría indicar una mayor desigualdad. Asimismo, podríamos querer contrastar si los salarios de grupos profesionales de hombres y mujeres de similar ocupación son iguales, pues lo contrario podría aportar evidencia de discriminación. Como un ejemplo adicional, nos puede interesar contrastar si las empresas de propiedad pública son tan eficientes, en el sentido de la rentabilidad obtenida por unidad de activo, como las empresas de propiedad privada, etc.

En los ejemplos citados, el investigador haría algún supuesto acerca del tipo de distribución que sigue la variable objeto de estudio (altura, renta, salario,etc.), por ejemplo Normal (μ,σ^2), y querrá contrastar la igualdad de parámetros en ambas poblacionales. Si está interesado en la igualdad de parámetros[3] de localización, como la esperanza matemática, querrá contrastar la hipótesis nula: H_0: $\mu_1 = \mu_2$, frente a una hipótesis alternativa, que puede ser del tipo: H_1: $\mu_1 < \mu_2$ si hay razones para esperar a priori que, de no ser iguales, una de ellas será superior a la otra, o simplemente: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$, si tal información no existe. El primer *contraste será de una cola*, siendo *contrastes de dos colas* en el segundo caso. El caso de la posible discriminación salarial, o el de igualdad de alturas entre hombres y mujeres, son ejemplos de contrastes de una cola.

Si se quiere contrastar la igualdad de varianzas, estableceremos hipótesis nulas del tipo: H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, frente a: H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, si el contraste es de dos colas.

El método utilizado para efectuar estos contrastes de hipótesis entre parámetros de dos poblaciones distintas es similar al utilizado en contrastes acerca de parámetros de una sola población: construimos un intervalo de confianza, en este caso para la diferencia de esperanzas matemáticas: $\mu_1 - \mu_2$, o para el cociente de varianzas, según proceda, y comprobamos si el valor muestral del estadístico correspondiente cae dentro del intervalo, en cuyo caso, no rechazamos la hipótesis nula, o fuera del mismo, en cuyo caso rechazamos la hipótesis nula, a los niveles de confianza y significación que hayamos utilizado para construir el intervalo.

10.9. CONTRASTES DE IGUALDAD DE ESPERANZAS EN POBLACIONES NORMALES

10.9.1. Varianzas conocidas

Dadas dos poblaciones Normales independientes:

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad ; \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

de las que extraemos muestras aleatorias simples, de tamaños n y m: $\mathbf{X} = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ e $\mathbf{Y} = \{(y_1, y_2, ..., y_m)\}$. Sabemos que las medias muestrales respectivas se distribuyen:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right) \quad ; \quad \bar{y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$$

por lo que la diferencia de ambas se distribuye [Teorema 8.9]:

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N\left[(\mu_X - \mu_Y), \left(\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)\right]$$

En consecuencia:

$$Z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

[3] También puede estar interesado en contrastar si las distribuciones de ambas poblaciones son iguales, lo que será objeto de análisis en el Capítulo 12.

y el contraste puede resolverse utilizando las tablas de la distribución $N(0,1)$. En particular, si la hipótesis que se pretende contrastar es la de igualdad de esperanzas matemáticas: H_0: $\mu_X = \mu_Y$, el intervalo de confianza del 95 % es:

$$0{,}95 = P\left((\bar{x} - \bar{y}) - 1{,}96\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \leqslant \mu_X - \mu_Y \leqslant (\bar{x} - \bar{y}) + 1{,}96\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \right)$$

y si el valor de la diferencia $\mu_X - \mu_Y$ bajo la hipótesis nula, que es cero, cae dentro del intervalo, no rechazamos H_0, rechazándola en caso contrario.

Ejemplo 10.5. Supongamos que hemos extraído una muestra de 64 observaciones de una población Normal con esperanza desconocida y varianza $\sigma_X^2 = 1.600$, y también una muestra de 144 observaciones de una segunda población Normal, de esperanza desconocida, y varianza 2.304. La media de la primera muestra ha sido de 247,42, siendo la media de la segunda muestra de 258,22. Queremos contrastar, con base en esta información muestral la hipótesis nula de igualdad de esperanzas matemáticas en ambas poblaciones.

Tenemos los cocientes: $\sigma_X^2/n = 1.600/64 = 25$, y $\sigma_Y^2/m = 2.304/144 = 16$, y la raíz cuadrada de su suma, 41, es igual a 6,403. Por otra parte, la diferencia de medias muestrales es de $-10{,}80$. El intervalo de confianza del 95% es, en este caso:

$$(-10{,}80 - (1{,}96)(6{,}403) < \mu_X - \mu_Y < -10{,}80 + (1{,}96)(6{,}403) = P(-23{,}35 < \mu_X - \mu_Y < 1{,}75)$$

Como el valor teórico de la diferencia $\mu_X - \mu_Y$ bajo H_0, que es cero, está dentro del intervalo, no rechazamos la igualdad de esperanzas matemáticas.

10.9.2. Varianzas desconocidas

La situación anterior no es, sin embargo, la de mayor relevancia práctica, por cuanto que es difícil pensar que el investigador conocerá los valores numéricos de las varianzas de las dos poblaciones, desconociendo sus esperanzas matemáticas. Sin embargo, es suficientemente ilustrativo para presentar los casos más generales que siguen. Comencemos recordando el resultado del Teorema 8.20:

Teorema 10.2. Sean $\mathbf{X} = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ e $\mathbf{Y} = \{(y_1, y_2, ..., y_m)\}$ dos muestras independientes extraídas de dos poblaciones Normales de *igual varianza*, desconocida, σ^2: $N(\mu_X, \sigma^2)$ y $N(\mu_Y, \sigma^2)$, con cuasivarianzas muestrales: s_X^2 y s_Y^2. Si denotamos por s^2 la cuasivarianza conjunta de ambas muestras:

$$s^2 = \frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n + m - 2}$$

entonces se tiene la distribución t de Student:

$$\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

lo que puede utilizarse para efectuar contrastes de hipótesis de modo análogo a los casos anteriores.

Ejemplo 10.6. Para contrastar la igualdad de salarios entre hombres y mujeres de igual ocupación, se toma una muestra de 60 mujeres, que arroja un salario medio de 1,04 mil ptas./hora, con: $\sum_{muj} x_i^2 = 80$, donde las x_i están en miles de ptas., así como una muestra de 120 hombres, con salario medio de 1,25 mil ptas./hora, con $\sum_{hom} x_i^2 = 200$. En primer lugar, deducimos que: $\sum_{muj} x_i = (60)(1{,}04) = 62{,}4$ y $\sum_{hom} x_i = (120)(1{,}25) = 150$. Las cuasivarianzas muestrales de ambos grupos son:

$$s_m^2 = \frac{60(80) - (62{,}4)^2}{60(59)} = 0{,}256 \qquad s_h^2 = \frac{120(200) - (150)^2}{120(119)} = 0{,}105$$

de modo que:

$$s^2 = \frac{(59)s_m^2 + (119)s_h^2}{n + m - 2} = \frac{15{,}10 + 12{,}50}{178} = 0{,}155 \quad \Rightarrow \quad s = 0{,}394$$

Finalmente, el intervalo de confianza del 95 % es:

$$\left[(\bar{x}_m - \bar{x}_h) - 1{,}96\left(0{,}394\sqrt{\frac{1}{120} + \frac{1}{60}}\right) \leqslant \mu_X - \mu_Y \leqslant (\bar{x} - \bar{x}_h) + 1{,}96\left(0{,}394\sqrt{\frac{1}{120} + \frac{1}{60}}\right)\right] =$$

$$= [-0{,}210 - 1{,}96(0{,}0618) \leqslant \mu_X - \mu_Y \leqslant -0{,}210 + 1{,}96(0{,}0618)] =$$

$$= P(-0{,}3311 \leqslant \mu_X - \mu_Y \leqslant -0{,}0889)$$

y como el valor teórico de la igualdad de esperanzas matemáticas, que es cero, no está dentro del intervalo, rechazamos la hipótesis nula de igualdad de salarios medios entre hombres y mujeres.

En realidad, como es muy probable que el investigador esté llevando a cabo este contraste porque crea, a priori, que el salario de los hombres sea superior al de las mujeres, deberíamos llevar a cabo un contraste de una cola, mediante la región crítica:

$$\left[\bar{x}_m - \bar{x}_h < -1{,}65\left(0{,}394\sqrt{\frac{1}{60} + \frac{1}{120}}\right)\right] = [\bar{x}_m - \bar{x}_h < -(1{,}65)(0{,}0618)] = (\bar{x}_m - \bar{x}_h < -0{,}102)$$

como la diferencia entre las medias muestrales es de 0,21, cae dentro de tal región crítica, rechazamos la hipótesis nula de igualdad de salarios entre hombres y mujeres.

Aunque pueda parecer increíble, el problema de contrastar la igualdad de esperanzas matemáticas de dos poblaciones Normales con varianzas desconocidas pero diferentes, es de muchísima más complejidad, y no tiene una solución totalmente general, por lo que no lo consideramos aquí.

Se ha propuesto en la literatura un enfoque interesante, similar al de la Sección 9.4, se basa en suponer un valor numérico k para el cociente de las dos varianzas: $\sigma_Y^2 = k\sigma_X^2$, lo que conduce al estadístico:

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{s(k)\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{k}{m}}} \sim t(k)_{n+m-2}$$

donde:

$$s^2(k) = \frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2/k}{n+m-2}$$

Esta sugerencia de contraste no debe interpretarse en el sentido de que el investigador tenga conocimiento a priori acerca de los valores relativos de las varianzas poblacionales, que son desconocidas, sino que, efectuándose para distintos valores de k pueda producir resultados robustos. Así, por ejemplo, si para cualquier valor de k que pueda considerarse en el estadístico anterior, el contraste conduce a rechazar la hipótesis nula, podremos tomar tal decisión con bastante garantía, y lo mismo ocurriría si condujese sistemáticamente a no rechazar H_0. La ambigüedad surge cuando el valor numérico del estadístico $t(k)$ y, con él, el resultado del contraste, depende bastante del valor de k. En tal caso, será necesario establecer alguna afirmación acerca del rango de valores del ratio de varianzas para poder alcanzar alguna conclusión acerca de la validez de H_0, la hipótesis nula de igualdad de esperanzas matemáticas.

10.10. CONTRASTE DE IGUALDAD DE PROPORCIONES

El caso más frecuente de contrastación paramétrica entre dos poblaciones discretas es el contraste de igualdad de proporciones, es decir, de parámetros p en poblaciones binomiales. Supongamos que en dos muestras aleatorias simples, extraídas de modo independiente de dos poblaciones Bernouilli de parámetros p_X y p_Y, de tamaños respectivos n y m, se han obtenido x e y éxitos, respectivamente.

Supongamos que queremos contrastar la hipótesis nula: H_1: $p_X = p_Y$ frente a: H_1: $p_X \neq p_Y$ al nivel de significación α. Apelando al Teorema Central del Límite, el cociente:

$$\frac{\dfrac{x}{n}-\dfrac{y}{m}-E\left(\dfrac{x}{n}-\dfrac{y}{m}\right)}{\sqrt{Var\left(\dfrac{x}{n}-\dfrac{y}{m}\right)}} \qquad (10.2)$$

sigue una distribución aproximadamente $N(0,1)$.

Ahora bien, bajo la hipótesis nula H_0, se tiene:

$$E\left(\frac{x}{n} - \frac{y}{m}\right) = p_X - p_Y = 0$$

y, puesto que las muestras son independientes y que, bajo H_0, las dos proporciones son iguales, tenemos:

$$Var\left(\frac{x}{n} - \frac{y}{m}\right) = Var\left(\frac{x}{n}\right) + Var\left(\frac{y}{m}\right) = \frac{p(1-p)}{n} + \frac{p(1-p)}{m} = \frac{(n+m)p(1-p)}{nm}$$

Sustituyendo ambas expresiones en (10.2), podemos concluir que:

$$\frac{\dfrac{x}{n} - \dfrac{y}{m}}{\sqrt{\dfrac{(n+m)p(1-p)}{nm}}}$$

se distribuye aproximadamente como una $N(0,1)$. Sin embargo, no podemos todavía utilizar este estadístico, puesto que depende del parámetro desconocido, p. Debemos sustituirlo por un estimador suyo. En este caso, utilizamos el estimador de máxima verosimilitud, que es, bajo la hipótesis nula: H_0: $p_X = p_Y$:

$$\hat{p}_{MV} = \frac{x+y}{n+m}$$

para obtener la región crítica:

$$Rechazar\ H_0\ \text{si:}\ \frac{\dfrac{x}{n} - \dfrac{y}{m}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{x+y}{n+m}\left(1 - \dfrac{x+y}{n+m}\right)(n+m)}{nm}}} \leqslant -z_{\alpha/2} \quad \text{o} \quad \geqslant z_{\alpha/2}$$

Ejemplo 10.7. Una entidad de crédito quiere saber si el porcentaje de créditos fallidos es el mismo en los créditos hipotecarios que en los créditos para el consumo. Para ello, selecciona aleatoriamente 100 créditos al consumo, entre los que encuentra 8 fallidos, mientras que encuentra 3 fallidos en una muestra de 60 créditos concedidos para compra de vivienda.

La estimación de máxima verosimilitud del porcentaje de fallidos, bajo H_0, es decir, bajo el supuesto de que ambos porcentajes son iguales, es:

$$\hat{p}_{MV} = \frac{8+3}{100+60} = 0{,}06875$$

por lo que el valor numérico del estadístico es:

$$\frac{\frac{8}{100}-\frac{3}{60}}{\sqrt{\frac{\hat{p}_{MV}(1-\hat{p}_{MV})(100+60)}{(100)(60)}}}=\frac{0{,}08-0{,}05}{\sqrt{\frac{(0{,}06875)(0{,}93125)160}{6000}}}=\frac{0{,}03}{\sqrt{0{,}0017}}=0{,}73$$

que es muy inferior a 1,96, el valor crítico de la $N(0,1)$ al nivel de confianza del 95 %. En consecuencia, no rechazamos la hipótesis nula de que el porcentaje de fallidos es el mismo en ambos tipos de crédito. La entidad financiera debería interpretarlo en el sentido de que la probabilidad de tener un fallido es el mismo para ambos tipos de crédito. Por supuesto, la entidad no ha tomado en consideración la posibilidad de que la probabilidad de fallido pueda depender del volumen concedido u otros factores, lo que precisaría de una análisis más complejo que el que aquí hemos efectuado.

10.11. CONTRASTE DE IGUALDAD DE VARIANZAS

En ocasiones, el investigador está interesado en contrastar que dos poblaciones tienen igual variabilidad, con independencia de que posean o no igual esperanza matemática, es decir: H_0: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, frente a la alternativa: H_1: $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$. Para ello, contaremos con dos muestras aleatorias simples, independientes, de tamaños n y m, extraídas de las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias X e Y. Suponemos que: $X \sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$, y que tanto las esperanzas matemáticas μ_X, μ_Y como las varianzas σ_X^2, σ_Y^2, son desconocidas.

Una razón habitual que motiva la realización de un contraste de igualdad de varianzas es el comentario que antes hicimos en la Sección 10.9.2 acerca de la disponibilidad de un test de igualdad de esperanzas matemáticas bajo el supuesto de que las varianzas de ambas poblaciones, desconocidas, son iguales entre sí. Por tanto, procede contrastar la igualdad de varianzas previamente a la aplicación del contraste de igualdad de esperanzas matemáticas que discutimos en dicha Sección.

Siguiendo un razonamiento similar, aunque algo más complejo, al que utilizamos en el caso del contraste de hipótesis acerca de la varianza de una población Normal, puede demostrarse que:

Teorema 10.3. Sean $\boldsymbol{X} = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ e $\boldsymbol{Y} = \{(y_1, y_2, ..., y_m)\}$ muestras aleatorias simples, independientes entre sí, extraídas de poblaciones $X \sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$. El contraste de razón de verosimilitudes para la hipótesis nula: H_0: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, frente a la alternativa: H_1: $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$, al nivel de significación α, consiste en rechazar H_0 si:

$$\frac{s_Y^2}{s_X^2} \leqslant F_{m-1,n-1,\alpha/2} \qquad \text{o} \qquad \frac{s_Y^2}{s_X^2} \geqslant F_{m-1,n-1,1-\alpha/2}$$

Ejemplo 10.8. Un investigador que está interesado en contrastar la igualdad en la distribución de renta entre las comunidades autónomas situadas geográficamente al Norte del país, y las situadas más al Sur, ha establecido los grupos que aparecen en el Cuadro 10.1:

Cuadro 10.1.

Comunidades del Norte		*Comunidades del Sur*	
Aragón	1.092	Andalucía	801
Asturias	1.002	Canarias	963
Baleares	1.402	Castilla-La Mancha	894
Cantabria	995	Comunidad Valenciana	1.040
Castilla y León	947	Extremadura	777
Cataluña	1.229	Madrid	1.184
Galicia	938	Murcia	883
Navarra	1.185	Ceuta y Melilla	1.046
País Vasco	1.108		
La Rioja	1.120		

El investigador quiere contrastar en primer lugar la igualdad de varianzas, para comprobar si está justificado utilizar el contraste de igualdad de esperanzas matemáticas que analizamos en la Sección 10.9. Para ello, obtiene:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 11.018 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 12.325.480; \qquad \bar{x} = 1101,8;$$

$$\sum_{j=1}^{8} y_i = 7.588 \qquad \sum_{j=1}^{8} y_i^2 = 7.329.196; \qquad \bar{y} = 948,5;$$

de modo que:

$$s_X^2 = \frac{10(12.325.480) - (11.018)^2}{10(9)} = 20.649,7$$

$$s_Y^2 = \frac{8(7.329.196) - (7.588)^2}{8(7)} = 18.854,0$$

por lo que el estadístico F es:

$$F = \frac{18.854,0}{20.649,7} = 0,913$$

mientras que calculado sobre las varianzas muestrales, el valor del estadístico es:

$$\text{Estadístico } F = \frac{16.497,3}{18.584,8} = 0,887$$

que está, en ambos casos, dentro del intervalo de confianza definido por los valores críticos de las tablas de la distribución F:

$$F_{7,9;0,025} = 0,21$$

$$F_{7,9;0,975} = 4,20$$

por lo que no rechazamos H_0, es decir, la igualdad de varianzas entre ambas distribuciones de renta *per cápita*.

A continuación, el investigador contrastaría la igualdad de renta *per cápita* media utilizando:

$$s = \sqrt{\frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2}} = \sqrt{\frac{9(20.649,7) + 7(18.854,0)}{7+9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{317.825,3}{16}} = \sqrt{19.864,1} = 140,94$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}} = \frac{1.101,8 - 948,5}{(140,94)(0,474)} = \frac{153,3}{66,81} = 2,29$$

que excede del valor crítico de la distribución t_{16}, que es 2,12, por lo que rechazámos la hipótesis nula de igualdad de renta media *condicional* en una igual varianza.

EJERCICIOS

10.1. Un alumno de la Facultad de Económicas de la U. Complutense tiene dos caminos alternativos para llegar a su casa: uno, cruzando Madrid, en el que invierte, en término medio, 33 minutos, y otro, sin entrar en la ciudad, en la que tarda en media 35 minutos. Las desviaciones típicas obtenidas, al igual que las medias, tras muchos días de probar ambas alternativas, son de 6 y 5 minutos respectivamente. Suponiendo que los tiempos invertidos en cada trayecto siguen una distribución Normal, calcular la probabilidad de que en un determinado día, atravesar Madrid sea la alternativa más rápida.

10.2. El consejo de administración de la sociedad propietaria de un determinado equipo de fútbol ha decidido suspender la venta de bebidas alcohólicas en su estadio, con el objeto de reducir la agresividad de algunos aficionados. El consejo cree que dicha decisión cuenta con la aprobación de al menos el 60 % de los asistentes regulares a sus partidos.

a) determine una región crítica para el contraste de H_0: $p = 0.60$, frente a: H_1: $p < 0.60$, al nivel de significación del 5 %.

b) si el primer día de partido tras la toma de la decisión se encuesta a 1.475 asistentes, de los que 945 se muestran a favor de ella, ¿qué decisión tomaría frente al contraste anterior?

10.3. Un profesor recrimina sistemáticamente a un colega suyo por el nivel de exigencia, por lo que éste último le ofrece corregir por separado los mismos exámenes, que se acaban de celebrar, y comparar los porcentajes de alumnos que aprueban. Tras la corrección, el primer profesor aprueba a 248 de los 400 alumnos presentados, mientras el segundo profesor aprueba a 214.

a) ¿qué concluiría usted al nivel de significación del 5 %?

b) ¿y al 10 %?

10.4. Un distribuidor de ropa deportiva está considerando abrir una tienda especializada en ropa para correr junto a un campus universitario. Cree que, para hacer negocio, debe tener una clientela habitual del 20 % de los alumnos de dicho campus. Para hacer un sondeo del mercado, entrevista a 2.200 alumnos, de los que 415 se declaran potenciales de dicho comercio.

a) ¿qué conclusión extraerá el comerciante al nivel de significación del 2,5 %?

b) ¿y al 10 %?

10.5. Un analista cree que la cotización peseta/dólar *USA* puede representarse por una distribución $N(\mu,16)$, pero no está seguro de que haya descendido en el último mes por debajo de su valor medio, que cree que ha permanecido muy estable en 82,5 ptas./dólar. Por tanto, quiere contrastar: H_0: $\mu = 82{,}5$ frente a H_1: $\mu < 82{,}5$, y está dispuesto a rechazar la hipótesis nula de estabilidad del tipo de cambio, si obtiene una media muestral inferior a 80,5 ptas./dólar.

a) ¿cuál es el nivel de significación de este contraste?
b) ¿cuál es su función de potencia? Dibújela.
c) ¿cuál debería ser la región crítica para tener un nivel de significación del 10 %?
d) ¿cuál sería la función de potencia en tal caso? Dibújela junto a la anterior.

10.6. Sea X una variable aleatoria con distribución $B(n,p)$. Desconociendo el valor de p, un analista pretende rechazar la hipótesis nula: H_0: $p = 1/2$, y aceptar la alternativa: H_1: $p < 1/2$, si el valor observado de X resulta igual o inferior a una constante c. Además, quiere que el valor de la función de potencia en los puntos 1/2 y 1/4 sea: $W(1/2) = 0{,}05$, $W(1/4) = 0{,}90$. Encuentre el tamaño muestral n y la constante c que generan un contraste con las propiedades mencionadas.

10.7. Sean p_1 y p_2 las proporciones de estudiantes de cada sexo que están a favor de que se permita fumar en los exámenes escritos. Si 27 entre una muestra de 90 mujeres y 51 de una muestra de 98 varones están a favor de dicha propuesta, encuentre un intervalo aproximado de confianza del 90 % para la diferencia de proporciones.

10.8. En un examen de 275 gasolineras, se encontró que, de las 400 máquinas para medir la presión de los neumáticos, 240 dieron la presión correcta. Construya un intervalo de confianza del 99 % para la proporción de dichas máquinas que miden la presión correctamente.

10.9. Sean X e Y los miligranos de nicotina por cigarrillo con filtro y sin filtro, de una determinada marca. Suponga que ambas cantidades siguen una distribución Normal. Se analizaron 9 cigarrillos con filtro y 11 sin filtro, con resultados:

X: 1,1; 0,7; 0,9; 0,1; 0,8; 0,3; 0,9; 0,4; 1,0
Y: 0,9; 1,6; 1,5; 0,5; 1,0; 1,9; 1,4; 1,2; 1,3; 1,6; 2,1;

Estime el cociente de varianzas, y construya un intervalo de confianza del 98 % para el mismo.

10.10. Un fabricante de bombones anuncia que cada uno de ellos pesa 20 gramos. Como control de calidad, se examinaron 16 bombones fabricados un lunes por la mañana, proporcionando un peso medio de 21,95 gramos, y cuasidesviación típica (raíz cuadrada de la cuasivarianza) de 0,1197. Cuando se hizo un análisis similar en el turno de tarde, se tomaron 13 bombones, con peso medio de 21,88 gramos y cuasidesviación típica de 0,318. Construya un intervalo de confianza del 90 % para el cociente de las cuasidesviaciones de los pesos producidos en ambos turnos.

10.11. Sea X una distribución $N(\mu,\sigma^2)$. Para contrastar la hipótesis H_0: $\sigma^2 = 125$ frente a la alternativa: H_1: $\sigma^2 < 125$, se toma una muestra de tamaño 25 obteniendo una cuasivarianza: $s^2 = 98$. ¿Se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación del 5 %? ¿Qué habría ocurrido si la hipótesis alternativa hubiese sido H_1: $\sigma^2 \neq 125$?

10.12. Caracterice la forma que adopta la región crítica óptima para el contraste de la hipótesis nula: H_0: $p = p_0$, frente a la alternativa: H_1: $p = p_1$, en una población $B(p)$.

10.13. Caracterice la forma que adopta el contraste uniformemente más potente de la hipótesis nula: H_0: $p = p_0$, frente a la alternativa: H_1: $p \neq p_1$, en una población $B(p)$.

10.14. Halle el contraste de razón de verosimilitudes para el contraste de la hipótesis nula: H_0: $\mu = \mu_0$, frente a la alternativa compuesta: H_1: $\mu \neq \mu_0$, en una población $N(\mu,\sigma^2)$, con σ desconocida. Pruebe que este contraste coincide con el contraste habitual basado en el estadístico de la t de Student que vimos en la Sección 10.4.

10.15. Halle el contraste de razón de verosimilitudes para el contraste de la hipótesis nula: H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, frente a la alternativa compuesta: H_1: $\sigma \neq \sigma_0^2$, en una población $N(\mu,\sigma^2)$, con μ asimismo desconocida. Pruebe que este contraste coincide con el contraste habitual basado en el estadístico de la *chi-cuadrado* que vimos en la Sección 10.5.