

SESIÓN 5

PRODUCTOS NOTABLES

I. CONTENIDOS:

1. Productos notables.

II. OBJETIVOS:

Al término de la Sesión, el alumno:

- Comprenderá el desarrollo de productos notables como:
 - Binomio al cuadrado.
 - Producto de dos binomios con términos comunes.
 - Producto de dos binomios de la forma $(mx + a)(nx + b)$.
 - Cubo de un binomio.

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Qué ventaja tiene en álgebra identificar un producto notable?
- En la vida diaria, ¿tiene objeto sistematizar las actividades repetitivas? ¿Por qué?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Productos notables

A. ¿Qué es un producto notable?

Se llama producto notable a un producto que puede ser obtenido sin efectuar la multiplicación. Algunos de ellos son los siguientes:

Cuadrado del Binomio

Recordemos que a la expresión algebraica que consta de dos términos se le llama **binomio**. El producto de un binomio por sí mismo recibe el nombre de **cuadrado del binomio**. El desarrollo de un cuadrado de binomio siempre tiene la misma estructura. Por ejemplo, al elevar al cuadrado el binomio " $a+b$ ", multiplicando término a término, se obtendría:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Pero si comparamos la expresión " $(a+b)^2$ " con el resultado de su expansión " $a^2 + 2ab + b^2$ " podemos observar que el resultado tiene una estructura como la siguiente:

$$(\square + \triangle)^2 = (\square)^2 + 2 \cdot \square \cdot \triangle + (\triangle)^2$$

Donde \square representa al primer término del binomio y \triangle al segundo.

Si tomamos como ejemplo al binomio " $\bar{a}b$ ", ocurre lo mismo que para $a+b$ sólo que en la reducción de términos semejantes se conserva el signo menos delante del doble producto, o sea:

$$(\square - \triangle)^2 = (\square)^2 - 2 \cdot \square \cdot \triangle + (\triangle)^2$$

En ambos casos vemos que se tiene la misma estructura diferenciándose sólo en un signo. A partir de este hecho podemos presentar la fórmula para desarrollar el producto notable **cuadrado del binomio**:

“El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más (o menos) el doble del producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término”

La estructura que representa esta fórmula es:

$$(\square \pm \triangle)^2 = (\square)^2 \pm 2 \cdot \square \cdot \triangle + (\triangle)^2$$

Algunos ejemplos:

$$a) (p + 2b)^2 = p^2 + 2 \cdot p \cdot 2b + (2b)^2 = p^2 + 4pb + 4b^2$$

$$b) (3m + 4n)^2 = (3m)^2 + 2 \cdot 3m \cdot 4n + (4n)^2 = 9m^2 + 24mn + 16n^2$$

$$c) (5x - y)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot y + (y)^2 = 25x^2 + 10xy + y^2$$

Suma por Diferencia

Consideremos el producto de la suma de dos términos “ $a + b$ ” por su diferencia “ $a - b$ ”. Al desarrollar el producto:

$$(a + b)(a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$$

Podemos observar que el resultado tiene una estructura como la siguiente:

$$(\square + \triangle)(\square - \triangle) = (\square)^2 - (\triangle)^2$$

Es decir, la suma de dos términos por su diferencia es equivalente a la diferencia de los cuadrados de los términos. La fórmula para el producto notable **suma por diferencia** se enuncia como sigue:

“El producto de una suma de dos términos por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo”

Algunos ejemplos son:

$$I. (x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$$

$$II. (a^2 - 3)(a^2 + 3) = a^4 - 9$$

$$III. (2p^5 + 6q^4)(2p^5 - 6q^4) = 4p^{10} - 36q^8$$

Multiplicación de Binomios con un Término Común

Este producto notable corresponde a la multiplicación de binomios de la forma “ $a + b$ ” por “ $a + c$ ”.

Al desarrollar el producto

$$(a + b) \cdot (a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$$

Se observa que la estructura es la siguiente:

$$(\square + \star)(\square + \triangle) = (\square)^2 + (\star + \triangle) \cdot \square + \star \cdot \triangle$$

La fórmula para el producto de **Binomios con un término común** se enuncia como sigue:

“Cuadrado del primer término, más la suma de los términos distintos multiplicada por el término común y más el producto de los términos distintos”

Ejemplos:

$$\bullet \quad (x + 3) \cdot (x + 2) = x^2 + (3 + 2)x + 3 \cdot 2 = x^2 + 5x + 6, \quad \text{observa que} \quad \begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 3 \cdot 2 = 6 \end{cases}$$

$$\bullet \quad (a + 8) \cdot (a - 7) = a^2 + (8 - 7)a + 8 \cdot (-7) = a^2 + a - 56, \quad \text{observa que} \quad \begin{cases} 8 + (-7) = 1 \\ 8 \cdot (-7) = -56 \end{cases}$$

$$\bullet \quad (p - 9) \cdot (p - 12) = p^2 + (-9 + (-12)) \cdot p + (-9) \cdot (-12) = p^2 + (-21)p + 108,$$

$$\text{Observa que} \quad \begin{cases} -9 + (-12) = -21 \\ (-9) \cdot (-12) = 108 \end{cases}$$

A continuación presentamos **otros productos notables** con sus respectivas fórmulas:

▪ Cubo de un binomio

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- **Cuadrado de un trinomio**

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

- **Suma y resta de cubos**

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

V. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE:

A. Realiza los siguientes ejercicios.

a) $(m + 3)^2$

b) $(4m + 10h)^2$

c) $(9 + 4m)^2$

d) $(2x + 3y)^2$

e) $(a^x + b^{x+1})^2$

f) $(a - x)(x + a)$

g) $(2m + 9)(2m - a)$

h) $(m + 3)^3$

i) $(2 + y^2)^3$

j) $(1 - 3y)^3$

k) $(a + 1)(a + 2)$

l) $(n - 19)(n + 10)$

m) $(a^{x+1} - 6)(a^{x+1} - 5)$

n) $(3x + 4)(2x - 3)$

o) $(3t^2s - 2)(4t - 3s)$

B. Resuelve el Problema Reto.

$$[(x + y)^2 + 3]^2 [(x + y)^3 - 3]^3$$